

Bonjour

1

Ex. 1.1

(a) on a montré que l'éq. (a) est équivalente à

$$(a') : y' = \frac{2t}{1+t^2} y \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Par le cours, l'ens. des sol. de (a') est

$$y_0 = \text{vect}_{\mathbb{R}}(y_0) \quad \text{où}$$

$$y_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{F(t)}$$

où F est une primitive de $t \mapsto \frac{2t}{1+t^2}$.

$$F(t) = \ln(1+t^2) \text{ convient.}$$

$$\left(\begin{aligned} F'(t) &= \ln'(1+t^2) \times (1+t^2)' \\ &= \frac{1}{1+t^2} \times 2t \end{aligned} \right)$$

$$\text{On a } y_0(t) = e^{\ln(1+t^2)} = 1+t^2.$$

$$y_0 = \frac{1}{2} k y_0 ; k \in \mathbb{R}.$$

Pb. de Cauchy

12

On cherche parmi les sol. de l'éq. (a)
les sol. y vérifiant $y(0) = 1$.

Une sol. $y = ky_0$ de (a) vérifie $y(0) = 1$

$$\Leftrightarrow k y_0(0) = 1$$

$$\Leftrightarrow k(1 + 0^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow k = 1.$$

y_0 est la seule sol. de (a) vérifiant
la cond. de Cauchy.

$$(b). \quad y' + \frac{t-1}{t} y = 0 \text{ sur } I:]0; +\infty[.$$

Par le cours, l'ens. des sol. de (b) est

$$y_0 = \text{vect}_{\mathbb{R}}(y_0) \text{ où } y_0: I \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{F(t)}$$

où F est une primitive de $t \mapsto -\frac{t-1}{t} = -1 + \frac{1}{t}$

La fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto -t + \ln(t)$$

On aient,

$$\text{On a, pour } t > 0, \quad y_0(t) = e^{-t + \ln(t)} = e^{-t} e^{\ln(t)} = t e^{-t}$$

Pb. de Cauchy:

13

une sol. $y = k y_0$ de (b) vérifie $y(1) = 0$.

$$\Leftrightarrow k y_0(1) = 0 \Leftrightarrow k \cdot 1 \cdot e^{-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 0.$$

La sol. nulle est la seule sol. de (b) vérifiant la cond. de Cauchy.

(c) et (e)

$$(c) \quad y' + 2ty = 0 \quad \text{sur } I \subset \mathbb{R},$$

$$(y' = -2ty) \quad \text{avec } \underline{0 \in I}.$$

Par le cours, l'ens. des sol. de (c) est

$$\mathcal{S}_0 = \{ k y_0 ; k \in \mathbb{R} \} \quad \text{où } y_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto e^{F(t)}$$

où $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de $I \ni t \longmapsto -2t$.

La fct. $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto -2 \times \frac{t^{1+1}}{1+1} = -2 \frac{t^2}{2} = -t^2,$$

$$\text{Dne } y_0 : I \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto e^{-t^2}.$$

Ph. de Cauchy:

4

une sol. $y = ky_0$ de (c) vérifiant $y(0) = 2$

$$\Leftrightarrow k y_0(0) = 2 \Leftrightarrow k \times e^{-0^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow k = 2,$$

La sol. $2y_0$ est la seule à vérifier la cond.
de Cauchy.

(e) Attention: l'éq. n'est pas normale

$$\hookrightarrow \underline{(1+t^2)y' - ty = 0} \quad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Pour une fonct. dér. $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a,
pour $t \in \mathbb{R}$,

$$(1+t^2) y'(t) - ty(t) = 0 \Leftrightarrow y'(t) = \frac{t}{1+t^2} y(t)$$

car $1+t^2 > 0$.

↑
eq. normale.

$$(e) \text{ est équi. à } (e'): \quad y' = \frac{t}{1+t^2} y.$$

Par le cours, l'ens. des sol. de (e') (donc de (e))
est

$$y_0 = \text{vect}(y_0) \text{ où } y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto e^{F(t)}$$

où $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive
de $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$.

15

Soit $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on veut
 $t \mapsto \frac{1}{2} \ln(1+t^2)$

Car F est dérivable et, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$F'(t) = \frac{1}{2} \ln'(1+t^2) \times (1+t^2)'$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} \times 2t = \frac{t}{1+t^2}.$$

Pb. de Cauchy { Une $y_0(t) = e^{\frac{1}{2} \ln(1+t^2)} = \sqrt{e^{\ln(1+t^2)}} = \sqrt{1+t^2}$,

une sol $y = ky_0$ de (e) vérifie $y(0) = 1$

$$(\Leftrightarrow) \quad ky_0(0) = 1 \Leftrightarrow k \sqrt{1+0} = 1 \Leftrightarrow k = 1.$$

Le pb. de Cauchy a pour unique sol, y_0 .

Préparer : (g) + ex. (1.4).

EX. (1.2)

y_1 et y_2 sont sol. d'un m.

eq. du type $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$
on a est anti?

→ vérifier à la main si y_1 est sol.
si y_2 est sol.

ph. : on ne connaît pas a !

→ Course : l'ens. des sol. de $y' + ay = 0$ sur $\mathbb{R}$
est un esp. vect. de dim. 1.

supp. y_1 et y_2 sont sol.

$$y_1' + ay_1 = 0 = y_2' + ay_2$$

--- calculer a ?
pas possible?

$$y_1' - y_2' = a(y_1 - y_2) \rightarrow \text{s'annule?}$$

$$\rightarrow a = \frac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2}$$

→ si y_1 et y_2 sont sol.
par une fct. y_0

$$y_1 = k_1 y_0$$

$$y_2 = k_2 y_0$$

Si y_1 et y_2 sont sol, il existe
une fct. y_0 tel $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$ tq.

$y_1 = k_1 y_0$ et $y_2 = k_2 y_0$
et $\neq 0$ ne s'annule pas

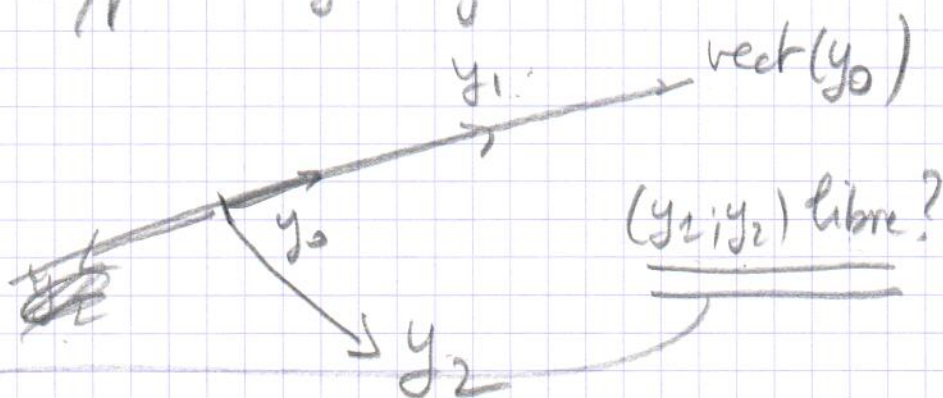
Donc $y_2 = k_2 \frac{y_1}{k_1} = \frac{k_2}{k_1} y_1$

$\forall t, t e^t = \frac{k_2}{k_1} e^t$

$\forall t, t = \frac{k_2}{k_1}$ Impossible!

Par l'absurde, y_1 et y_2 ne
sont pas sol. d'un m-ég.
du type $y' + ay = 0$

Variante:



on supp. qu'il a $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tq.
 $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_1 \underline{y_1(t)} + \lambda_2 \underline{y_2(t)} = 0$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_1 e^t + \lambda_2 t e^t = 0$$

i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \lambda_1 + \lambda_2 t = 0.$$

$$\text{par } t=0, \text{ on a } \lambda_1 + 0 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0$$

$$\text{par } t=1, \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\text{donc } 0 + \lambda_2 = 0 \text{ donc } \lambda_2 = 0 = \lambda_1$$

famille est libre