Annexe 2 : Suites adjacentes.

Prop. : Soit $a, b : D \to \mathbb{R}$ t.q.

(1) $a \nearrow$ et $b \searrow$ (on dit que a et b sont adjacentes).

(2) $\lim (b_n - a_n) = 0$.

Alors il existe $l \in \mathbb{R}$ t.q. $l = \lim a_n = \lim b_n$.

De plus,

$$\forall n \in D, \quad a_n \leq l \leq b_n. \; (*)$$

Preuve : On montre

$$\forall p \in D, \quad a_p \leq b_p. \quad (**)$$

Supposons qu'il existe $p \in D$; $a_p > b_p$.

Comme $a \nearrow$ et $b \searrow$, on a, pour tout $n \in D$ avec $n \geq p$,

$$a_n \geq a_p > b_p \geq b_n.$$

Donc $a_n - b_n \geq a_p - b_p > 0$. Comme $\lim (a_n - b_n) = 0$, on a, par passage à la limite dans les inégalités (Th. 22),

$$0 \geq a_p - b_p > 0. \text{ Contr.}$$

Donc $(**)$ est vraie.

Soit $d = \min D$. Comme $a \nearrow$ et $b \searrow$, on déduit de $(*)$ que a est majorée par b_d et b est minorée par a_d. Par le Th. 24, $l_1 := \lim a$ et $l_2 = \lim b$ existent dans $\mathbb{R}$. Comme, pour $n \in D$, $b_n = (b_n - a_n) + a_n$ on a $l_2 = 0 + l_1$. Comme $l_1 = \sup a$ et $l_2 = \inf b$, $(*)$ est vraie. $\square$