Interrogation B02 du 13 février 2007 (35 min.).

Les documents et calculettes sont interdits. On rappelle que, dans un exercice, on peut répondre à une question en utilisant les résultats précédents même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. On rappelle aussi que toute réponse doit être justifiée, sauf mention contraire explicite.
Interrogation notée sur 10. Barème indicatif : 4 pts, 2 pts, 2 pts, 2,5 pts.

Avertissement : On pourra utiliser sans démonstration le fait que la fonction logarithme népérien ln est dérivable en 1 de dérivée 1, c'est-à-dire que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} \;=\; 1\,, \qquad (A1)$$

et le fait que

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)/x \;=\; 0\,. \qquad (A2)$$

Exercice 1. :

Questions de cours. Les énoncés suivants sont-ils des résultats directement impliqués par un résultat du cours. Répondre par oui ou par non, sans justification.

1- Toute suite convergente est majorée.

2- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout n, $u_n \leq v_n$. On a alors : $\lim u_n \leq \lim v_n$.

3- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls et telle que $\lim u_n = 0$. Alors la suite $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et tend vers $+\infty$.

4- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim u_n = 4$ et $\lim v_n = +\infty$. Alors la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 2. : Vrai ou faux ? Justifier toute réponse.

1- Le produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'une suite bornée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une suite convergente $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

2- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n \;=\; \frac{\exp\Big(\sum_{k=0}^{2n}(k^3 - 13k + 1)\Big)}{n^3 + 8n^2 + 1}\,,$$

où exp désigne la fonction exponentielle. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1.

Tourner SVP.

Exercice 3. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe telle que, pour tout $n>0$, $|u_n| = (\ln n)/n$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, où

$$2\pi\mathbb{Z} \;=\; \{2\pi k;\, k\in\mathbb{Z}\}\,.$$

1- Montrer que la suite $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

2- Montrer que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

3- La suite $(u_n e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

Exercice 4. : Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout n, $u_n = (1+a/n)^n$.

1- Montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\geq N$, $u_n>0$.

2- Montrer qu'elle converge vers e^a.

Correction de l'interrogation B02 du 13 février 2007.

Exercice 1 (4 pts) :

1- Oui.

2- Non.

3- Non.

4- Oui.

Exercice 2 (2 pts) :

1-. Faux. La suite $((-1)^n)_n$ est bornée mais n'a pas de limite (cf. cours). La suite $(1)_n$ converge vers 1. Mais la suite produit $(1 \cdot (-1)^n)_n$ n'a pas de limite.
Remarque : le produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0 est une suite convergeant vers 0.
2-. Faux. La suite $(u_n)_n$ est à termes positifs. Si elle converge, alors sa limite ℓ est positive, par passage à la limite dans les inégalités précédentes. Donc ℓ ne peut être égale à -1.
Remarque : on a pu répondre à la question sans savoir si la suite converge. On peut montrer que $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.

Exercice 3 (2 pts) :
1-. Soit $k = E(\theta/(2\pi))$ et $\theta_0 = \theta - 2k\pi$. On a $\theta_0 \in [0; 2\pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{in\theta} = e^{in\theta_0}$. Dans le cours, on a vu que $(e^{in\theta_0})_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
On peut aussi redémontrer le résultat du cours. Supposons que $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ ait une limite ℓ. Comme la suite est bornée, $\ell \in \mathbb{C}$. Pour tout n,

$$e^{i(n+1)\theta} \;=\; e^{in\theta} \cdot e^{i\theta}$$

Comme la sous-suite $(e^{i(n+1)\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers ℓ, on a, par produit, $\ell = \ell \cdot e^{i\theta}$. D'où $\ell = 0$ car $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $||e^{in\theta}| - |\ell|| \leq |e^{in\theta} - \ell| \to 0$, $|\ell| = 1$, contradiction.
2-. Comme $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$, on déduit de (A2), par le cours, que $\lim_{n\to\infty}(\ln n)/n = 0$.
3- On montre que la suite $(u_n e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|u_n e^{in\theta}\right| \;=\; |u_n|\,,$$

qui tend vers 0 par le 2. Par le cours, $(u_n e^{in\theta})_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

Exercice 4 (2,5 pts) :
1- Comme $\lim 1/n = 0$, $\lim a/n = 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour $n \geq N$, $|a/n| < 1$.

Donc, pour $n \geq N$, $a/n > -1$ soit $1 + a/n > 0$ et $u_n > 0$.
2- On suppose $a \neq 0$. Soit $n \geq N$. On a

$$u_n \;=\; \exp\Big(n \ln(1+a/n)\Big) \;=\; \exp\left(\frac{\ln(1+a/n) - \ln 1}{1/n}\right) .$$

Comme $\lim a/n = 0$, on déduit de (A1), par le cours, que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a/n) - \ln 1}{a/n} \;=\; 1 .$$

Donc

$$\frac{\ln(1+a/n) - \ln 1}{1/n} = a \cdot \frac{\ln(1+a/n) - \ln 1}{a/n}$$

tend vers a, lorsque n tend vers l'infini. Comme la fonction exponentielle est continue en a, on en déduit, par le cours, que $\lim_{n\to\infty} u_n$ existe et vaut $\exp(a)$.
Lorsque $a = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à 1 donc converge vers $1 = \exp(0) = \exp(a)$.

Interrogation B02 du 17 avril 2007 (35 min.).

Les documents et calculettes sont interdits. On rappelle que, dans un exercice, on peut répondre à une question en utilisant les résultats précédents même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. On rappelle aussi que toute réponse doit être justifiée, sauf mention contraire explicite.
Interrogation notée sur 10. Barème indicatif : 4 pts, 1,5 pts, 2,5 pts, 2,5 pts.

Exercice 1. :

Questions de cours.

1− Donner la définition de la phrase : "La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.".

2− Les énoncés suivants sont-ils des résultats directement impliqués par un résultat du cours. Répondre par oui ou par non, sans justification.

a- Toute suite bornée est convergente.

b- Il existe une constante K telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int^x \exp(t^2)\, dt \; = \; \exp(x^2) \; + \; K \, ,$$

où exp désigne la fonction exponentielle.

c- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow I$ continue. La suite récurrence $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, est bien définie. Si le réel $\ell \in I$ est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 2. : Vrai ou faux ? Justifier toute réponse.

1- Soit $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = g'(x)$. Alors il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = g(x) + K$.

2- Il existe une constante K telle que, pour tout $x \in]-\infty; -2[$,

$$\int^x \frac{1}{(t-1)(t+2)}\, dt \; = \; \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \; + \; K \, .$$

Tourner SVP.

Exercice 3. : On rappelle que les fonctions ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\operatorname{ch} x \;=\; \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} x \;=\; \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,.$$

1- Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + \operatorname{ch} t > 0$.
En particulier, les primitives

$$\int^x \frac{\operatorname{sh} t}{1 + \operatorname{ch} t}\, dt \qquad \text{et} \qquad \int^x \frac{\operatorname{ch} t}{1 + \operatorname{ch} t}\, dt$$

sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer les primitives précédentes.
Indication : écrire

$$\frac{\operatorname{ch} t}{1 + \operatorname{ch} t} \;=\; \frac{\operatorname{ch} t + 1 - 1}{1 + \operatorname{ch} t} \;=\; 1 \;-\; \frac{1}{1 + \operatorname{ch} t}\,.$$

Exercice 4. : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n \;=\; \sup_{m \geq n} u_m \;=\; \sup\{u_m\,;\, m \in \mathbb{N}\,,\, m \geq n\}\,.$$

1- Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
Sa limite est par définition la limite supérieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\limsup_{n\to\infty} u_n$.

2- Que vaut $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n$? Que vaut $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n/(n+1)$?

Correction de l'interrogation B02 du 17 avril 2007.

Exercice 1 (4 pts) :
Pour la première question, voir le cours.

2-a. Non.

2-b. Non.

2-c. Oui.

Exercice 2 (1,5 pts) :

1 Faux. Soit f la fonction nulle et g définie par $g(x) = -1$ si $x < 0$ et par $g(x) = 1$ si $x > 0$. Pour $x \neq 0$, on a bien $g'(x) = 0 = f'(x)$. S'il existait une constante K telle que, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = g(x) + K$, on aurait $0 = f(-1) = g(-1) + K = -1 + K$ soit $K = 1$ et $0 = f(1) = g(1) + K = 1 + K$ soit $K = -1$. Contradiction.

2 Vrai.
Première justification : Il existe deux réels a, b tels que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, on ait

$$f(t) \ := \ \frac{1}{(t-1)(t+2)} \ = \ \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+2} \ ,$$

par décomposition en élément simple. On sait que $a = \lim_{t\to 1}(t-1)f(t)$ et $b = \lim_{t\to -2}(t+2)f(t)$. On a $(t-1)f(t) = 1/(t+2) \to 1/3$ quand $t \to 1$ et $(t+2)f(t) = 1/(t-1) \to -1/3$ quand $t \to -2$. Donc $a = 1/3$ et $b = -1/3$. Il existe une constante K telle que, pour $x \in]-\infty; -2[$,

$$\begin{aligned} \int^x \frac{1}{(t-1)(t+2)}\, dt &= a\Big[\ln|t-1|\Big]^x + b\Big[\ln|t+2|\Big]^x \\ &= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + K \\ &= \frac{1}{3}\ln\Big(\frac{x-1}{x+2}\Big) + K \ , \end{aligned}$$

car $x - 1 < 0$ et $x + 2 < 0$ donc $(x+1)/(x+2) > 0$.
Deuxième justification : Pour $x \in]-\infty; -2[$, $x - 1 < 0$ et $x + 2 < 0$ donc $(x+1)/(x+2) > 0$. La fonction $f :]-\infty; -2[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) \ = \ \frac{1}{3}\ln\Big(\frac{x-1}{x+2}\Big)$$

est bien définie, dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1 \cdot (x+2) - (x-1) \cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{3}{x+2} \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+2)} \,. \end{aligned}$$

Donc le résultat annoncé est vrai.

Exercice 3 (2,5 pts) :

1- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t > 0$, $e^{-t} > 0$ donc $\mathrm{ch}\, t = (e^t + e^{-t})/2 > 0$ et $1 + \mathrm{ch}\, t > 0$.

2- Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \mathrm{ch}\, t$. Elle est dérivable, $\varphi'(t) = \mathrm{sh}\, t$ et sa dérivée est continue. On a

$$\int^x \frac{\mathrm{sh}\, t}{1 + \mathrm{ch}\, t}\, dt \;=\; \int^x \frac{\varphi'(t)}{1 + \varphi(t)}\, dt \;=\; \int^{\varphi(x)} \frac{du}{1+u} \,,$$

d'après la formule de changement de variable (et on intègre là où $u > 0$). Il existe donc une constante K telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int^x \frac{\mathrm{sh}\, t}{1 + \mathrm{ch}\, t}\, dt \;=\; \Big[\ln(1+u)\Big]^{\varphi(x)} \;=\; \ln\Big(1 + \mathrm{ch}\, x\Big) \;+\; K \,.$$

D'après l'indication, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{ch}\, t}{1 + \mathrm{ch}\, t} &= 1 - \frac{1}{1 + (e^t + e^{-t})/2} \;=\; 1 - \frac{2}{2 + e^t + e^{-t}} \\ &= 1 - \frac{2e^t}{e^{2t} + 2e^t + 1} \;=\; 1 - \frac{2e^t}{(e^t+1)^2} \,. \end{aligned}$$

Par la formule de changement de variable ($u = e^t$),

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\mathrm{ch}\, t}{1 + \mathrm{ch}\, t}\, dt &= x - 2\int^{e^x} \frac{1}{(u+1)^2}\, du \\ &= x - 2\Big[-\frac{1}{u+1}\Big]^{e^x} \;=\; x + \frac{2}{e^x+1} + K \,, \end{aligned}$$

pour une certaine constante K.

Exercice 4 (2,5 pts) :

1- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de v_n, v_n majore l'ensemble $\{u_m \,;\, m \in \mathbb{N} \,,\, m \geq n\}$ donc aussi l'ensemble $\{u_m \,;\, m \in \mathbb{N} \,,\, m \geq n+1\}$ qui est inclu dans le précédent. Comme v_{n+1} est par définition le plus petit majorant de $\{u_m \,;\, m \in \mathbb{N},\, m \geq n+1\}$, $v_{n+1} \leq v_n$. Ceci étant vrai pour tout n, la suite $(v_n)_n$ est décroissante.
Par hypothèse sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout n, $-M \leq u_n \leq M$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de v_n, $v_n \geq u_n$. Donc $v_n \geq -M$. La suite $(v_n)_n$ est donc minorée. Par le cours, elle converge puisqu'elle est décroissante.

2- Soit $u_n = (-1)^n$, pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\{u_m \,;\, m \in \mathbb{N} \,,\, m \geq n\} = \{-1; 1\}$. Comme 1 est un majorant de cet ensemble et 1 appartient à cet ensemble, c'est la borne supérieure. Donc $v_n = 1$. La suite $(v_n)_n$ est constante égale à 1 donc converge vers 1. D'où $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$.
Soit $u_n = (-1)^n/(n+1)$, pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $m \geq n$ et m impair, $u_m \leq 0 \leq 1/(n+1)$. Pour $m \geq n$ et m pair, $u_m = 1/(m+1) \leq 1/(n+1)$. Donc $1/(n+1)$ majore l'ensemble $\{u_m \,;\, m \in \mathbb{N} \,,\, m \geq n\}$ et, par définition de v_n, $v_n \leq 1/(n+1)$. D'autre part, $v_n \geq 0$ car $\{u_m \,;\, m \in \mathbb{N} \,,\, m \geq n\}$ contient toujours un nombre positif (qui est donc majoré par v_n). Comme $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, sa sous-suite $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ aussi et, par le théorème des gendarmes, $(v_n)_n$ converge vers 0. D'où $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n/(n+1) = 0$.

Deux preuves du cours B02.

Proposition 1. : Associativité. Si $(n_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers telle que $n_0 = 0$ et de limite $+\infty$, les séries positives de terme général $a_m \geq 0$ et $\sigma_m = \sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n$ ont même somme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=n_m}^{n_{m+1}-1} a_n \right) \quad \text{in } \overline{\mathbb{R}_+}, \quad (a_n \geq 0)\,.$$

Preuve : Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{m=0}^{N} \sigma_m \ = \ \sum_{n=0}^{n_{N+1}-1} a_n$$

Comme $lim_{N\to\infty}(n_{N+1} - 1) = \infty$ et

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{p} a_n \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ ,$$

on a le résultat cherché par composition de limite. □

Proposition 2. : Commutativité. Si p est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ (permutation de $\mathbb{N}$), alors les séries positives de terme général $a_n \geq 0$ et $a_{p(n)}$ ont même somme.

Preuve : Soit p est une permutation de $\mathbb{N}$. Il existe deux applications $M : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $L : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\{p(n), 0 \leq n \leq N\} \subset \{0, \ldots, M(N)\} \subset \{p(n), 0 \leq n \leq L(N)\} \ ,$$

avec $\lim_{N\to\infty} M(N) = +\infty$ et $\lim_{N\to\infty} L(N) = +\infty$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{N} a_{p(n)} \leq \sum_{n=0}^{M(N)} a_n \leq \sum_{n=0}^{L(N)} a_{p(n)}\,.$$

Par composition de limite, le terme de droite tend vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)}$ et le terme du centre tend vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, quand $N \to \infty$. Comme le terme de gauche tend vers $\sum_{n=0}^{\infty} a_{p(n)}$, on a l'égalité cherchée par le théorème des gendarmes. □

Examen B02 du 9 mai (2h).

Les documents et calculettes sont interdits. On rappelle que, dans un exercice, on peut répondre à une question en utilisant les résultats précédents même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. On rappelle aussi que toute réponse doit être justifiée, sauf mention contraire explicite.
Barème indicatif : 2 pts, 3,5 pts, 6,5 pts, 8 pts, 2 pts.

Exercice 1. : Questions de cours.

1− Donner la définition de la phrase : "La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ.".

2− Soit $f, F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Donner la définition de la phrase : "F est une primitive de f.".

Exercice 2. : Soit a un réel strictement positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (a+n)^{-2}$.

1- Montrer que

$$I \ := \ \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{(a+t)^2}\, dt$$

existe et vaut $1/a$. (Ind. : calculer la primitive).

2- Montrer que la série $\Sigma_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et que sa somme S appartient à l'intervalle $[1/a\,;\,1/a + 1/a^2]$.

Exercice 3. : Pour tout $y > 0$, on pose $f(y) = \int_0^1 F(t)dt$ où

$$\forall t \in [0;1]\ ,\ F(t) \ = \ \frac{1+yt}{(t+y)(1+t^2)}\ . \tag{1}$$

La fonction f est bien définie car le dénominateur de F ne s'annule pas pour $t \in [0;1]$.

1- Soit $y > 0$ fixé. La décomposition en élément simple de F est, pour certains réels a, α, β,

$$F(t) \ = \ \frac{a}{t+y} \ + \ \frac{\alpha t + \beta}{1+t^2}\ . \tag{2}$$

a) Montrer que $a = \frac{1-y^2}{1+y^2}$, $\alpha = \frac{y^2-1}{1+y^2}$ et $\beta = \frac{2y}{1+y^2}$.

b) Montrer que

$$f(y) \ = \ \frac{1}{1+y^2}\Big((1-y^2)\ln(1+1/y) \ + \ (y^2-1)\frac{\ln 2}{2} \ + \ y\frac{\pi}{2}\Big)\ . \tag{3}$$

On pourra utiliser le fait que Arctan$1 = \pi/4$.

2- Montrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

3- Calculer l'intégrale

$$J \;:=\; \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt\,. \tag{4}$$

4- A-t-on

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1+nt}{(t+n)(1+t^2)}\,dt \;=\; \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+nt}{(t+n)(1+t^2)}\right)dt\,? \tag{5}$$

Exercice 4. : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit

$$I_n \;=\; \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n\,dt\,. \tag{6}$$

On pourra aussi noter $(\sin t)^n$ par $\sin^n t$.

1)- En effectuant des intégrations par parties en partant de I_{n+2}, établir une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

2)- Montrer que $I_0=\pi/2$ et $I_1=1$.

3)- Montrer par récurrence les formules

$$I_{2p} \;=\; \frac{\prod_{k=1}^p 2k-1}{\prod_{k=1}^p 2k}\cdot\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{(2p-1)\cdot(2p-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2p)\cdot(2p-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}\,, \tag{7}$$

$$I_{2p+1} \;=\; \frac{\prod_{k=1}^p 2k}{\prod_{k=1}^p 2k+1}\cdot 1 \;=\; \frac{(2p)\cdot(2p-2)\cdots 4\cdot 2}{(2p+1)\cdot(2p-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}\cdot 1\,, \tag{8}$$

valables pour tout $p\in\mathbb{N}$.

4)- Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et à termes strictement positifs. (Ind. : utiliser (6)).

5)- En déduire que $\lim_{n\to\infty} I_{n+1}/I_n = 1$.

6)- Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n=\pi/2$. (Ind. : utiliser (7) et (8)).

7)- Montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n\sqrt{2n/\pi}=1$. (On pourra utiliser le fait que la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$).

Exercice 5. : Montrer que, pour tout $a\in\mathbb{R}$, la suite $(a^n/(n!))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Correction de l'examen B02 du 9 mai 2007.

Exercice 1 (2 pts) :

1-. (1 pt)

$$\forall \epsilon > 0\,, \exists N \in \mathbb{N}\,; \forall n \in \mathbb{N}\,, \Big(n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon\Big)\,.$$

2-. (1 pt) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est f.

Exercice 2 (3,5 pts) :

1-. (1 pt) Pour tout $x > 0$, on a

$$F(x) \;:=\; \int_0^x \frac{dt}{(a+t)^2} \;=\; \left[\frac{-1}{a+t}\right]_0^x \;=\; \frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}\,.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}(x+a) = +\infty$, on en déduit, par les opérations sur les limites, que $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe et vaut $1/a$.

2-. (2,5 pts) Soit $f\,:\,[0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (a+t)^{-2}$. La fonction f est dérivable et $f'(t) = -2(a+t)^{-3} \leq 0$. Donc elle est continue et décroissante. De plus, pour tout $t \geq 0$, $f(t) \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = u_n$. Donc, par le cours, la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ a une limite dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\leq\; I \;\leq\; \sum_{n=0}^{\infty} u_n\,.$$

D'après 1)-, I est finie donc l'inégalité de gauche montre que $\sum u_n$ converge. De plus, on a $S - u_0 \leq I \leq S$, c'est-à-dire $1/a = I \leq S \leq I + u_0 = I + 1/a^2 = 1/a + 1/a^2$.
Remarque : On peut aussi montrer directement que f est décroissante en montrant que $f(t) - f(s) \geq 0$ si $t \geq s \geq 0$.

Exercice 3 (6,5 pts) :

1-a). (1,5 pts) Comme on l'a vu dans le cours,

$$a \;=\; \lim_{t\to -y}(t+y)F(t) \qquad \text{et} \qquad \alpha i + \beta \;=\; \lim_{t\to i}(1+t^2)F(t)\,,$$

ce qui se retrouve en utilisant la formule (2) de l'énoncé. Par la formule (1) de l'énoncé et les opérations sur les limites,

$$a \;=\; \frac{1 - y\cdot y}{1+y^2} \qquad \text{et} \qquad \alpha i + \beta \;=\; \frac{1+iy}{i+y}\,.$$

On a donc

$$\alpha i + \beta \;=\; \frac{(1+iy)(y-i)}{|i+y|^2} \;=\; \frac{2y + i(y^2-1)}{1+y^2}\,,$$

soit $\alpha = \frac{y^2-1}{1+y^2}$ et $\beta = \frac{2y}{1+y^2}$.
Remarque : On peut procéder différemment. On sait que les coefficients a, α et β sont uniques. Il suffit donc de vérifier l'égalité (2) de l'énoncé pour les valeurs de a, α et β données dans l'énoncé. On a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{t+y} + \frac{\alpha t+\beta}{1+t^2} &= \frac{1}{1+y^2}\Big(\frac{1-y^2}{t+y} + \frac{(y^2-1)t+2y}{1+t^2}\Big) \\
&= \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1}{(t+y)(1+t^2)}\Big((1-y^2)(1+t^2) + (t+y)((y^2-1)t+2y)\Big) \\
&= \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1}{(t+y)(1+t^2)}\Big(1-y^2+2yt+y(y^2-1)t+2y)\Big) \\
&= \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1}{(t+y)(1+t^2)}\Big(1+y^2+yt+y^3t\Big) \\
&= \frac{1}{1+y^2}\cdot\frac{1}{(t+y)(1+t^2)}\cdot(1+yt)(1+y^2) \\
&= \frac{1+yt}{(t+y)(1+t^2)} \;=\; F(t)\,.
\end{aligned}$$

1-b). (2 pts) On a

$$f(y) \;=\; a\int_0^1 \frac{dt}{t+y} + \alpha\int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2} + \beta\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\,.$$

On calcule les trois intégrales. On a

$$\int_0^1 \frac{dt}{t+y} \;=\; \Big[\ln(t+y)\Big]_0^1 \;=\; \ln(1+y) - \ln y \;=\; \ln(1+1/y)\,,$$

$$J \;:=\; \int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2tdt}{1+t^2} \;=\; \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\varphi'(t)dt}{\varphi(t)}\,,$$

où $\varphi(t) = 1+t^2 > 0$. Donc

$$J \;=\; \frac{1}{2}\Big[\ln\varphi(t)\Big]_0^1 \;=\; \frac{1}{2}\Big(\ln\varphi(1) - \ln\varphi(0)\Big) \;=\; \frac{\ln 2}{2}\,.$$

Enfin,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \;=\; \Big[\mathrm{Arctan}\, t\Big]_0^1 = \mathrm{Arctan}1 - 0 = \frac{\pi}{4}\,.$$

En regroupant, on obtient

$$\begin{aligned}
f(y) &= a\ln(1+1/y) + \alpha\cdot\frac{\ln 2}{2} + \beta\cdot\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{1}{1+y^2}\Big((1-y^2)\cdot\ln(1+1/y) + (y^2-1)\cdot\frac{\ln 2}{2} + 2y\cdot\frac{\pi}{4}\Big)\,,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule (3) de l'énoncé.

2-. (1 pt) On a

$$\frac{1-n^2}{n^2+1} \;=\; -\frac{1-1/n^2}{1+1/n^2} \quad \text{et} \quad \frac{n}{n^2+1} \;=\; \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+1/n^2}\,.$$

Comme $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, $(1/n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi par produit et $(\ln(1+1/n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi car ln est continue en 1. De plus, par les opérations sur les limites,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n^2+1} \;=\; -1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} \;=\; 0\,.$$

On en déduit par (3) que $(f(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $-1\cdot 0+1\cdot(\ln 2)/2+0=(\ln 2)/2$.

3-. (1 pt) L'intégrale a été calculée en 1-b) et vaut $(\ln 2)/2$.

4-. (1 pt) Le terme de gauche dans la formule (5) est

$$\lim_{n\to\infty} f(n) \;=\; \frac{\ln 2}{2}$$

d'après 2-. Pour $t\in[0,1]$ fixé, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\frac{1+nt}{(t+n)(1+t^2)} \;=\; \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{t+1/n}{1+t/n}\,.$$

Comme $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0, on en déduit, par les opérations sur les limites, que

$$\frac{1+nt}{(t+n)(1+t^2)} \qquad \text{tend vers} \qquad \frac{t}{1+t^2} \qquad \text{quand} \qquad n\to\infty\,.$$

Donc le terme de droite dans la formule (5) est J, qui vaut $(\ln 2)/2$ par 3-. La formule (5) est donc vraie.

Exercice 4 (8 pts) :

1)- (1 pt) Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/2}(-\cos t)'\cdot(\sin t)^{n+1}\,dt \\
&= \Big[-\cos t\cdot(\sin t)^{n+1}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}(-\cos t)\cdot(n+1)\sin^n t\cdot\cos t\,dt \\
&= (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot\cos^2 t\,dt \;=\; (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^n t\cdot(1-\sin^2 t)\,dt \\
&= (n+1)I_n \;-\; (n+1)I_{n+2}\,.
\end{aligned}$$

Donc $(n+1)I_n=(n+2)I_{n+2}$.

2)- (1 pt) On a

$$I_0 \;=\; \int_0^{\pi/2} 1\,dt \;=\; [t]_0^{\pi/2} \;=\; \pi/2\,, \qquad I_1 \;=\; \int_0^{\pi/2} \sin t\,dt \;=\; [-\cos t]_0^{\pi/2} \;=\; 1\,.$$

3)- (1,5 pts) Par convention,

$$\frac{\prod_{k=1}^{0} 2k-1}{\prod_{k=1}^{0} 2k}\cdot\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{\pi}{2} \;=\; I_0\,, \qquad \frac{\prod_{k=1}^{p} 2k}{\prod_{k=1}^{p} 2k+1}\cdot 1 \;=\; 1 \;=\; I_1\,.$$

Supposons les formules (7) et (8) vraies au rang $p \in \mathbb{N}$. Par 1)- pour $n = 2p$, on a

$$I_{2p+2} \;=\; \frac{2p+1}{2p+2} I_{2p} \;=\; \frac{2p+1}{2p+2}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{p} 2k-1}{\prod_{k=1}^{p} 2k}\cdot\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{\prod_{k=1}^{p+1} 2k-1}{\prod_{k=1}^{p+1} 2k}\cdot\frac{\pi}{2}\,,$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Par 1)- pour $n = 2p+1$ et l'hypothèse de récurrence, on a

$$I_{2p+3} \;=\; \frac{2p+2}{2p+3} I_{2p+1} \;=\; \frac{2p+2}{2p+3}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{p} 2k}{\prod_{k=1}^{p} 2k+1}\cdot 1 \;=\; \frac{\prod_{k=1}^{p+1} 2k}{\prod_{k=1}^{p+1} 2k+1}\cdot 1\,.$$

Les formules (7) et (8) sont héréditaires. Par le théorème de récurrence, elles sont vraies pour tout $p \in \mathbb{N}$.

4)- (1,5 pts) Pour $t \in [0;\pi/2]$, $0 \le \sin t \le 1$ donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le \sin^{n+1} t \le \sin^n t$. La fonction $t \mapsto \sin^n t - \sin^{n+1} t$ étant positive sur $[0;\pi/2]$, son intégrale sur $[0;\pi/2]$ est positive et donc $I_{n+1} \le I_n$. Comme la fonction $t \mapsto \sin^n t$ est positive et continue sur $[0;\pi/2]$ et n'est pas la fonction nulle, son intégrale sur $[0;\pi/2]$ est strictement positive par le cours. Donc, $I_n > 0$, pour tout n.

5)- (1 pt) Comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} \le I_{n+1} \le I_n$. Comme les termes sont strictement positifs et en utilisant 1)-, on a donc

$$\frac{n+1}{n+2} \;=\; \frac{I_{n+2}}{I_n} \;\le\; \frac{I_{n+1}}{I_n} \;\le\; 1\,.$$

Comme $(n+1)/(n+2) = (1+1/n)(1+2/n)^{-1}$, ce terme tend vers 1 quand $n \to \infty$. Par le théorème de gendarmes, $\lim_{n\to\infty} I_{n+1}/I_n$ existe et vaut 1.

6)- (1 pt) Pour $n = 2p$, on a, par (7),

$$\begin{aligned}(n+1)I_{n+1}I_n \;&=\; (2p+1)\cdot\frac{\prod_{k=1}^{p} 2k}{\prod_{k=1}^{p} 2k+1}\cdot 1\cdot\frac{\prod_{k=1}^{p} 2k-1}{\prod_{k=1}^{p} 2k}\cdot\frac{\pi}{2}\\ &=\; (2p+1)\cdot\frac{\prod_{\ell=1}^{p-1} 2\ell+1}{(2p+1)\prod_{k=1}^{p-1} 2k+1}\cdot\frac{\pi}{2} \;=\; \frac{\pi}{2}\,.\end{aligned}$$

De même, pour $n = 2p+1$, on a, par (8),

$$(n+1)I_{n+1}I_n \;=\; (2p+2)\cdot\frac{\prod_{k=1}^{p+1} 2k-1}{\prod_{k=1}^{p+1} 2k}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\prod_{k=1}^{p} 2k}{\prod_{k=1}^{p} 2k+1}\cdot 1 \;=\; \frac{\pi}{2}\,.$$

7)- (1 pt) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n^2 \cdot \frac{2n}{\pi} = (n+1)I_{n+1}I_n \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{I_n}{I_{n+1}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{I_n}{I_{n+1}} ,$$

d'après 6)-. Comme $n/(n+1) = 1/(1+1/n)$ tend vers 1, comme I_n/I_{n+1} tend vers 1 par 5)-, on en déduit que $(I_n\sqrt{2n/\pi})^2$ tend vers 1. Comme la fonction racine carrée est continue en 1, $\lim_{n\to\infty} I_n\sqrt{2n/\pi} = \sqrt{1} = 1$.

Exercice 5 (2 pts) :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a^n/(n!))_{n\in\mathbb{N}}$. Pour $a = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Supposons maintenant que $|a| > 0$. Comme

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a|}{n+1}$$

tend vers $0 < 1$, le test de D'Alembert permet d'affirmer que la série $\sum u_n$ converge absolument (c'est la série de l'exponentielle vue en cours !). Par le cours, $\sum u_n$ converge aussi et donc son terme général doit tendre vers 0. On a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Remarque : On peut procéder autrement dans le cas $a \neq 0$.
Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $N = E(a) + 1$ (où $E(t)$ désigne la partie entière du réel t). Pour $n \geq N$, on a $(n+1) \geq |a|$ donc

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a|}{n+1} \leq 1 .$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante à partir du rang N. Comme elle est positive, elle est minorée. Par le cours, elle converge vers un certain réel ℓ. Comme la suite $(v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge aussi vers ℓ. Or, pour tout $n > 0$, $v_{n+1} = v_n \cdot \frac{|a|}{n+1}$. En passant à la limite dans ces égalités, on trouve que $\ell = \ell \cdot 0$. Donc $\ell = 0$.

Examen B02 S4 du 14 juin 2007 (2h).

Les documents, téléphones et calculettes sont interdits. On rappelle que, dans un exercice, on peut répondre à une question en utilisant les résultats précédents même si ceux-ci n'ont pas été démontrés. On rappelle aussi que toute réponse doit être justifiée, sauf mention contraire explicite.
Barème indicatif : 5 pts, 5,5 pts, 4 pts, 6,5 pts.

Exercice 1. : Questions de cours.

1− Donner la définition d'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2− Donner la définition de la phrase : "La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.".

3− Donner la définition de la phrase : "La série réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument.".

4− Montrer que, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série à termes positifs, alors la suite de ses sommes partielles $(S_N)_N$ a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.
On rappelle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N \ = \ \sum_{n=0}^{N} u_n \ .$$

5− Donner une primitive sur $]-\infty;0[$ de la fonction $f\ :]-\infty;0[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 1/x$.

Exercice 2. : On considère les fonctions $F_1, F_2 :]-\infty;2[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$F_1(y) \ = \ \frac{1}{(y-2)(1+y^2)} \quad \text{et} \quad F_2(y) \ = \ \frac{y^2}{(y-2)(1+y^2)} \ .$$

Les décompositions en éléments simples de F_1 et F_2 sont, pour certains réels $a_1, \alpha_1, \beta_1, a_2, \alpha_2, \beta_2$,

$$F_1(y) \ = \ \frac{a_1}{y-2} + \frac{\alpha_1 y + \beta_1}{1+y^2} \quad \text{et} \quad F_2(y) \ = \ \frac{a_2}{y-2} + \frac{\alpha_2 y + \beta_2}{1+y^2} \ .$$

1- Montrer que $a_1 = 1/5$, $\alpha_1 = -1/5$ et $\beta_1 = -2/5$.

2- Montrer que $a_2 = 4/5$, $\alpha_2 = 1/5$ et $\beta_2 = 2/5$.
(Ind. : remarquer que $F_1 + F_2$ est un élément simple).

3- Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) \ = \ \frac{\cos^3 t}{(\sin t \ - \ 2)(\sin^2 t \ + \ 1)} \ .$$

(On rappelle que $\cos^3 t = (\cos t)^3$ et $\sin^2 t = (\sin t)^2$).

3-a) Montrer que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

3-b) En utilisant un changement de variable approprié, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad \int^{x} f(t)\,dt \;=\; \int^{\sin x} \Big(F_1(y) - F_2(y)\Big)\,dy\,. \tag{1}$$

3-c) En déduire une expression de $\int^x f(t)\,dt$.

Exercice 3. : Étudier la convergence des séries de termes général donnés par, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \;=\; (-1)^n \cdot \frac{\ln(n^2+3) \;+\; (2+\sin n)n}{3n - \sqrt{n+1}}\,, \qquad v_n \;=\; \frac{\ln n}{n!}\,, \qquad w_n \;=\; e^{-\sqrt{n}}(n+2)^n\,.$$

Exercice 4. : Soit $a < b$ deux réels et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 (f est donc deux fois dérivable sur $[a;b]$ et sa dérivée seconde y est continue). En particulier, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [a;b]\,, \qquad m \leq f''(x) \leq M\,. \tag{2}$$

1- Soit α, β deux réels tels que $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$. Montrer que

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \;=\; \frac{\beta-\alpha}{2}\Big(f(\alpha)+f(\beta)\Big) \;+\; \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(\alpha-t)(\beta-t)\,dt\,. \tag{3}$$

(Ind. : on pourra intégrer par parties la dernière intégrale).

2- En déduire l'encadrement

$$M\frac{(\alpha-\beta)^3}{6} \;\leq\; \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \;-\; \frac{\beta-\alpha}{2}\Big(f(\alpha)+f(\beta)\Big) \;\leq\; m\frac{(\alpha-\beta)^3}{6}\,. \tag{4}$$

3- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{0;1;2;\cdots;n\}$, on pose $x_k = a + k(b-a)/n$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \;-\; \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \right| \;\leq\; \frac{C}{n^2}\,. \tag{5}$$

4- Montrer que $\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2})$ existe et vaut Arctan1, c'est-à-dire $\pi/4$.

Correction de l'examen B02 S4 du 14 juin 2007.

La correction proposée est très détaillée afin que le lecteur puisse se faire une idée précise des arguments utilisés. Lors de la correction des copies, les points ont souvent été mis pour des réponses moins complètes.

Exercice 1 (5 pts) :

1- (1 pt). Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $n \in \mathbb{N}$ associe le réel u_n.

2- (1 pt).
$$\forall M > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,;\ \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \Big(n \geq N \Longrightarrow u_n < -M\Big)\,.$$

3- (1 pt). La série réelle $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.

4- (1 pt). Pour tout N, $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$, puisque la série est à termes positifs. Donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante. Par le cours sur les suites, elle admet un limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.

5- (1 pt). La fonction $F :]-\infty; 0[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \ln(-x)$ est dérivable comme composée des fonctions dérivables

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-\infty; 0[& \longrightarrow &]0; +\infty[\\ x & \longmapsto & -x \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc}]0; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

et, pour tout $x < 0$, $F'(x) = f_2'(f_1(x))f_1'(x) = (1/f_1(x))(-1) = 1/x$. F est donc une primitive de f sur $]-\infty; 0[$.

Exercice 2 (6,5 pts) :

1- (1 pt). D'après le cours,

$$a_1 \;=\; \lim_{y\to 2}(y-2)F_1(y) \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 i + \beta_1 \;=\; \lim_{y\to i}(1+y^2)F_1(y)\,.$$

Comme $(y-2)F_1(y) = 1/(1+y^2) \to 1/5$ quand $y \to 2$, $a_1 = 1/5$. Comme $(1 + y^2)F_1(y) = 1/(y-2) \to 1/(i-2)$ quand $y \to i$,

$$\alpha_1 i + \beta_1 \;=\; \frac{1}{i-2} \;=\; \frac{-i-2}{1+2^2} \;=\; \frac{-i-2}{5}$$

donc $\alpha_1 = -1/5$ et $\beta_1 = -2/5$.
Autre méthode : On sait que la décomposition en éléments simples est unique donc il suffit de vérifier que, pour $y < 2$,

$$F_1(y) = \frac{a_1}{y-2} + \frac{\alpha_1 y + \beta_1}{1+y^2}$$

lorsque $a_1 = 1/5$, $\alpha_1 = -1/5$ et $\beta_1 = -2/5$. Pour $y < 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{y-2} + \frac{\alpha_1 y + \beta_1}{1+y^2} &= \frac{a_1 + a_1 y^2 + \alpha_1 y^2 + \beta_1 y - 2\alpha_1 y - 2\beta_1}{(y-2)(1+y^2)} \\ &= \frac{(a_1+\alpha_1)y^2 + (\beta_1 - 2\alpha_1)y + a_1 - 2\beta_1}{(y-2)(1+y^2)} \\ &= \frac{1/5 \ + \ 4/5}{(y-2)(1+y^2)} \ = \ F_1(y) \ . \end{aligned}$$

2- (0,5 pt). Soit $y < 2$. Comme $F_1(y) + F_2(y) = 1/(y-2)$, on a

$$F_2(y) = \frac{1}{y-2} - \frac{a_1}{y-2} - \frac{\alpha_1 y + \beta_1}{1+y^2} = \frac{4/5}{y-2} + \frac{(1/5)y + (2/5)}{1+y^2} \ .$$

Par unicité, c'est la décomposition en éléments simples de F_2.

3-a) (1 pt). Comme, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin t| \leq 1$, $\sin t - 2 < 0$. Le dénominateur de f ne s'annule donc jamais. Comme sinus et cosinus sont contines, f l'est aussi. Elle admet donc des primitives.

3-b) (1 pt). Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ définie par $\varphi(t) = \sin t$. φ est dérivable et $\varphi'(t) = \cos t$. De plus, $\cos^2 t = 1 - \varphi(t)^2$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int^x f(t)\, dt = \int^x \frac{1-\varphi(t)^2}{(\varphi(t)-2)(1+\varphi(t)^2)} \cdot \varphi'(t)\, dt \ .$$

Par la formule de changement de variable,

$$\int^x f(t)\, dt = \int^{\varphi(x)} \frac{1-y^2}{(y-2)(1+y^2)} = \int^{\sin x} \Big(F_1(y) - F_2(y)\Big)\, dy \ .$$

3-c) (3 pts). On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int^x f(t)\, dt = (a_1 - a_2) \int^{\sin x} \frac{dy}{y-2} + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2} \int^{\sin x} \frac{2y dy}{1+y^2} + (\beta_1 - \beta_2) \int^{\sin x} \frac{dy}{1+y^2} .$$

On calcule maintenant les trois primitives de droite. Il existe des constantes k_1, k_2, k_3 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int^{\sin x} \frac{dy}{y-2} &= [\ln(2-y)]^{\sin x} = \ln(2 - \sin x) \ + \ k_1 \ , \\ \int^{\sin x} \frac{2y dy}{1+y^2} &= [\ln(1+y^2)]^{\sin x} = \ln(1 + \sin^2 t) \ + \ k_2 \ , \\ \int^{\sin x} \frac{dy}{1+y^2} &= [\mathrm{Arctan}\,(1+y^2)]^{\sin x} = \mathrm{Arctan}\,(1 + \sin^2 t) \ + \ k_3 \ . \end{aligned}$$

Exercice 3 (4 pts) :

Pour tout $n \neq 0$,

$$u_n \; = \; (-1)^n \cdot \frac{(1/n)\ln(n^2+3) \; + \; 2 + \sin n}{2 - \sqrt{1/n + 1/n^2}}$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est continue et $\lim 1/n = 0$, $\lim \sqrt{1/n + 1/n^2} = 0$. Comme

$$\frac{\ln(n^2+3)}{n} \; = \; \frac{\ln\Big(n^2(1+3/n^2)\Big)}{n} \; = \; \frac{\ln n^2}{n} + \frac{\ln(1+3/n^2)}{n} \; = \; 2\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln(1+3/n^2)}{n} \, .$$

Comme ln est continue en 1 et $\lim 3/n^2 = 0$, $\lim(1/n)\ln(1+3/n^2) = 0$. Comme $(\ln n)/n$ tend vers 0, $\lim(1/n)\ln(n^2+3) = 0$. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, on ait : $\sqrt{1/n + 1/n^2} \leq 1$ et $|(1/n)\ln(n^2+3)| \leq 1/2$. Donc, pour $n \geq N$, $2 - \sqrt{1/n + 1/n^2} \geq 1$ et $\sin n \geq -1$ donc

$$|u_n| \; \geq \; \frac{-1/2 \; + \; 2 \; - \; 1}{1} \; = \; \frac{1}{2} >> \; 0 \, .$$

Donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. Il en est de même de $(u_n)_n$. Donc la série de terme général u_n diverge grossièrement. (1 pt).

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à termes positifs. On utilise le critère de D'Alembert. On a, pour $n > 1$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \; = \; \frac{\ln(n+1)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\ln n} \; = \; \frac{\ln(n(1+1/n))}{(n+1)\ln n} \; = \; \frac{1}{n+1} + \frac{\ln(1+1/n)}{(n+1)\ln n} \, .$$

Comme ln est continue en 1, $\ln(1+1/n)$ tend vers 0. Comme $1/(n+1)$ et $1/\ln n$ tendent aussi vers 0, v_{n+1}/v_n tend vers $0 < 1$. Par le critère de D'Alembert, la série $\sum v_n$ converge. (1,5 pts).

$(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à termes positifs. On utilise le critère de Cauchy. On a, pour $n > 0$,

$$w_n^{1/n} \; = \; e^{-1/\sqrt{n}} \cdot (n+2) \, .$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est continue et $\lim 1/n = 0$, $1/\sqrt{n}$ tend vers 0. Comme l'exponentielle est continue en 0, $e^{-1/\sqrt{n}}$ tend vers $e^0 = 1$. Comme $(n+2)$ tend vers $+\infty$, $w_n^{1/n}$ tend vers $+\infty$. Par le critère de Cauchy, $\sum w_n$ diverge. (1,5 pts).

Rq. : on peut montrer ce dernier résultat autrement. On a, pour $n > 0$,

$$w_n \; = \; \exp\Big(n\ln(n+2) - \sqrt{n}\Big) \; = \; e^n \cdot \exp\Big(\ln(n+2) - 1/\sqrt{n}\Big) \, .$$

Comme précédemment, on montre que $1/\sqrt{n}$ tend vers 0, $\ln(n+2)$ tend vers $+\infty$. Comme l'exponentielle tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on en déduit que w_n tend $+\infty$. La série diverge donc grossièrement.

Exercice 4 (6,5 pts) :

1- On a, en faisant deux intégrations par parties successives,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(\alpha-t)(\beta-t)\,dt &= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (f'(t))'(\alpha-t)(\beta-t)\,dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[f'(t)(\alpha-t)(\beta-t)\Big]_\alpha^\beta - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'(t)\Big((\alpha-t)(\beta-t)\Big)'\,dt \\
&= 0 - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f'(t)(-\alpha-\beta+2t)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\Big[f(t)(-\alpha-\beta+2t)\Big]_\alpha^\beta + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(t)\cdot 2\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\Big(f(\beta)(\beta-\alpha) - f(\alpha)(\alpha-\beta)\Big) + \int_\alpha^\beta f(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\Big(f(\beta)+f(\alpha)\Big) + \int_\alpha^\beta f(t)\,dt\,,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien la formule (3). (2 pts).

2- **La formule (4) est incorrecte. Il faut remplacer les 6 par des 12. Ce changement n'affecte pas la suite de l'exercice.**
Soit $t \in [\alpha;\beta]$. En particulier, $t \in [a;b]$ donc $m \le f''(t) \le M$ par (2). Comme $(\alpha-t)(\beta-t) \le 0$, on en déduit que

$$\frac{M}{2}(\alpha-t)(\beta-t) \;\le\; \frac{1}{2}f''(t)(\alpha-t)(\beta-t) \;\le\; \frac{m}{2}(\alpha-t)(\beta-t)\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $t \in [\alpha;\beta]$, on a, par le cours

$$\frac{M}{2}\int_\alpha^\beta (\alpha-t)(\beta-t)\,dt \;\le\; \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f''(t)(\alpha-t)(\beta-t)\,dt \;\le\; \frac{m}{2}\int_\alpha^\beta (\alpha-t)(\beta-t)\,dt\,.$$

Or, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (\alpha-t)(\beta-t)\,dt &= \left[\frac{(\alpha-t)^2}{-2}(\beta-t)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \frac{(\alpha-t)^2}{-2}\cdot(-1)\,dt \\
&= 0 - \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (\alpha-t)^2\,dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha-t)^3}{-3}\right]_\alpha^\beta = \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}\,.
\end{aligned}$$

En reportant ceci dans l'inégalité précédente et en utilisant (3), on obtient (4). (2 pts).

Remarque : on peut aussi faire le dernier calcul de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta (\alpha - t)(\beta - t)\, dt &= \int_\alpha^\beta \Big(\alpha\beta - (\alpha+\beta)t + t^2\Big)\, dt \\
&= \alpha\beta\, [t]_\alpha^\beta \;-\; (\alpha+\beta)\left[\frac{t^2}{2}\right]_\alpha^\beta \;+\; \left[\frac{t^3}{3}\right]_\alpha^\beta \\
&= \alpha\beta(\beta-\alpha) \;-\; \frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2) \;+\; \frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3) \\
&= \frac{(\beta-\alpha)}{6}\Big(6\alpha\beta \;-\; 3(\alpha+\beta)^2 \;+\; 2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)\Big) \\
&= \frac{(\beta-\alpha)}{6}\Big(-\beta^2 + 2\beta\alpha - \alpha^2\Big) \\
&= -\frac{(\beta-\alpha)}{6}\cdot(\beta-\alpha)^2 \;=\; \frac{(\alpha-\beta)^3}{6}\,.
\end{aligned}
$$

3- Soit $k \in \{0;\cdots;n-1\}$. On applique la formule (4) pour $\alpha = x_k$ et $\beta = x_{k+1}$. On remarque que $(x_k - x_{k+1})^3 = (b-a)^3/n^3$. On somme ces inégalités sur k (il y en a n) et on obtient

$$
-\frac{M}{12}\cdot n\cdot\frac{(b-a)^3}{n^3} \;\leq\; \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} \;\leq\; -\frac{m}{12}\cdot n\cdot\frac{(b-a)^3}{n^3}.
$$

En utilisant la relation de Chasles, on voit que

$$
\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt \;=\; \int_a^b f(t)\, dt\,.
$$

En prenant $C \geq \max(|M|(b-a)^3/12; |m|(b-a)^3/12)$, l'inégalité précédente implique l'inégalité (5) cherchée. (1,5 pts).

4- (1 pt). Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$
S_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2}\,.
$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1/(1+t^2)$. On sait qu'elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer les résultats précédents pour $a = 0$ et $b = 1$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$
\left|\int_0^1 f(t)\, dt \;-\; \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right| \;\leq\; \frac{C}{n^2}\,. \tag{6}
$$

On a

$$
\int_0^1 f(t)\, dt \;=\; \Big[\mathrm{Arctan} t\Big]_0^1 \;=\; \mathrm{Arctan} 1 \;=\; \frac{\pi}{4}\,. \tag{7}
$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2} &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+k^2/n^2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(k+1)^2/n^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+(k+1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n^2+k^2} + \sum_{\ell=1}^{n}\frac{n}{n^2+\ell^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(S_n + S_n - \frac{n}{n^2+0^2} + \frac{n}{n^2+n^2}\right) = S_n - \frac{1}{4n}\,.
\end{aligned}$$

Comme $\lim 1/n^2 = 0$, l'estimation (6) et le théorème des gendarmes impliquent que la suite $(S_n - 1/(4n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\pi/4$, d'après (7). Comme $\lim 1/4n = 0$, $\lim S_n = \pi/4$, par somme.