

Ex. 1.2.

9

On montre que la famille $(y_1; y_2)$ est libre.

Soit $(\lambda_1; \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$
(= la fct. nulle). Dnc, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) = 0 \text{ soit } \lambda_1 e^t + \lambda_2 t e^t = 0.$$

En particulier, pour $t=0$, on a : $\lambda_1 + 0 = 0$
dnc $\lambda_1 = 0$. Pour $t=1$, on a : $\lambda_1 e + \lambda_2 e = 0$
soit $\lambda_2 e = 0$ et $\lambda_2 = 0$ car $e \neq 0$.

D'où $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. On a montré que $(y_1; y_2)$
est libre.

Si y_1 et y_2 étaient sol. d'une ég. diff. $y' + ay = 0$
où $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est conti., il existerait un
sous-esp. vect. $\mathcal{S}_0$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ t.q.
 $\dim \mathcal{S}_0 = 1$ et $y_1 \in \mathcal{S}_0$ et $y_2 \in \mathcal{S}_0$.

Comme $\mathcal{S}_0$ est de dim. 1, le nombre max. d'élé.
dans une famille libre de $\mathcal{S}_0$ est 1. Contr.
car $(y_1; y_2)$ est libre.

On en déduit que y_1 et y_2 ne peuvent être
sol. ensemble d'une ég. $y' + ay = 0$ avec a conti.

(a).

Attention ; (a) n'est pas normale, mais comme $t \mapsto 1+t^2$ ne s'annule pas, on va pouvoir se ramener à une éq. normale. Ensuite, on applique le cours.

Comme, pour $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 > 0$, on a, par $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ équiv.,

$$\forall t \in I, \quad (1+t^2)y'(t) - 2ty(t) = 1-t^2 \quad (\Rightarrow) \quad y'(t) = \frac{2t}{1+t^2}y(t) + \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Donc l'éq. (a) sur I est équiv. à

$$(a') : \quad y' = \frac{2t}{1+t^2}y + \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{sur } I,$$

Par le cours, l'ens $\mathcal{S}$ des sol. de (a') est

$$\mathcal{S} = \{ z + y; y \in \mathcal{S}_0 \}$$

où z est une sol. de (a') et $\mathcal{S}_0$ l'ens. des sol. de (a'') :

$$(a'') : \quad y' = \frac{2t}{1+t^2}y \quad \text{sur } I.$$

or on a déjà résolu l'éq. dans l'ex. 1.1.

On a $y_0 = \text{vect}_{\mathbb{R}}(y_0) = \{ky_0; k \in \mathbb{R}\}$ 11

on $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto 1+t^2$.

Il reste à trouver une sol. z de (a') .
On utilise la méthode de var. des ^{la} constantes.

Soit $z = uy_0$ on $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dér..

On a

$$z \text{ est sol. de } (a') \Leftrightarrow \forall t \in I, (uy_0)'(t) = \frac{2t}{1+t^2} (uy_0)(t) + \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, u'(t)y_0(t) + \cancel{u(t)y_0'(t)} = \frac{2t}{1+t^2} y_0(t)u(t) + \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(car y_0 est sol. de (a_0))

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, u'(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \quad (*)$$

En choisissant pour u une primitive sur I
de $g: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ^{qui est continue}
 $t \mapsto \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ $(*)$ est vraie

donc $z = uy_0$ est sol. (a') , par les équiv.

Il reste à trouver une primitive de g sur I :

$$\int^x g(t) dt = \int^x \frac{1+t^2 - 2t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int^x \frac{dt}{1+t^2} - \int^x t \cdot \frac{2t}{(1+t^2)^2} dt$$

112

Donc

$$\int^x g(u) dt = \operatorname{Arctan} x = \int^x t \times \left(\frac{-1}{1+t^2} \right)' dt$$

IPP

$$= \operatorname{Arctan} x - \left(\left[t \times \frac{-1}{1+t^2} \right]^x - \int^x 1 \times \frac{-1}{1+t^2} dt \right)$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + cte.$$

Donc $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ Convient.

$$t \mapsto \frac{t}{1+t^2} \quad \text{et } z(t) = t.$$

On verra plus loin le pb. de Cauchy.

(b)

l'éq. est normale, avec second membre, on peut donc directement appliquer le cours.

Par le cours, l'ens. $\mathcal{S}$ des sol. de (b) sur I est

$$\mathcal{S} = \{ z + y; y \in \mathcal{S}_0 \}$$

où z est un sol. de (b) et $\mathcal{S}_0$ l'ens. des sol.

de (b₀): $y' = -\frac{t-1}{t} y$ sur I .

on a déjà résolu (b₀) dans l'ex. 1.1.

On a $\mathcal{S}_0 = \operatorname{vect}(y_0)$ où $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto t e^{-t}.$$

On cherche une sol. z de (b) 13
sous la forme $u y_0$ où $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ est deriv.,

On a

$$z \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall t \in I, u'(t) y_0(t) + u(t) y_0'(t) = - \frac{t-1}{t} y_0(t) u(t) + t^2$$

$(y_0 \in \mathcal{Y}_0)$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, u'(t) t e^{-t} = t^2$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, u'(t) = t e^t. \quad (*)$$

(car sur I , $t > 0$).

En prenant pour u une primitive de $g: I \ni t \mapsto t e^t$
(*) est vraie donc, par les equiv., $z = u y_0$ est
sol. de (b).

On cherche une primitive de g :

$$\begin{aligned} \int^x t e^t dt &= \int^x t (e^t)' dt \stackrel{\text{IPP}}{=} [t e^t]^x - \int^x 1 \times e^t dt \\ &= x e^x - e^x + cte. \end{aligned}$$

la fonct. $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ convient.
 $t \mapsto (t-1)e^t$

On trouve que $z(t) = u(t) y_0(t) = (t-1)e^t t e^{-t} = t(t-1)$.

Pb. de Cauchy: plus loin.

(C) $\{$ L'eq. est normale. On applique le cours

Par le cours, l'ens. $\mathcal{Y}$ des sol. de (c) sur I est 14

$$\mathcal{Y} = \{ z + y; y \in \mathcal{Y}_0 \}$$

où z est une sol. de (c) et $\mathcal{Y}_0$ l'ens. des sol. de (c₀): $y' = -2ty$ sur I .

$\left\{ \begin{array}{l} \text{on a déjà résolu (c}_0 \text{) à l'ex. 1.1.} \end{array} \right.$

On a $\mathcal{Y}_0 = \text{vect}_{\mathbb{R}}(y_0)$ où $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto e^{-t^2}$.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{On peut deviner que la fct. cte égale à 1} \\ \text{est sol. de (c)!} \end{array} \right.$

On cherche z sous la forme $u y_0$ où $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dériv.

$$z \in \mathcal{Y} \Leftrightarrow \forall t \in I, u'(t) y_0(t) + u(t) y_0'(t) = -2t u(t) y_0(t) + 2t$$

(cf. $y_0 \in \mathcal{Y}_0$)

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, u'(t) e^{-t^2} = 2t$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in I, u'(t) = 2t e^{t^2}. (*)$$

Pour $u: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $t \mapsto e^{t^2}$, u est dériv. et

$u'(t) = e^{t^2} \times 2t$ donc (*) est vraie. Par les équiv. $z = u y_0$ est sol. de (c).

On a, pour $t \in I$, $z(t) = e^{t^2} \times e^{-t^2} = 1$.

Pb. de Cauchy pour (c).

15

On cherche les sol. y de (c) qui vérifient
 $y(0) = 1$

(Implicitement, $0 \in I$).

Une sol. $y = z + ky_0$ de (c) vérifie $y(0) = 1$

$$\Leftrightarrow z(0) + k y_0(0) = 1 \Leftrightarrow 1 + k \times 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow k = 0.$$

Donc z est la seule sol. de (c) qui vérifie
la cond. de Cauchy

Pb. de Cauchy pour (a): $z: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto t$, $t \mapsto 1+t^2$

Une sol. $y = z + ky_0$ de (a) vérifie $y(0) = 0$

$$\Leftrightarrow z(0) + k y_0(0) = 0 \Leftrightarrow 0 + k \times 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

Donc z est la seule sol. de (a) vérifiant la
Cond. de Cauchy.

Pb. de Cauchy pour (b): $z: I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $t \mapsto t(t-1)$, $t \mapsto t e^{-t}$

Une sol. $y = z + ky_0$ de (b) vérifie $y(1) = \frac{0}{2}$

$$\Leftrightarrow z(1) + k y_0(1) = \frac{0}{2} \Leftrightarrow 0 + k e^{-1} = \frac{0}{2} \Leftrightarrow k = 0.$$

Donc z est la seule sol. de (b) vérifiant la cond.
de Cauchy

$$z + 2e y_0 \rightarrow y(1) = 2$$

Pb. de Cauchy pour (a) : $y(1) = 3$,

16

Une sol. $y = z + ky_0$ de (a) vérifie $y(1) = 3$

$$\Leftrightarrow z(1) + ky_0(1) = 3 \Leftrightarrow 0 + k e^{-1} = 3$$

$$\Leftrightarrow k = 3e.$$

Donc $z + 3e y_0$ est la seule sol. de (a)
qui vérifie la cond. de Cauchy.

(c) : à chercher

Eq. diff. du 2nd ordre.

On étudie les eq. du type :

$$(e) \quad y'' + ay' + by = c(t) \quad \text{sur } I$$

où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $c: I \rightarrow \mathbb{R}$ est conti.

c est le second membre, y'' la dérivée seconde
de l'inconnue y ,

Le cours donne une méthode de résolution :

L'ensemble $\mathcal{S}$ des sol. de (e) est donné par :

$$\mathcal{S} = \{ z + y; y \in \mathcal{S}_0 \}$$

où z est une sol. de (e) et $\mathcal{S}_0$ l'ens. des sol.

$$\text{de } y'' + ay' + by = 0 \quad \text{sur } I,$$

Le cours dit que $\mathcal{Y}_0$ est un sous-esp. vect. de $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ de dim. 2.

Pour trouver une base de $\mathcal{Y}_0$, on utilise une éq. auxiliaire : $z^2 + az + b = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Lorsque cette éq. a 2 sol. réelles $r_1 \neq r_2$,

$$y_1 : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto e^{r_1 t} \quad \quad \quad t \mapsto e^{r_2 t}$$

forment une base de $\mathcal{Y}_0$.

Lorsque cette éq. a une sol. réelle r ,

$$y_1 : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto e^{rt} \quad \quad \quad t \mapsto t e^{rt}$$

forment une base de $\mathcal{Y}_0$.

Lorsque cette éq. a 2 sol. complexes irrélles c'est forcément r et $\bar{r}$ avec $r \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et

$$y_1 : I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto e^{\operatorname{Re}(r)t} \cos(\operatorname{Im}(r)t) \quad \quad \quad t \mapsto e^{\operatorname{Re}(r)t} \sin(\operatorname{Im}(r)t)$$

forment une base de $\mathcal{Y}_0$.