

Construction de $\mathbb{Q}$.

29

Motivation : La division (exacte) dans $\mathbb{Z}^*$ n'est pas définie partout. On souhaite construire un ens. $\mathbb{Q}$ contenant (une copie de) $\mathbb{Z}$ et dans lequel le problème a disparu.

Prop. 10 : La rel. R définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ par

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \forall (a', b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,$$

$$(a, b) R (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b,$$

(on pense au produit en croix $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$),
est une relation d'équivalence.

Preuve : exercice.

Def. 5 : $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* / R$.

On note $C(a, b)$ par $\frac{a}{b}$ (ou a/b).
les él. de $\mathbb{Q}$ sont les rationnels.

Prop. 11 : L'appl. $K : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $p \mapsto \frac{p}{1}$

est injective.

Preuve : exercice.

Ex. : $K(\mathbb{Z})$ est une copie de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$.

Th. 18, Opérations dans $\mathbb{Q}$.

30

Pour $(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $(a';b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, $bb' \neq 0_{\mathbb{Z}}$ et
la classe $\frac{ab'+a'b}{bb'}$ ne dépend pas du choix des
représentants dans $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$. Par déf., c'est
la somme des classes $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, notée $\frac{a}{b} +_{\mathbb{Q}} \frac{a'}{b'}$.
 $+_{\mathbb{Q}}$ est associative, commutative, $0_{\mathbb{Q}} = K(0_{\mathbb{Z}}) = \frac{0_{\mathbb{Z}}}{1_{\mathbb{Z}}}$
est son élé. neutre. Tout rationnel a un opposé.

Pour $(a;b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et $(a';b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$,
la classe $\frac{aa'}{bb'}$ ne dépend pas du choix des
représentants dans $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$. Par déf., c'est
le produit des classes $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$, noté $\frac{a}{b} \times_{\mathbb{Q}} \frac{a'}{b'}$.
 $\times_{\mathbb{Q}}$ est associative, commutative, distributive sur l'add. $+_{\mathbb{Q}}$,
 $1_{\mathbb{Q}} = K(1_{\mathbb{Z}}) = \frac{1_{\mathbb{Z}}}{1_{\mathbb{Z}}}$ est l'élé. neutre. De plus,
tout rationnel non nul ($\neq 0_{\mathbb{Q}}$) admet un inverse.

$(\mathbb{Q}, +_{\mathbb{Q}}, \times_{\mathbb{Q}})$ est donc un corps.

De plus, ces opérations de $\mathbb{Q}$ prolongent celles
de $\mathbb{Z}$ vue dans $K(\mathbb{Z})$.

(K est un homomorphisme d'anneaux).

Preuve: admise.

Ordre dans $\mathbb{Q}$.

31

Soit $r \in \mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0_{\mathbb{Q}}\}$.

Si $(a:b) \in r$ on dit que le signe de r est positif (resp. négatif) si $ab \in J(\mathbb{N})$ ($ab \in J(\mathbb{N})$).
Le signe de r ne dépend pas du choix du rep. dans la classe r .

Def. 6: $\mathbb{Q}^+ = \{0_{\mathbb{Q}}\} \cup \{r \in \mathbb{Q}^* ; \text{le signe de } r \text{ est positif}\}$.
 $\mathbb{Q}^- = \{r \in \mathbb{Q}^* ; \text{le signe de } r \text{ est négatif}\}$.

On dit, pour $(r,s) \in \mathbb{Q}^2$, que $r \leq s$ si $s-r \in \mathbb{Q}^+$.

Prop. 12: " $\leq$ " est une rel. d'ordre total.

Preuve: exercice.

On prolonge la Ind. 1.1 de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$.

Propriétés:

$\forall (p,q,r) \in \mathbb{Q}^3, p+r = q+r \Leftrightarrow p=q$.
 $\forall (p,q;r) \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^*, pr = qr \Leftrightarrow p=q$. preuve avec opposés

$\forall (p,q;r) \in \mathbb{Q}^3, p+r \leq q+r \Leftrightarrow p \leq q$

$\forall (p,q;r) \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^{+*}, pr \leq qr \Leftrightarrow p \leq q$. preuve avec inverses.

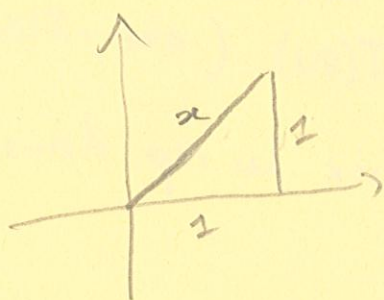
$\forall (p,q) \in \mathbb{Q}^2, p \leq q \Leftrightarrow -q \leq -p$.

si $p < q$
 $\frac{p+q}{2} \in]p,q[$.

Rq: $\mathbb{Q}$ a le m. type d'intervalles que $\mathbb{Z}$
mais, ceux qui sont bornés, sont infinis
contrairement à $\mathbb{Z}$ qui n'en a pas.

Insuffisance de $\mathbb{Q}$:

32



Par Pythagore,

$$x^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\text{donc } x^2 = 2.$$

Pb.: il n'existe aucun rationnel x

$$\text{t.q. } x^2 = 2.$$

En effet: si $x = \frac{p}{q}$, $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$
premiers entre eux
est sol. de l'eq. alors

$$p^2 = 2q^2.$$

Donc 2 divise p^2 . D'après la factorisation
en nb. premiers, 2 divise p aussi. D'où $p = 2p'$
avec $p' \in \mathbb{Z}$. D'où $4p'^2 = 2q^2$ et $2p'^2 = q^2$.

Comme précédemment, on en déduit que 2 divise q .
Contr. Car p et q sont premiers entre eux. $\square$

Rq.: $\mathbb{R}$ a aussi une insuffisance de ce type
puisque l'eq. $x^2 = -1$ n'a pas de sol. réelle.
Ceci peut être corrigé algébriquement (4. extension
de corps).

Insuffisance topologique de $\mathbb{Q}$

33

- Il existe une suite de Cauchy de rationnels qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$. cf. Ex. 13.
- Il existe une suite croissante majorée de rationnels qui ne converge pas. cf. Ex. 14.
- Il existe une partie non vide majorée de $\mathbb{Q}$ sans borne supérieure. cf. Ex. 14.

La construction de $\mathbb{R}$ vise à corriger ses insuffisances.

Construction de $\mathbb{R}$.

On donne seulement une esquisse d'une construction de $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels.

$u \in \mathcal{C}$ ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (n; m) \in \mathbb{N}^2, \left(\begin{smallmatrix} n \geq N \\ \text{et} \\ m \geq N \end{smallmatrix} \right) \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$

ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n; p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$

Une suite cv. est toujours de Cauchy (cf. Ex. 17).

Une suite constante est convergente. Doc $\mathcal{C}$ est non vide. De plus, c'est un $\mathbb{Q}$ -ev.

Soit $\mathcal{C}_0 = \{ \text{suite tendant vers } 0 \} \subset \mathcal{C}$.

Sur $\mathcal{C}$, on définit la relation
 $u R v$ ssi $u - v \in \mathcal{C}_0$.

Def. 7: $R := \mathcal{C} / R$. On identifie $\mathbb{Q}$ avec $\text{Im}(\pi)(\mathbb{Q})$
on $\mathbb{Q} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/R$
 $q \mapsto (q)_n \mapsto \pi(q)_n$ ✓

Th. 19: A l'aide des opé. dans $\mathcal{C}$, on construit
une addition, une multiplication et un ordre sur $\mathbb{R}$
qui prolongent ceux de $\mathbb{Q}$ (vus ds $\text{Im}(\pi)(\mathbb{Q})$).
De plus $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps ^{ordonné} archimédien et complet
ayant la propriété suivante: toute suite de Cauchy converge.

Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet
une borne supérieure.

Preuve: admise. Voir Compléments sur ma page Web.
voir Arnaudès-Fraysse. cours de mathématiques 2. Analyse.

Borne supérieure de A: Le plus petit ^(s.d.) des majourants de A, s'il existe.
(inférieure) ^(minorants)

Rq.: On déduit du Th. 19 que toute partie non
vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Convention: $\sup A = +\infty$ si A n'est pas majorée et $\inf A = -\infty$ si A n'est pas minorée.
Rq.: Les lois $+$ et $\times$ ont les m. propriétés
vis à vis de " $=$ " et " $\leq$ " que celles
de $\mathbb{Q}$.

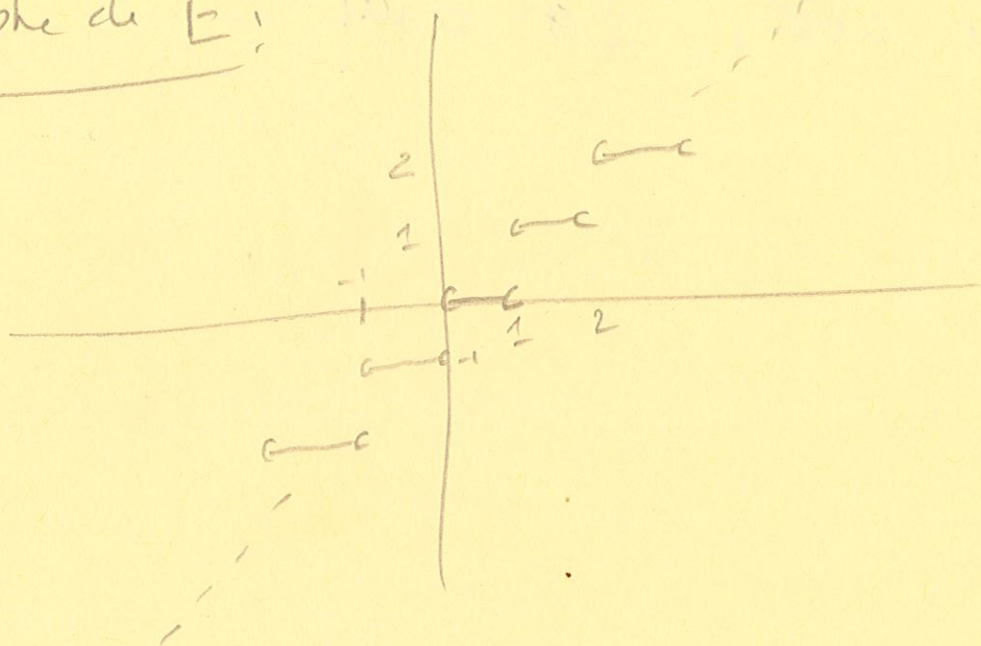
Fonction partie entière :

35

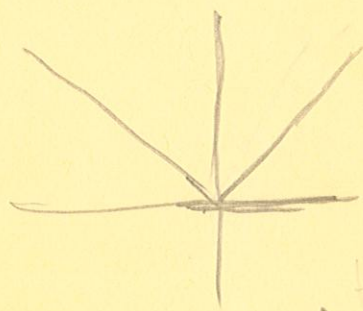
Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien,
il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq |x| + 1$.

Donc $A_x = \{n \in \mathbb{Z}; n \geq x\}$ est non vide. On note
par $E(x) + 1$ son plus petit élément. On a donc
 $E(x) + 1 > x$. Comme $E(x) \notin A_x$, $E(x) \leq x$.

Graphes de E :



Valeur absolue : $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \max(x, -x) = x$ si $x \geq 0$,
 $= -x$ sinon.



Elle prolonge celle de $\mathbb{Q}$.

Propriétés : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \cdot |y|$, $|-x| = |x|$
 $|x+y| \leq |x| + |y|$, $|x^2| = x^2$.

Preuve : comme dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$.

$$R_9 : \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$$

36

$x \mapsto$ la seule sol. positive t
de $t^2 = x$.

$\sqrt{\cdot}$ est str. $\nearrow$ car, pour $x > y \geq 0$
 $\sqrt{x} > \sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
 (0 n'est pas sol. de $t^2 = y$).

donc $\sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$.

pour $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a| !!$