**Université de Cergy-Pontoise** **2016-2017**
**Master MEEF 1, Math +.**

# Suites réelles et complexes.

**Exercice 20. :** Soit $c \in \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Montrer que la suite constante égale à $c$ converge vers $c$. Montrer que $\lim n = +\infty$. En déduire que $\lim(1/n) = 0$. Que peut-on dire de la limite de

$$u_n \;=\; \frac{n^3+7n+9}{-n^2+3n+11}\ ?$$

Montrer que la suite $v$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^{in\pi/4}$ n'a pas de limite dans $\mathbb{C}$. Que peut-on dire de la limite de la suite $w$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $w_n = v_n/n$ ?

**Exercice 21. :** Montrer qu'une suite convergente dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ est de Cauchy. Montrer qu'une suite de Cauchy est bornée.

**Exercice 22. :** Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_n \;=\; \sum_{k=0}^{n} a^k\,.$$

Montrer de deux façons différentes qu'elle est de Cauchy.

**Exercice 23. :** Soit $a \in \mathbb{N}$, $D = [\![a;\to[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $u$ est croissante si et seulement si, pour tout $n \in D$, $u_{n+1} \geq u_n$.

**Exercice 24. :** Étudier la nature des suites $u$, $v$, $w$, $x$, $y$ et $z$ données par

$$u_n \;=\; \frac{3-4n^2+6n^3}{-2n^3+5n^2-n-1}\,,\quad v_n \;=\; \frac{\sin n}{n} - \ln(n)\,,\quad w_n \;=\; \frac{e^{in}}{n} + \frac{3n}{n+2}\,,$$

$$x_n \;=\; n - \ln(n)\,,\quad y_n \;=\; \big(1+3/n\big)^n\,,\quad z_n \;=\; e^{-n}(n^4+1)\,.$$

**Exercice 25. :** Soit $a \in \mathbb{C}$ et $N = E(|a|)+1$. Montrer que la suite $(|a|^n/n!)_{n\geq N}$ est décroissante. En déduire que $(a^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Retrouver ce dernier résultat en utilisant la série définissant l'exponentielle.

**Exercice 26. :** Vrai ou faux ? Justifier toute réponse.

1. La suite $(3^{-n} + 7\cdot 2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. La suite $(3^n - 5\cdot 2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. Une suite croissante de réels converge.
4. Une suite minorée par 1 converge vers un $\ell \geq 1$.
5. Une suite convergente est de Cauchy.
6. Une suite convergente $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est stationnaire.
7. Les suites $u$ et $v$ données par $u_n = 3/n$ et $v_n = (n^2+1)(n^3+n+2)^{-1}$ sont équivalentes.
8. $\cos n = o(n)$.

**Exercice 27. :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $\ell$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers un certain $\ell'$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $\ell = \ell'$ et préciser sa limite. Que se passe-t-il si $\ell \neq \ell'$ ?

**Exercice 28. :** Soit $b > a > 0$. Étudier l'existence et, dans ce cas, déterminer la valeur de la limite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par

$$u_n = \sqrt[n]{\left|\frac{2+(-1)^n}{n+1}\right|}\,,\ v_n = \sqrt[n]{\left|3+\frac{2}{n+1}+(-1)^n\right|}\,,\ w_n = \sqrt[n]{|a^{n+1}|}\,,$$

$$x_n = \sqrt[n]{|(-a)^n + b^n|}\,,\ y_n = \sqrt[n]{|2+(-1)^n|^{n+1}}\,,\ z_n = \sqrt[n]{|n!|}\,.$$

**Exercice 29. :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle ou complexe convergeant vers un certain $\ell$. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, sa moyenne de Césaro, par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\,. \tag{1}$$

Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.