Annexe :

Preuves des Th. 1, Th. 2 et Th. 2'.

Th 1. est un cas particulier du Th. 2 : prendre $\mathfrak{F}$ un ens. à 1 élé : $\{f\}$ et $\psi : f \mapsto b$. $\varphi(f; \cdot)$ convient.

Th. 2 est un cas particulier du Th. 2'

Il suffit de prendre

$$\underset{\uparrow \text{ du Th. 2'}}{g(f ; \bullet)} = \underset{\uparrow \text{ du Th. 2}}{g}.$$

Preuve du Th. 2' :

1). Unicité. Soit φ_1, φ_2 vérifiant les prop. du Th. 2'.

Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}(n) = (\forall f \in \mathfrak{F}, \ \varphi_1(f; n) = \varphi_2(f; n))$.

Comme, pour tout $f \in \mathfrak{F}$, $\varphi_1(f; 0) = \psi(f) = \varphi_2(f; 0)$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie. Pour $f \in \mathfrak{F}$,

$$\varphi_1(f; S(n)) \underset{(2)}{=} g(f ; \varphi_1(f; n)) \overset{HR}{=} g(f, \varphi_2(f; n)) = \varphi_2(f, S(n)).$$

Donc $\mathcal{P}(S(n))$ est vraie. Par le Th. de récu., $\varphi_1 = \varphi_2$.

2). Existence. Soit $f \in \mathfrak{F}$.

Soit
$$h_f : \mathbb{N} \times E \longrightarrow \mathbb{N} \times E$$
$$(n ; e) \longmapsto (S(n) ; g(f; e)).$$

Soit $\mathcal{H}_f = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times E) ; h(A) \subset A \text{ et } (0 ; \psi(f)) \in A\}$.

Soit $G_f = \bigcap_{A \in \mathcal{H}_f} A$.

On montre que G_f est le graphe d'une appl. $\varphi_f : \mathbb{N} \to E$ vérifiant $\varphi_f(0) = \psi(f)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi_f(S(n)) = g(f; \varphi_f(n))$.

L'appl.
$$\varphi : \mathfrak{F} \times \mathbb{N} \to E$$
$$(f ; n) \mapsto \varphi_f(n)$$
convient.

a). Soit $B_f = \{(0; \psi(f))\} \cup h_f(G_f)$. Par déf. de G_f, $h(G_f) \subset G_f$ et $(0 ; \psi(f)) \in G_f$ donc $h_f(B_f) \subset B_f$. D'où $B_f \in \mathcal{H}_f$.

En particulier, $G_f \subset B_f$. Comme $h(G_f) \subset G_f$ et $(0;\psi(f)) \in G_f$, $B_f \subset G_f$. D'où $B_f = G_f$.

b). On montre que $pr_1(G_f) = \mathbb{N}$. Comme $(0;\psi(f)) \in G_f$, $0 \in pr_1(G_f)$. Soit $x \in pr_1(G_f)$. Il existe donc $y \in E$ t.q. $(x;y) \in G_f$. Pour tout $A \in \mathcal{H}_f$, $(x;y) \in A$ et $h_f(A) \subset A$ donc $(S(x); g(f;y)) = h(x;y) \in A$. D'où $(S(x); g(f;y)) \in G_f$. D'où $S(x) \in pr_1(G)$. Par (PIII), $pr_1(G_f) = \mathbb{N}$.

c). On montre que G_f est un graphe fonctionnel.

Soit $\mathcal{U}_f = \{x \in \mathbb{N};\ G_f^x = \{y \in E ; (x;y) \in G_f\}$ est un singleton$\}$.

- Soit $c \in G_f^0$ ($\ni \psi(f)$). Donc $(0;c) \in G_f = B_f$. Comme $0 \notin \operatorname{Im} S$, $(0;c) \notin h(G_f)$ d'où $(0;c) = (0;\psi(f))$ et $c = \psi(f)$ et $G_f^0 = \{\psi(f)\}$ et $0 \in \mathcal{U}_f$.
- Soit $x \in \mathcal{U}_f$. On sait par b) que $G_f^{S(x)} \neq \emptyset$.

Soit $y_1, y_2 \in G_f^{S(x)} = B_f^{S(x)}$. Comme $S(x) \neq 0$, $(S(x); y_i) \in h_f(G_f)$ pour $i \in \{1;2\}$. D'où, pour $i \in \{1;2\}$, il existe $(x_i'; y_i') \in \mathbb{N} \times E$ t.q. $(S(x); y_i) = h_f(x_i', y_i') = (S(x_i'), g(f; y_i'))$ et $(x_i'; y_i') \in G_f$.

Comme S est injective, $x = x_1' = x_2'$. D'où, pour $i \in \{1;2\}$, $y_i' \in G_f^x$. Comme $x \in \mathcal{U}_f$, $y_1' = y_2'$. Donc $y_1 = y_2$ et $S(x) \in \mathcal{U}_f$. $(*)$

- Par (PIII), $\mathcal{U}_f = \mathbb{N}$. Donc G_f est un graphe fonct.

d). Soit $\varphi_f : \mathbb{N} \to E$ de graphe G_f. Comme $G_f^0 = \{\psi(f)\}$, $\varphi_f(0) = \psi(f)$. Pour $x \in \mathbb{N}$, $G_f^{S(x)} \underset{(*)}{=} \{g(f; \varphi_f(x))\}$.

D'où $\varphi_f(S(x)) = g(f; \varphi_f(x))$. $\square$.