Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Master MEEF 1, Math +.

Séries réelles et complexes.

Exercice 34. : Étudier la convergence des séries de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définis par

$$u_n \;=\; \frac{e^{2in}}{n^3}\,,\quad v_n \;=\; \frac{(-1)^n \ln n}{n\sqrt{n}}\,,\quad w_n \;=\; \frac{(-1)^n}{\big(\ln(n+2)\big)^{1/2}}\,,$$

$$y_n \;=\; (-1)^n \ln\Big(3+\sin\big(n^3-4n^2+n-1\big)\Big)\,,\quad z_n \;=\; \frac{(-1)^n}{3^n-2^n}\,.$$

Exercice 35. : Soit α et β deux réels. On étudie la convergence des séries de termes généraux donnés respectivement par, pour $n\geq 2$,

$$u_n \;=\; \frac{1}{n^\alpha\big(\ln n\big)^\beta} \quad\text{et}\quad v_n \;=\; \frac{(-1)^n}{n^\alpha\big(\ln n\big)^\beta}\,.$$

Pour $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$, on dit que $(a;b)\prec(a';b')$ si $a<a'$ ou bien si $a=a'$ et $b<b'$. Il s'agit de l'ordre lexicographique sur les mots de deux lettres.
Montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $(1;1)\prec(\alpha;\beta)$. Montrer que $\sum v_n$ converge si et seulement si $(0;0)\prec(\alpha;\beta)$.

Exercice 36. : Soit $a\in\mathbb{N}$ et $D=[\![a;\to[\![$. Pour $p\geq 1$, soit ℓ^p l'ensemble des suites complexes $u=(u_n)_{n\in D}$ telles que la série $\sum_{n\in D}|u_n|^p$ converge. Soit ℓ^∞ l'ensemble des suites complexes bornées et soit c_0 l'ensemble des suites complexes $u=(u_n)_{n\in D}$ telles que $|u|$ tend vers 0.
Dans tout l'exercice, on utilise la convention selon laquelle, pour $p\geq 1$, $t^p=\exp(p\ln t)$, si $t>0$, et $0^p=0$.

1. Soit $p\geq 1$. Montrer que $\ell^p\subset c_0$. Trouver une suite u appartenant à c_0 qui n'est pas dans ℓ^p.
2. Montrer que $c_0\subset\ell^\infty$. Trouver une suite v appartenant à ℓ^∞ qui n'est pas dans c_0.
3. Soit $p\geq q\geq 1$. Montrer que $\ell^q\subset\ell^p$. Lorsque $p>q$, trouver une suite w appartenant à ℓ^p qui n'est pas dans ℓ^q.

On verra plus loin que ℓ^p, pour $p\geq 1$, ℓ^∞ et c_0 sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels normés de dimension infinie.

Exercice 37. : Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle ou complexe. On note par $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sa moyenne de Césaro définie par (1).

1. Montrer que l'implication

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \quad \text{converge}\right) \implies \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \quad \text{converge}\right)$$

est fausse. Indication : on pourra considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_n = 0$ si $n > 1$.

2. Dans cette question seulement, on suppose que u est positive. Montrer l'implication

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n \quad \text{diverge}\right) \implies \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n \quad \text{diverge}\right).$$

3. Contruire une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \;=\; (-1)^n\,.$$

Que peut-on dire de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n$? En déduire que l'implication du 2. est fausse en général.

4. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ converge et on note S sa somme. On suppose, de plus, qu'il existe $\epsilon > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k \;-\; S\right| \;\leq\; \frac{C}{n^\epsilon}\,.$$

Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \;=\; S\ln n \;+\; o(\ln n)\,.$$