Ex. 1.4.

On résoud d'abord les ég. homogènes sur $\mathbb{R}$ associées aux ég. de l'énoncé :

(a) : $y''+y'+y=0$ sur $\mathbb{R}$.

On considère l'ég. caractéristique associée :

$$z^2+z+1=0.$$

Son discriminant est $\Delta = 1^2-4\times 1 = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

Ses racines sont $r = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{r} = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

Soit $y_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{-\frac{1}{2}t} \times \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}$

et $y_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{-\frac{1}{2}t} \times \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array}$.

Par le cours, $(y_1 ; y_2)$ est une base de S_0 donc

$$S_0 = \mathrm{vect}(y_1 ; y_2) = \{k_1 y_1 + k_2 y_2 ; (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto k_1 e^{-t/2} \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k_2 e^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array} ; (k_1 ; k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

(b) : $y''+2y'+y=0$ sur $\mathbb{R}$.

L'ég. caract. associée est : $z^2+2z+1=0$.

Son discriminant est $\Delta = 2^2-4\times 1 = 0$.

Elle a donc une seule sol. (double) : $\frac{-2}{2} = -1$.

(Rq. : on aurait trouvé cela autrement. On a
$z^2+2z+1=0 \iff (z+1)^2=0 \iff z+1=0 \iff z=-1$).

Soit $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto te^{-t}$.

Par le cours, $(y_1 ; y_2)$ est une base de S_0 donc

$S_0 = \text{vect}(y_1 ; y_2)$.

(C_0') : $y''+y=0$ sur $\mathbb{R}$.

L'éq. caract. associée est : $z^2+1=0$.
Les sol. sont i et $-i$. Soit

$y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{0t}\cos(t)=\cos(t)$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{0t}\sin(t)=\sin(t)$.

Par le cours, $(y_1 ; y_2)$ est une base de S_0 donc

$S_0 = \text{vect}(y_1 ; y_2)$.

Alternative : * On remarque que sinus et cosinus sont sol. de (C_0).

* On vérifie que $(\cos ; \sin)$ est une famille libre : Soit $(a ; b) \in \mathbb{R}^2$ tq. $a \times \cos + b \times \sin = 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a\cos(t)+b\sin(t)=0$. Pour $t=0$, on a donc $a=0$ et, pour $t=\pi/2$, on a donc $b=0$.
Donc $(\cos ; \sin)$ est libre. C'est donc une base de S_0.

✓