Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Master MEEF 1, Math +.

Séries à termes positifs.

Exercice 31. : Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} 1\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^{-3/2}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^{3/2}}\,,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\big(1+3n^{-2}\big)\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n!}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{3^n}{n!}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-\sqrt{n}}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \big(\ln(n+1)-\ln n\big)^n\,,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2+(-1)^n}{n+1}\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \big((-2)^n\ +\ 3^n\big)\,,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \ln\Big(\frac{n^{7/2}+5n^{5/2}+7n}{\sqrt{n}(n^3+2n^2+1)}\Big)\,.$$

Exercice 32. : Montrer la finitude et calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\,,\ \sum_{n=1}^{\infty} n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\,.$$

Exercice 33. : Soit $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 2$ (la base) et $C_b = \{0;1;\cdots;b-1\}$ (l'ensemble des chiffres). Soit S l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in C_b$. Soit $f : S \longrightarrow [0;1]$ définie par

$$f(a)\ =\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}\,. \qquad (2)$$

1. Vérifier que f est bien définie, c'est-à-dire que la série dans (2) est convergente et que sa somme appartient à $[0;1]$. Montrer que $0 \in f(S)$ et $1 \in f(S)$. Montrer que $1/b$ a deux antécédents par f. En particulier, f n'est pas injective.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $t \in S$. Montrer que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t_n}{b^n}\ \leq\ \frac{1}{b^p}\,. \qquad (3)$$

   Montrer que (3) est une égalité si et seulement si, pour $n \geq p+1$, $t_n = b-1$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $t \in S$. On suppose qu'il existe $n \geq p+1$ tel que $t_n \neq b-1$. Soit k le plus petit entier n vérifiant cette propriété. Montrer que

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{t_n}{b^n}\ \leq\ \frac{1}{b^p}\ -\ \frac{1}{b^k}\,. \qquad (4)$$

4. Soit $x \in [0;1[$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par $a_1 = E(bx)$ et, pour $k > 1$,

$$a_k \;=\; E\Big(b^k\Big(x - \sum_{n=1}^{k-1} \frac{a_n}{b^n}\Big)\Big)\,.$$

   Montrer, par récurrence sur $k \geq 1$, la propriété

$$\forall k \in \mathbb{N}^*\,,\quad \mathcal{P}(k) \;=\; \Big(a_k \in C_b \quad \text{et} \quad b^k\Big(x - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{b^n}\Big) \in [0;1[\Big)\,.$$

   En déduire que $a \in S$ et que $x = f(a)$. Montrer que f est surjective.

5. Soit $(s,t) \in S$ tel que $s \neq t$ et $f(s) = f(t)$. Soit k le premier entier $n \geq 1$ tel que $s_n \neq t_n$. On a donc $s_k \neq t_k$. Par exemple, $s_k > t_k$. Montrer que $s_k = t_k + 1$ et que, pour tout $n \geq k+1$, $s_n = 0$ et $t_n = b-1$.

6. Soit $(s,t) \in S$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour $1 \leq n < k$, $s_n = t_n$, $s_k = t_k + 1$ et que, pour tout $n \geq k+1$, $s_n = 0$ et $t_n = b-1$. Montrer que $s \neq t$ et $f(s) = f(t)$.

7. Soit S_0 le sous-ensemble de S formé des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que l'ensemble

$$A \;=\; \big\{n \in \mathbb{N}^*\,;\; a_n \,<\, b-1\big\}$$

   est infini. Montrer que $f_0 : S_0 \longrightarrow [0;1[$, définie par $f_0(a) = f(a)$, est bijective.

Tout nombre réel x appartenant à $[0;1[$ s'écrit donc $f(a)$ pour une suite $a \in S$. $f(a)$ est un développement en base b de x. Ce dernier s'écrit de manière unique comme $f(a)$ pour une suite $a \in S_0$. Dans ce cas, $f(a)$ est son développement propre en base b. Lorsque x admet deux développements en base b, x est un rationnel du type cb^{-m} avec $c, m \in \mathbb{N}^*$, et il n'en admet pas d'autre. Le développement d'un tel x associé à une suite $a \in S \setminus S_0$ est dit impropre.

Exercice 34. : On utilise l'exercice 33.

1. Montrer par récurrence et en utilisant le 4. de l'exercice 33 que la suite des chiffres du développement en base 10 de $1/3$ est $(3)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Vérifier que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

3. Retrouver le résultat du 1. en procédant de la façon suivante : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des chiffres du développement en base 10 de $1/3$. En écrivant le développement impropre en base 10 de 1 et en utilisant l'égalité $1 = 3 \cdot (1/3)$, retrouver la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $b_{2n} = 2$ et $b_{2n+1} = 3$. Montrer que le nombre x, dont $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite des chiffres de son développement en base 10, est rationnel et l'écrire sour la forme d'une fraction irréductible.