

Ex. 3.2.

45

Preliminaire :

- Cons : * $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

avec la convention $-\infty + n = -\infty$, pour $n \in \mathbb{N}$

* $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P; \deg Q)$

Rq : Si $\deg P > \deg Q$, $\deg(P+Q) = \deg P$

Si $\deg P = \deg Q$, on peut avoir $\deg(P+Q) < \deg P$

Ex : $P = 1+x^2$ et $Q = -x^2$

$\deg(P+Q) = 0 < 2 = \deg P = \deg Q$.

- Calcul du terme dominant :

Lorsqu'on a un produit

$$(a_1 x^{n_1} + Q_1) \times (a_2 x^{n_2} + Q_2) \times \dots \times (a_p x^{n_p} + Q_p)$$

avec $\deg Q_j < n_j$, pour tout j , le terme dominant du produit est $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_p \times x^{n_1+n_2+\dots+n_p}$.

On va utiliser ce fait en le réécrivant sur chaque cas.

(i). $P = (x+1)^2 (x-2)$.

$$\begin{aligned} \text{Par le cons, } \deg(P) &= \deg((x+1)^2) + \deg(x-2) \\ &= \deg(x+1) + \deg(x+1) + 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$P = x(x+1)^2 + Q_1 \quad \text{avec } Q_1 = -2(x+1)^2$$
$$\text{et } \deg Q_1 = 2 < 3.$$

$$= x^2(x+1) + Q_2 + Q_1 \quad \text{avec } Q_2 = x(x+1) \text{ et } \deg Q_2 = 2$$

$$= x^3 + \underbrace{Q_3 + Q_2 + Q_1}_{\deg \leq 2} \quad \text{avec } Q_3 = x^2 \text{ et } \deg Q_3 = 2$$

donc le terme dominant de P est X^3 .

(46)

(ii). Par le cours, $\deg Q = \deg(X^2+1) + \deg(X^2+1) + \deg(X^2+1)$
 $= 3 \deg(X^2+1) = 3 \times 2 = 6$.

De plus,

$$Q = X^2(X^2+1)^2 + \underbrace{(X^2+1)^2}_{Q_1} \text{ du } \deg = 4 < 6$$

$$= X^4(X^2+1) + \underbrace{X^2(X^2+1)}_{Q_2} + Q_1$$

$$Q_2 \text{ du } \deg = 4 < 6$$

$$= X^6 + \underbrace{X^4 + Q_2 + Q_1}_{\text{du } \deg \leq 4}$$

donc X^6 est le terme dominant de Q .

(iii). Par le cours, $\deg R = 2 \deg(X+3) + 2 \deg(X^2-5)$
 $= 2 \times 1 + 2 \times 2 = 6$.

De plus,

$$R = (X+3)(X+3)(X^2-5)^2 = X(X+3)(X^2-5)^2 + Q_1$$

$$\text{avec } Q_1 = 3(X+3)(X^2-5)^2 \text{ du } \deg = 5 < 6.$$

$$R = X^2(X^2-5)(X^2-5) + Q_2 + Q_1$$

$$\text{avec } Q_2 = 3X(X^2-5)^2 \text{ du } \deg = 5 < 6.$$

$$R = X^4(X^2-5) + Q_3 + Q_2 + Q_1$$

$$\text{avec } Q_3 = -5X^2(X^2-5) \text{ du } \deg = 4 < 6.$$

$$R = X^6 + \underbrace{(-5)X^4 + Q_3 + Q_2 + Q_1}_{\deg \leq 5}$$

donc X^6 est le terme dominant de R .

✓