Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Master MEEF 1, Math +.

Ensembles de nombres.

Exercice 1. : Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations d'inconnues n données par

1. $n + 3 = 5$;
2. $n + 5 = 3$;
3. $n + a = b$, où a et b sont des entiers naturels fixés ;
4. $n - 3 = 5$.

Exercice 2. : A-t-on, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{(3^n)} = \left(2^3\right)^n \,?$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$? Justifier toute réponse.

Exercice 3. : Montrer les propriétés suivantes en n'utilisant seulement les résultats du cours jusqu'au Théorème 3 inclu.

1. Pour tout $(p;q;r) \in \mathbb{N}^3$, $(p + r = q + r) \Longrightarrow (p = q)$.
2. Pour tout $(p;q) \in \mathbb{N}^2$, $(p + q = 0) \Longrightarrow (p = 0)$.
3. Pour tout $(p;q) \in \mathbb{N}^2$, $(p + q = 0) \Longrightarrow (p = 0 \quad \text{et} \quad q = 0)$.

Exercice 4. : Pour $(m;n) \in \mathbb{N}^2$, montrer, en n'utilisant que les propriétés de $\mathbb{N}$, que

$$(mn = 1) \iff \big((m = 1) \text{ et } (n = 1)\big) .$$

Exercice 5. : On rappelle que la suite "factorielle n", notée $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$, est la suite récurrente donnée par $0! = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! = (n!) \times (n+1)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geq p$ et $n_0! \geq p^{n_0}$. Montrer que, pour $n \geq n_0$, $n! \geq p^n$.
2. Vérifier que, si $n_0 = p^p$, alors $n_0! \geq p^{n_0}$.
3. On suppose $p \geq 2$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p^n \geq n$.

Exercice 6. : Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations d'inconnues n données par

1. $n + 3 = -5$;
2. $2n - 5 = 3$;
3. $2n - 4 = 3$;
4. $an = b$, où a et b sont des entiers relatifs fixés.

Exercice 7. : Pour $n \in \mathbb{Z}$, on définit la valeur absolue $|n|$ de n par $|n| = \max(-n;n) \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que, pour tout $(m;n) \in \mathbb{Z}^2$, $|mn| = |m| \times |n|$.

2. Montrer que les seuls éléments inversibles de $\mathbb{Z}$ sont -1 et 1.

Exercice 8. : Vrai ou faux ? Justifier toute réponse.

1. Tout entier naturel est différent de son successeur.
2. Il existe une suite strictement décroissante d'entiers naturels.
3. Il existe une suite décroissante d'entiers naturels.
4. Pour $(a;b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, a/b est bien défini dans $\mathbb{N}$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est 0.
5. La suite récurrente $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ donné par $u(0) = 16$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n+1) = \sqrt{u(n)}$, est bien définie.

Exercice 9. : Avec les notations du cours, montrer que $\mathbb{Z} = J(\mathbb{N}) \cup (-J(\mathbb{N}^*))$ et $J(\mathbb{N}) \cap (-J(\mathbb{N}^*)) = \emptyset$. On a posé :

$$\big(-J(\mathbb{N}^*)\big) \;=\; \big\{-a; a \in J(\mathbb{N}^*)\big\}\,.$$

Exercice 10. : Montrer les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned}
\forall(a;b;c) \in \mathbb{Z}^3\,,\ \big(a+c \leq b+c \iff a \leq b\big)\,.\\
\forall(a;b;c) \in \mathbb{Z}^2 \times J(\mathbb{N}^*)\,,\ \big(ac \leq bc \iff a \leq b\big)\,.\\
\forall(a;b) \in \mathbb{Z}^2\,,\ \big(a \leq b \iff -b \leq -a\big)\,.
\end{aligned}$$

Exercice 11. : Soit $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $|x+y| \leq |x| + |y|$. Montrer que $|x+y| = |x| + |y|$ si et seulement si

$$\Big(\big(x \in J(N)\big) \quad \text{et} \quad \big(y \in J(N)\big)\Big) \quad \text{ou} \quad \Big(\big(x \in -J(N)\big) \quad \text{et} \quad \big(y \in -J(N)\big)\Big)\,.$$

Exercice 12. : Résoudre dans $\mathbb{Q}$ les équations d'inconnues n données par

1. $2n - 5 = 3$;
2. $2n - 4 = 3$.

Exercice 13. : Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de rationnels donnée par $u_0 = 3/2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (1/2)(u_n + 2/u_n)$. Soit $f : \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = (1/2)(x + 2/x)$. Dans tout l'exercice, les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $f([1;2]) \subset [1;2]$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in [1;2]$.
2. Vérifier que f n'a pas de point fixe.
3. Montrer que, pour $(x;y) \in [1;2]^2$, $|1 - 2(xy)^{-1}| \leq 1$. En déduire que, pour $(x;y) \in [1;2]^2$, $|f(x) - f(y)| \leq 2^{-1}|x - y|$.
4. Montrer que, pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$, $|u_{n+p} - u_n| \leq 2^{-n}|u_p - u_0|$.
5. En déduire que u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$. (On pourra utiliser l'exercice 5.)

Remarque : En définissant la limite d'une suite de rationnels comme dans $\mathbb{R}$, on montrerait que, si u avait une limite $\ell \in \mathbb{Q}$ alors, nécessairement, on aurait $f(\ell) = \ell$. Donc, par 2., u n'a pas de limite dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 14. : Soit $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de rationnels donnée par $v_0 = 4/3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (2/3)(u_n + u_n^{-1})$. Soit $g : \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $g(x) = (2/3)(x + 1/x)$. Dans tout l'exercice, les intervalles sont des intervalles de $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $g([4/3; 3/2]) \subset [4/3; 3/2]$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est bien défini et que $v_n \in [4/3; 3/2]$.
2. Vérifier que g n'a pas de point fixe.
3. Montrer que, pour $(x; y) \in [4/3; 3/2]^2$, $g(x) - g(y)$ est du signe de $x - y$. En déduire que g est croissante sur $[4/3; 3/2]$.
4. Montrer que la suite v est croissante.

Remarque : Soit $V = \{v_n; n \in \mathbb{N}\}$. Par 1., $V \subset [4/3; 3/2]$. Si V admettait une borne supérieur $\ell \in \mathbb{Q}$ alors on pourrait montrer que ℓ serait en fait la limite de v et, d'après la relation de récurrence, que $g(\ell) = \ell$. Par 2., V n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 15. : Montrer, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, donnée par $x^2 = 2$, a une unique solution positive. Cette solution est notée $\sqrt{2}$. Montrer que $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$.

Exercice 16. : Montrer que les suites u et v des exercices 13 et 14 convergent dans $\mathbb{R}$ vers un réel $\ell \geq 0$ vérifiant $\ell^2 = 2$.
Remarque : par l'exercice 15, $\ell = \sqrt{2}$.

Exercice 17. : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ données par

1. $7x + 3 = 0$;
2. $x^2 = -3$;
3. $(x^2 - 4x + 3)(x - 1)^{-1} = 4x - 6$;
4. $(x^2 - 4x + 3)(x - 1)^{-1} = -x + 1$.

Exercice 18. : Une partie non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si la proposition suivante est vérifiée par la partie I :

$$\forall (x; y) \in I^2 ;\ x < y\ ,\ [x; y]\ \subset\ I\ .$$

Ici $[x; y] = \{z \in \mathbb{R}; x \leq z \leq y\}$. On note par $\sup I$ (resp. $\inf I$) la borne supérieure (resp. inférieure) de I. On rappelle que $\sup I \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $\inf I \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Par convention, on décide que, pour $a \in \mathbb{R}$, $a \leq +\infty$ et $-\infty \leq a$ (en fait $a < +\infty$ et $-\infty < a$). On convient aussi que $-\infty \leq +\infty$ (en fait $-\infty < +\infty$).
On va montrer que, nécessairement, I est d'un des types suivants : $]\inf I; \sup I[$, $[\inf I; \sup I[$, $]\inf I; \sup I]$, $[\inf I; \sup I]$.

1. Vérifier que, pour $(a; b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ avec $a \leq b$. $]a; b[$, $]a; b]$, $[a; b[$ et $[a; b]$ sont des intervalles (quand ils sont non vides).

2. Soit I un intervalle tel que, pour tout $x \in I$, la proposition $(\inf I < x < \sup I)$ soit fausse. Montrer que I a un seul élément. On dit que I est un singleton.
3. Soit I un intervalle ayant au moins deux éléments. Montrer qu'il existe $x \in I$ tel que $\inf I < x < \sup I$. Montrer qu'il existe $(y; z) \in I^2$ tel que $y < x < z$. En déduire $]\inf I; \sup I[\subset I$.
4. Conclure que I vaut $]\inf I; \sup I[$ ou $[\inf I; \sup I[$ ou $]\inf I; \sup I]$ ou $[\inf I; \sup I]$.