Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Master MEEF 1, Math +.

Séries entières.

Exercice 54. : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} n^n z^n\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} 3^n z^n\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (3^n-5^n) z^n\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{(n^2)} z^n\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} n z^n\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\ln n) z^n\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\ln n)^7 z^n\ ,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{z^n}{n^2}\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\ln n)^4 \frac{z^n}{n^2}\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (\ln n)^5 \frac{z^n}{n!}\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} (\cos n)^3 z^n\ ,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \Big(\sin\big((2n+1)\pi/4\big)\Big)^n z^n\ .$$

Exercice 55. : Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière près de 0 et préciser le rayon de convergence de la série entière.

$$x\mapsto \exp(x^2)\ ,\ x\mapsto \exp(1-x)\ ,\ x\mapsto \exp(ix)\ ,\ x\mapsto \sin(2x)\ ,\ x\mapsto \cos(5x)\ ,$$

$$x\mapsto \ln(2+x)\ ,\ x\mapsto 1+x^3+x^7\ ,\ x\mapsto 0\ ,\ x\mapsto \sin(x)+\mathrm{ch}\,(x)\ ,\ x\mapsto \exp(x)\cos(x)\ ,$$
$$x\mapsto (1+x^2)\ln(1+x)\ ,\ x\mapsto (1-x)^{-1}\ln(1+x)\ .$$

Exercice 56. : Donner une solution développable en série entière près de 0 des équations différentielles suivantes.

$$y' = y\ ,\ y' = 2xy\ ,\ xy' = y\ ,\ x^2y' = y\ ,\ y' - xy = \frac{1}{1-x}\ ,\ yy' = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

Exercice 57. : Soit $f : [-1;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{1-x}$.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1;1[$. On note ce développement par
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\ . \tag{6}$$
2. Montrer que $c_0 > 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n < 0$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]-1;1[$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{n=1}^{N} \big|c_n x^n\big| \ \leq\ c_0 - f\big(|x|\big)\ .$$
4. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ converge absolument.
5. Montrer que la série entière (6) converge normalement sur $[-1;1]$. En déduire que, pour tout $x \in [-1;1]$,
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\ .$$