Université de Cergy-Pontoise **2016-2017**
Master MEEF 1, Math +.

Développements en série entière.

Exercice 58. : Montrer l'existence et déterminer le développement en série entière près de 0 des fonctions d'une variable réelle suivantes.

$$\cos(3x)\ ,\ \cos(x^2)\ ,\ \exp(ix)\ ,\ x^4 - 4x^3 + x - 1\ ,\ x^2\ln(1+x)\ ,\ (1-x)^{-2}\ ,\ \int_0^x \exp(t^2)\,dt\ .$$

Exercice 59. : Soit $f_1 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

1. Pour quelle valeur $a \in \mathbb{R}$ la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = f_1(x)$, si $x \neq 0$, et $f(0) = a$, est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. On suppose que la fonction f précédente est continue. Montrer qu'elle est de classe C^∞. (Indication : on pourra utiliser le développement en série entière de la fonction sinus.)

Exercice 60. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(1+x^2)$.

1. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1;1[$ et déterminer ce développement. On appelle $s = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la série entière correspondante.
2. Montrer que le rayon de convergence $R_{cv}(s)$ de s est 1.
3. Montrer que la série entière s converge pour $z = -1$ et $z = 1$. La série entière s converge-t-elle pour $z = i$?
4. Montrer que la série entière s converge uniformément sur $[-1;1]$. (Indication : on pourra utiliser la règle spéciale des séries alternées.)
5. En déduire que
$$\ln 2 \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\ .$$

Exercice 61. : On note par $\mathbb{1}$ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ constante égale à 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application construite au 2 de l'exercice 39.

1. Montrer que $\mathbb{1}$ et f ont, à tout ordre, le même développement de Taylor en 0.
2. La fonction f est-elle développable en série entière près de 0 ?
3. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(2+x)$ est-elle développable en série entière près de 0 ?