on va donc chercher une sol. parti.

$\to y_{P_1}$ de $y''+y'=t$

$\to y_{P_2}$ de $y''+y'=\frac{1}{2}e^{t}$

$\to y_{P_3}$ de $y''+y'=\frac{1}{2}e^{-t}$

Par le principe de superposition, $y_P = y_{P_1}+y_{P_2}+y_{P_3}$ conviendra.

On cherche une sol. y_{P_1} de $y''+y'=t$ de la forme
↳ ens. de sol. : S_1.

$$y_{P_1}(t) = at^2+bt+c, \quad (a;b;c)\in\mathbb{R}^3$$

(car $t = e^{0t}\times t$, 0 est sol. simple de l'éq. carac.)
et $t\mapsto t$ est de degré 1.

On a, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $y'_{P_1}(t) = 2at+b$
$y''_{P_1}(t) = 2a$.

On a :

$y_{P_1}\in S_1 \iff \forall t\in\mathbb{R},\ 2a+2at+b = t$

$\iff \forall t\in\mathbb{R},\ (2a-1)t+2a+b=0$

$\iff 2a-1=0$ et $2a+b=0$

$\iff a=\frac{1}{2}$ et $b=-1$.

Donc $y_{P_1} : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ t\mapsto \frac{1}{2}t^2-t\end{array}$ est sol. de $y''+y'=t$ sur $\mathbb{R}$.

On cherche une sol. y_{P_2} de $y''+y'=\frac{1}{2}e^{t}$ de la forme :
↳ ens. de sol. : S_2

$$y_{P_2}(t) = ce^{t}, \quad c\in\mathbb{R}.$$

(car $t\mapsto\frac{1}{2}$ est de degré 0 et 1 n'est pas sol. de l'éq. carac.)

On a $y''_{P_2}(t) = y'_{P_2}(t) = ce^{t}$.

On a :

$y_{P_2} \in S_2 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ ce^t + ce^t = \frac{1}{2}e^t$

$\iff 2c = \frac{1}{2} \iff c = \frac{1}{4}$. Car $t \mapsto e^t$ ne s'annule pas.

Donc $y_{P_2} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{1}{4}e^t \end{array}$ est sol. de $y''+y' = \frac{1}{2}e^t$ sur $\mathbb{R}$.

On cherche une sol. y_{P_3} de $y''+y' = \frac{1}{2}e^{-t}$ de la forme
↳ ens. des sol. : S_3

$y_{P_3}(t) = e^{-t}(at+b)$, $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

(car $t \mapsto \frac{1}{2}$ est de d° 0 et -1 est racine simple de l'éq. carach.).

On a :

$y_{P_3}'(t) = -e^{-t}(at+b) + e^{-t}a$

$y_{P_3}''(t) = e^{-t}(at+b) - e^{-t}a - e^{-t}a = e^{-t}(at+b) - 2ae^{-t}$.

On a :

$y_{P_3} \in S_3 \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \cancel{e^{-t}(at+b)} - 2ae^{-t} - \cancel{e^{-t}(at+b)} + ae^{-t} = \frac{1}{2}e^{-t}$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ -ae^{-t} = \frac{1}{2}e^{-t}$

$\iff a = -\frac{1}{2}$

(car $t \mapsto e^{-t}$ ne s'annule pas).

Donc $y_{P_3} : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto -\frac{t}{2}e^{-t} \end{array}$ est sol. de $y''+y' = \frac{1}{2}e^{-t}$

Par le principe de superposition, $y_P := y_{P_1} + y_{P_2} + y_{P_3}$ est sol. de $y''+y' = t + ch(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Car $t + ch(t) = t + \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t}$.

Deux ég. complexes :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'ég. (a) : $y''-iy=ie^t$.

(on cherche donc les fct. $y:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ deux fois dérivables qui vérifient l'ég.)

On résoud l'ég. homogène associée (a_0) : $y''-iy=0$.

L'ég. caract. associée est $z^2-i=0$.

$\to \Delta = 0-4\times(-i) = 2^2\times e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2$

et $2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = (1+i)\sqrt{2}$.

Les racines sont $r_1 = \frac{-0-(1+i)\sqrt{2}}{2} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $r_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \neq r_1$

$\to$ Alternative : On a

$z^2-i=0 \iff z^2=i \iff z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} \iff \begin{cases} z = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ \text{ou} \\ z=-e^{i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$.

Donc les racines sont $r_1 = -e^{i\frac{\pi}{4}} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $r_2 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Par le cours,

$S_0 = \text{vect}(y_1;y_2) = \{k_1y_1+k_2y_2\,;\,(k_1;k_2)\in\mathbb{C}^2\}$ où

$y_1 : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto e^{r_1t}\end{array}$ et $y_2 : \begin{array}{l}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto e^{r_2t}\end{array}$

(Rq. : $y_1(t) = e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}e^{i\frac{t}{\sqrt{2}}}$ et $y_2(t) = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}e^{\frac{it}{\sqrt{2}}}$)

Par le cours, $S = \{y_P + y\,;\,y\in S_0\}$ où y_P est une sol. de (a). On cherche y_P sous la forme $y_P(t) = ce^t$ (car i n'est pas racine de $z^2-i=0$).

On a, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $y_P'(t) = y_P''(t) = ce^t$.

Donc :

$y_p \in S \iff \forall t \in \mathbb{R},\ ce^t - ice^t = ie^t$

$\iff \forall t \in \mathbb{R},\ c(1-i) = i$

$\iff c(1-i) = i \iff c = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1+i}{2}.$

car $t \mapsto e^t$ ne s'annule pas

Donc $y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{i-1}{2} e^t \end{array}$ est sol. de (a).

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'éq. (b) : $y'' + y = ie^{it}$

On cherche les sol. à val. <u>complexes</u>.

On résoud l'éq. homogène associée (b_0) : $y''+y=0$.

L'éq. caract. est $z^2+1=0$ dont les racines sont i et $-i$ (voir plus haut).

Par le cours,

$S_0 = \left\{ y : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto k_1 e^{it} + k_2 e^{-it} \end{array} ;\ (k_1; k_2) \in \underline{\mathbb{C}}^2 \right\}.$

Par le cours, $S = \{ y_p + y ; y \in S_0 \}$.

On cherche y_p sous la forme

$y_p(t) = (at+b)e^{it}$ (car i est racine simple de l'éq. caract.)

On a : $y_p'(t) = ae^{it} + (at+b)ie^{it}$

$y_p''(t) = aie^{it} + aie^{it} + (at+b)i^2e^{it}$

$= 2aie^{it} - (at+b)e^{it}.$

On a :

$y_p \in S \iff \forall t \in \mathbb{R},\ 2aie^{it} - \cancel{(at+b)e^{it}} + \cancel{(at+b)e^{it}} = ie^{it}$

Comme $t \mapsto e^{it}$ ne s'annule pas, 38

$y_p \in S \iff \forall t \in \mathbb{R},\ 2ai = i \iff 2ai = i \iff a = \frac{1}{2}$.

Donc $y_p : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{t}{2} e^{it} \end{array}$ est sol. de (b). ✓