Résolution de :

(a) $y''+y'+y=t^2+t+1$ sur $\mathbb{R}$.

On résout l'éq. homogène associée (voir plus haut) : $S_0=\text{vect}(y_1;y_2)$ avec

$y_1 : \mathbb{R}\ni t\longmapsto e^{-t/2}\cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et

$y_2 : \mathbb{R}\ni t\longmapsto e^{-t/2}\sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Comme le second membre s'écrit :

$t^2+t+1=e^{0\times t}P(t)$ où $P(t)=t^2+t+1$

est un poly. de $d^\circ 2$ et comme $0$ n'est pas sol. de l'éq. caract. $z^2+z+1=0$, le cours recommande de chercher une sol. poly. de $d^\circ 2$ : $Q(t)=at^2+bt+c$.

Soit $(a;b;c)\in\mathbb{R}^3$ et $y_p : \begin{array}{l}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ t\longmapsto at^2+bt+c\end{array}$.

$y_p$ est deux fois dérivables et, pour $t\in\mathbb{R}$,

$y_p'(t)=2at+b$ et $y_p''(t)=2a$.

On a donc :

$y_p\in S \iff \forall t\in\mathbb{R},\ 2a+(2at+b)+(at^2+bt+c)=t^2+t+1$

$\iff \forall t\in\mathbb{R},\ (a-1)t^2+(2a+b-1)t+(2a+b+c-1)=0$

$\iff a-1=0$ et $2a+b-1=0$ et $2a+b+c-1=0$

$\iff a=1$ et $b=-1$ et $c=0$.

Donc, la fonct. $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^2 - t$

est sol. de (a).

Par le cours,

$$S = \{y_p + y \,;\, y \in S_0\} = \{y_p + k_1 y_1 + k_2 y_2 \,;\, (k_1;k_2) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^2 - t + \lambda_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \lambda_2 e^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{array} ; (k_1;k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Résolution de (b) : $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.

On résout l'ég. homogène associée (voir plus haut) :

$S_0 = \mathrm{vect}(y_1 ; y_2)$ avec

$y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t}$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto te^{-t}$.

Par le cours, $S = \{y_p + y \,;\, y \in S_0\}$

$$= \{y_p + k_1 y_1 + k_2 y_2 \,;\, (k_1;k_2) \in \mathbb{R}^2\},$$

où $y_p$ est une sol. de (b).

(Comme le second memb. est de la forme $e^{\alpha t} P(t)$ avec $\alpha = -1$ et $P$ le poly. constant égal à 2, comme $-1$ est une racine double de l'ég. caract., le cours nous invite à chercher $y_p$ sous la forme $y_p(t) = e^{-t} Q(t)$ où $Q$ est une fct. poly. de d° 2.)

On cherche une sol. $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de (b)
sous la forme $y_p(t) = e^{-t}(at^2+bt+c)$
avec $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$. $y_p$ est deux fois dérivable et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$y_p'(t) = -e^{-t}(at^2+bt+c) + e^{-t}(2at+b)$$
$$= e^{-t}\left(-at^2+(2a-b)t+b-c\right)$$

et

$$y_p''(t) = -e^{-t}\left(-at^2+(2a-b)t+b-c\right) + e^{-t}(-2at+2a-b)$$
$$= e^{-t}\left(at^2+(b-4a)t+2a-2b+c\right).$$

Donc,

$$y_p \in S \iff \forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t}\left[\cancel{at^2}+(\underline{b}-\cancel{4a})t+2a-2b+c-\cancel{2at^2}+2(\cancel{2a}-\underline{b})t+2(b-c) + \cancel{at^2}+\underline{b}t+c\right] = 2e^{-t}$$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R},\quad 2a-\cancel{2b}+\cancel{c}+\cancel{2b}-\cancel{2c}+\cancel{c} = 2$$

(comme $t \mapsto e^{-t}$ ne s'annule pas)

$$\iff a = 1.$$

Donc $y_p : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto t^2e^{-t}\end{array}$ est sol. de (b)

<u>Résolution de (c')</u> : $y''+y = 1+e^{t}$ sur $\mathbb{R}$.

On résoud l'ég. homogène associée (voir plus haut) :
$S_0 = \text{vect}(\cos;\sin)$. Par le cours,

$$S = \{y_p + y \,;\, y \in S_0\} = \left\{ y : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto y_p(t) + k_1\cos(t) + k_2\sin(t)\end{array},\ (k_1;k_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

où $y_P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une sol. de $(C')$.

Le second membre de $(C')$ s'écrit sous la forme : $\underbrace{e^{0t} \times 1}_{poly}, + \underbrace{e^{t} \times 1}_{poly}.$

On cherche une sol. $y_{P_0}$ de $y''+y = e^{0t}1$ sous la forme $y_{P_0}(t) = e^{0t} \times Q_0(t)$ avec $d^\circ Q_0 = 0$ car $0$ n'est pas sol. de l'éq. caract.

On cherche une sol. $y_{P_1}$ de $y''+y = e^{t} \times 1$ sous la forme $y_{P_1}(t) = e^{t} \times Q_1(t)$ avec $d^\circ Q_1 = 0$ car $1$ n'est pas sol. de l'éq. caract.

Par le principe de superposition $y_P = y_{P_0} + y_{P_1}$ sera une sol. de $(C')$.

Pour $a_0 \in \mathbb{R}$, soit $y_{P_0} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto a_0 \end{array}$.

$y_{P_0}$ est sol. de $y''+y = 1$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad y_{P_0}''(t) + y_{P_0}(t) = 1$

$\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 + a_0 = 1$

$\iff a_0 = 1$.

Rq. : on aurait pu deviner $y_{P_0}$ !

Donc $y_{P_0} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto 1 \end{array}$ est sol. de $y''+y = 1$.

Soit $a_1 \in \mathbb{R}$ et $y_{P_1} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \longmapsto e^{t} \times a_1 \end{array}$. $y_{P_1}'' = y_{P_1}' = y_{P_1}$.

$y_{P_1}$ sol. de $y''+y = e^{t} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \ a_1 e^{t} + a_1 e^{t} = e^{t} \iff 2a_1 = 1$

$\iff a_1 = 1/2$.

Donc $y_{P_1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{1}{2}e^t$ est sol. de $y''+y=e^t$. Par le principe de supperposition, la fonct. $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto y_{P_0}(t)+y_{P_1}(t) = 1+\frac{1}{2}e^t$

est sol. de $(C')$.

<u>Résolution de (C) :</u> $y''+y' = t+\operatorname{ch}(t)$ sur $\mathbb{R}$

où $\operatorname{ch}(t) = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$.

On résoud l'éq. homogène associée :

$(C_0)$ : $y''+y'=0$.

L'éq. caract. associée est : $z^2+z=0$.

Comme

$z^2+z=0 \iff z(z+1)=0 \iff (z=0 \text{ ou } z=-1)$,

les racines de l'éq. caract. sont $0$ et $-1$.

Par le cours, $S_0 = \operatorname{vect}(y_1 ; y_2)$ où

$y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{0t}=1$ et $y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto e^{-t}$. ✓

Par le cours, $S = \{y_p + y \,;\, y \in S_0\}$ où $y_p$ est une sol. de $(C)$.

( on examine le second membre :

$t + \operatorname{ch}(t) = \underbrace{t}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}e^t}_{} + \underbrace{\frac{1}{2}e^{-t}}_{}$

de la forme : $e^{\alpha t}p(t)$ )