Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Master MEEF 1, Math +.

Complément : fonctions plates.

Exercice 38. : On considère la fonction g définie par

$$\begin{array}{cccll} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^{-1/x} \quad \text{si}\, x > 0\,, \\ & & & & 0 \quad \text{si}\, x \leq 0\,. \end{array}$$

On admet le résultat suivant, dont on peut trouver une preuve dans le cours "MA4" accessible sur ma page personnelle

$$\text{“} \quad http://jecko.u-cergy.fr/enseignement.html \quad \text{''}\,.$$

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $l_n := \lim_{x \to a} f^{(n)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (avec $f^{(0)} = f$ et, pour $n \geq 1$, $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f). Alors f admet un prolongement par continuité F en a, F est une fonction de classe C^∞ sur I et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(a) = l_n$.

1. Montrer que g est de classe C^∞ sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynôme P_n, dont on précisera le degré, telle que
$$\forall x > 0\,, \quad g^{(n)}(x) \;=\; P_n\big(1/x\big) \cdot g(x)\,.$$
3. En déduire que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, que vaut $g^{(n)}(0)$?
4. Vérifier que g et g' sont positives, i.e., pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$ et $g'(x) \geq 0$.
5. Montrer les équivalences
$$\Big(\big(g(x) \;>\; 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \;>\; 0\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\big(g'(x) \;>\; 0\big) \Longleftrightarrow \quad \big(x \;>\; 0\big)\Big)\,.$$
6. Montrer que g et la fonction nulle ont, à tout ordre, le même développement de Taylor en 0.

Exercice 39. : On considère la fonction g de l'exercice 38 et on pourra utiliser sans démonstration les résultats de l'exercice 38. On définit deux nouvelles fonctions h_1 et h_2 sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\,, \quad h_1(x) \;=\; g\big(x^2 - 1\big) \quad \text{et} \quad h_2(x) \;=\; g\big(4 - x^2\big)\,.$$

1. Étude de h_1 et h_2.
   (a) Montrer que h_1 et h_2 sont des fonctions C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Vérifier qu'elles sont positives : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) \geq 0$ et $h_2(x) \geq 0$.

(c) Établir les deux équivalences suivantes, pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\big(h_1(x) &= 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \in [-1;1]\big) \,, \\ \big(h_2(x) &= 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \notin]-2;2[\big) \,.\end{aligned}$$

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_1(x) + h_2(x) > 0$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \,, \quad f(x) \; = \; \frac{h_2(x)}{h_2(x) + h_1(x)} \,.$$

(a) Vérifier que f est bien définie et est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f(x) \leq 1$.

(c) Montrer, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équivalence

$$\big(f(x) \; = \; 0\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x \notin]-2;2[\big) \,.$$

(d) Quelle est l'image réciproque $f^{-1}(1)$ de $\{1\}$ par f ?

(e) Montrer que f est strictement croissante sur $[-2;-1]$ et strictement décroissante sur $[1;2]$. (Indication : on pourra exprimer la dérivée de f en fonction de g et g'.)

3. Étant donnés $a > b \geq 0$, donner (sans justification) une fonction F, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]-a;a[$, valant 1 sur $[-b;b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq F(x) \leq 1$.

4. Étant donnés $a > b \geq 0$ et $c \in \mathbb{R}$, donner (sans justification) une fonction G, C^∞ sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors de $]c-a;c+a[$, valant 1 sur $[c-b;c+b]$ et vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq G(x) \leq 1$.