

Suites réelles et complexes.

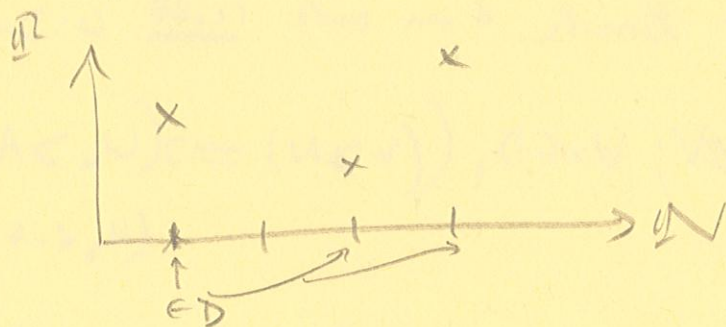
37

Def. 8 : Une suite (infinie) à valeurs réelles (resp. complexes) est une application $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Notation : $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $u = (u_n)_{n \in D}$
 $n \mapsto u(n) =: u_n$.

Rg. : Souvent D sera du type $[a; \rightarrow[$ (comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$ mais on souhaite pouvoir considérer par exemple : $u: \mathbb{N} \setminus \{3; 7\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \frac{1}{(n-3)(n-7)}$.

* graphe d'une suite :



Def. 9 : Une sous-suite (ou suite extraite) d'une suite $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une nouvelle suite v t.q. il existe une injection croissante $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow D$ t.q. $v = u \circ \varphi$.

On note $v = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

Rg. : On obtient le graphe de v à partir de celui de u en rayant les points (n, u_n) pour $n \in D \setminus \varphi(\mathbb{N})$.

Prop. 13 : Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et
 et $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow D$ une inj. $\nearrow$ (une extractrice).
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

38

Preuve : $\varphi(0) \in D \subset \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$.

Supp. $\varphi(n) \geq n$ vraie.

Comme φ est str. $\nearrow$, $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 \stackrel{HR}{\geq} n+1$.

Par le th. de réc. , $\varphi(n) \geq n$, pour tout n . $\square$.

Def. 10 : On dit que $l \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) est
 limite d'une suite $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in D, ((n \geq N) \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

rad. abs.
(resp. module)

* $+\infty$ est limite d'une suite réelle $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ si
 $(-\infty)$

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in D, ((n \geq N) \Rightarrow (u_n > A))$$

$(u_n < -A)$

Rq. : $|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ dans $\mathbb{R}$

" $\Leftrightarrow u_n \in D(l; \varepsilon[\leftarrow$ disque de centre l et de rayon ε dans $\mathbb{C}$.

Prop. 14 : Lorsqu'une suite a une limite, celle-ci
 est unique. On la note $\lim u_n$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

V
Preuve : Cas où $l \neq l'$ sont des limites de u dans $\mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon = \frac{|l - l'|}{2} > 0$. Par def. de l et l' , il existe

N et N' tq. $\forall n \in D, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$.

et $n \geq N' \Rightarrow |u_n - l'| < \varepsilon$.

Soit $n = \max(N, N')$. On a

$$|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| < 2\varepsilon = |l - l'|.$$

Contr. Donc $l = l'$.

Cas où $+\infty$ et $l \in \mathbb{R}$ sont limite de $u: D \rightarrow \mathbb{R}$.

Par def. de l avec $\varepsilon = 1$ et de $+\infty = \lim u_n$ avec

$A = l + 1$, il existe N et N' tq.

$$\forall n \in D, \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < 1$$

$$n \geq N' \Rightarrow u_n > l + 1.$$

Soit $n = \max(N, N')$. On a

$$l + 1 < u_n < l + 1. \quad \text{Contr.} \quad \square$$

Rq: On ne change pas de comportement à l'infini d'une suite en changeant un sub. fini de termes.

Prop. 15: Si $l = \lim u$ (ds $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ ou $+\infty$),

alors, pour tout s. suite v de u , $l = \lim v$.

Preuve: dans le cas où $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), et $v = u \circ \varphi$.

On montre: $\forall \varepsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \Rightarrow |v_n - l| < \varepsilon'$.

Soit $\varepsilon' > 0$. Par hyp. sur u , il existe (pour $\varepsilon = \varepsilon'$) un $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall p \in D, \quad p \geq N \Rightarrow |u_p - l| < \varepsilon'. \quad (*)$$

On choisit $N' = N$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N'$, on

$\varphi(n) \geq n$ (cf. prop. 13) donc $\varphi(n) \geq N' = N$ et,

par (*), $|u_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon'. \quad \square$

Rq. : La suite $(-1)^n$ n'a pas de limite. [40]

En effet, si l'était sa limite alors les 2 suites $(-1)^{2n} = (1)_n$ et $(-1)^{2n+1} = (-1)_n$ convergerait vers l. Or des suites ctes convergent bien sûr vers leur val. constante.

Dne $1 = l = -1$, Contr.

Prop. 16 : Soit $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On a : $x \quad l = \lim u \Leftrightarrow \lim |u_n - l| = 0$

* $l = \lim u \Rightarrow |l| = \lim |u|$.

Preuve : exercice. Pour la deuxième, on pourra utiliser $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (inég. triang.)

Rq. : La suite $u = (-1)^n$ vérifie

$1 = \lim |u|$ mais $\lim u$ n'existe pas !

Dne l'implication $(|l| = \lim |u| \Rightarrow l = \lim u)$ est fautive !

Suites de Cauchy :

Déf 11 : Une suite $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est de Cauchy si

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, (m \geq N \text{ et } n \geq N) \Rightarrow (|u_n - u_m| < \varepsilon)$.

Rq : Lorsque $D \supset [a; +\infty[$, (*) est équival. à $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n \geq N) \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$.

Th. 20 : Les suites de Cauchy dans $\mathbb{R}$

141

(resp. $\mathbb{C}$) sont convergentes, i.e. ont une limite dans $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

Preuve : Dans le cas réel, cela a été admis avec la construction de $\mathbb{R}$.

On esquisse la preuve dans le cas complexe :

Soit $u : D \rightarrow \mathbb{C}$ de Cauchy. On montre que $\text{Re } u : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $\text{Im } u : D \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \text{Re}(u_n)$ $n \mapsto \text{Im}(u_n)$

sont des suites réelles de Cauchy

(en utilisant $|\text{Re}(u_n) - \text{Re}(u_m)| \leq |u_n - u_m|$ val. abs. $|\text{Im}(u_n) - \text{Im}(u_m)| \leq |u_n - u_m|$ module)

Elles cv. donc vers certains a et b dans $\mathbb{R}$.

On vérifie ensuite que u cv. vers $a + ib$. $\square$

Opérations sur les limites.

Th. 21 : Soit $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)
et $(l, l') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$ (ou $\mathbb{C}^2$) $\neq \emptyset$.

$l = \lim u_n$ et $l' = \lim v_n$.

Alors (1) $l + l' = \lim (u_n + v_n)$ sauf si $\begin{matrix} l = -\infty \text{ et } l' = +\infty \\ \text{ou} \\ l = +\infty \text{ et } l' = -\infty \end{matrix}$

Convention : $+\infty + (+\infty) = +\infty$
 $-\infty + (-\infty) = -\infty$.

(2) $l l' = \lim (u_n v_n)$ sauf si $\begin{matrix} l = 0 \text{ et } l' = \pm\infty \\ \text{ou} \\ l = \pm\infty \text{ et } l' = 0 \end{matrix}$

Convention $\pm\infty \times (\pm\infty) = +\infty$
 $+\infty \times (-\infty) = -\infty$.

(3) $\lambda l = \lim(\lambda u_n)$ convention $0 \times l = 0$ (42)
 $\lambda \times (\pm\infty) = \pm\infty$ si $\lambda > 0$,
 $\lambda \times (\pm\infty) = \mp\infty$ si $\lambda < 0$.

(4). Si $l = \lim u_n \neq 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq N}$ soit bien déf. De plus $\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$.

(5). Si $\lim u_n \in]-\infty, +\infty[$ est bien définie, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $(\frac{1}{u_n})_{n \geq N}$ et $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.

Preuve partielle: Cas où $(l, l') \in \mathbb{C}^2$.

On montre

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{D}, (n \geq N \Rightarrow |u_n + v_n - (l + l')| < \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp. $\left(\begin{array}{l} \forall \varepsilon_1 > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{D}, n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon_1}{2} \\ \forall \varepsilon_2 > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{D}, n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon_2}{2} \end{array} \right)$,

il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{D}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}), \quad (*)$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{D}, (n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}), \quad (**)$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \in \mathbb{D}$ avec $n \geq N$.

On a

$$|u_n + v_n - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < 2 \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

par (*) et (**).

On montre

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{D}, (n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - l l'| < \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp., il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{D}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2(|l'| + \varepsilon)})$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{D}, (n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)})$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$,

On a

$$|u_n v_n - l l'| = |(u_n - l)v_n + (v_n - l')l|$$

$$\leq |u_n - l||v_n| + |v_n - l'||l| < \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)} \times (|l'| + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)} |l| \leq \varepsilon.$$

Car $|v_n| = |v_n - l' + l'| \leq |v_n - l'| + |l'| < \varepsilon + |l'|$. $\square$.

Limites et ordre (pour les suites réelles seulement!).

Th. 22 (Passage à la limite dans des inégalités).

Soit $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ t.g.

* $l = \lim u_n$ et $l' = \lim v_n$ existent dans $\mathbb{R}$

* Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ t.g.

$$\forall n \in D, (n \geq N_0 \Rightarrow u_n \leq v_n).$$

Alors $l \leq l'$.

Rg.: Si $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $v_n = 1$, pour tout n .

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$$

mais $\lim u_n = 1 = \lim v_n$!

Preuve du Th. 22. : On suppose que $l > l'$.

Soit $\varepsilon = \frac{l - l'}{2} > 0$. Par hyp., il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ t.g.

$$\forall n \in D, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ t.g.

$$\forall n \in D, (n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - l'| < \varepsilon).$$

Soit $N = \max(N_1, N_2, N_3)$. On a

$$\frac{l+l'}{2} = l - \frac{l-l'}{2} = l - \varepsilon \leq u_N \leq v_N \leq l' + \varepsilon = l' + \frac{l'-l}{2} = \frac{l+l'}{2}.$$

Contr. D'm $l \leq l'$. $\square$.

Th. 23 (Th. des gendarmes).

Soit $u, v, w: D \rightarrow \mathbb{R}$ trois suites réelles.

1). Si $\lim u_n$ et $\lim w_n$ existent dans $\mathbb{R}$ et sont égaux et s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in D, (n \geq N_0 \Rightarrow u_n \leq v_n \leq w_n) \quad (*)$$

alors $\lim v_n$ existe et vaut $\lim u_n = \lim w_n$.

2). Si $\lim u_n = +\infty$ et s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ t.q.
(resp. $\lim v_n = -\infty$)

$$\forall n \in D, (n \geq N_0 \Rightarrow u_n \leq v_n) \quad (**)$$

alors $\lim v_n = +\infty$
(resp. $\lim v_n = -\infty$).

Preuve :

1). Soit $l = \lim u_n = \lim w_n$. On montre :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in D; (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp., il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in D, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon). \quad (1)$$

et il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in D, (n \geq N_2 \Rightarrow |w_n - l| < \varepsilon). \quad (2)$$

Soit $N = \max(N_0; N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a

$$l - \varepsilon \underset{(1)}{<} u_n \underset{(x)}{\leq} v_n \underset{(2)}{\leq} w_n < l + \varepsilon.$$

45

Donc $|v_n - l| < \varepsilon$.

2). Cas $\lim u_n = +\infty$. On montre

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{D}, (n \geq N \Rightarrow v_n > A),$$

Soit $A > 0$. Par hyp., il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{D}, (n \geq N_1 \Rightarrow u_n > A). \quad (3)$$

On choisit $N = \max(N_0, N_1)$. Pour $n \in \mathbb{D}$ avec $n \geq N$, on a

$$v_n \underset{(x)}{\geq} u_n \underset{(3)}{>} A. \quad \square$$

Th. 24 (Suites monotones).

Soit $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle $\nearrow$ (resp. $\searrow$).

Alors $\lim u_n$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
(resp. $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) et vaut

$$\sup \{u_n; n \in D\}$$

(resp. $\inf \{u_n; n \in D\}$).

Preuve: Cas où u est $\nearrow$ majorée. Soit

$$l = \sup \{u_n; n \in D\} \in \mathbb{R}, \text{ On montre:}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in D, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $l - \varepsilon < l$ et l est le plus petit majorant de $U = \{u_n; n \in D\}$, $l - \varepsilon$ ne majore pas U .

Il existe donc un $N \in \mathbb{D}$ t.q. $u_N > l - \varepsilon$.

46

Pour $n \in \mathbb{D}$ avec $n \geq N$, on a :

$$l - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq l < l + \varepsilon$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 u_N $\forall l \text{ maj. } U$

D'où $|u_n - l| < \varepsilon$. $\square$

Prop. 17 : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

$l = \sup A$ (resp. $\inf A$) ssi

- * il existe une suite $U: \mathbb{N} \rightarrow A$ t.q. $l = \lim u_n$
- et
- * l majore A (resp. minore)

Preuve : Cas de la borne sup, lorsque A est majorée,
 $\Rightarrow$ Par déf. du "sup", l majore A . Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$l - \frac{1}{n+1} < l$ et l est le plus petit majorant de A donc $l - \frac{1}{n+1}$ ne majore pas A . Il existe donc un $u_n \in A$ t.q. $u_n > l - \frac{1}{n+1}$.

On a ainsi définie une suite $u: \mathbb{N} \rightarrow A$
 $n \mapsto u_n$

vérifiant

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad l - \frac{1}{n+1} < u_n \leq l$.

Comme $(\frac{1}{n+1})_n$ est une s. suite de la suite $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$. D'nc, par le Th. des gendarmes, $\lim u_n$ existe et vaut l .

$\Leftarrow$) Soit M un majorant de A .

(47)

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

Comme $\lim u_n$ existe, on peut passer à la limite dans les inégalités précédentes et obtenir

$$l = \lim u_n \leq M.$$

Comme l majore A , l est le plus petit majorant de A . $\square$.

Appl. : $1 = \sup]0, 1[$ car 1 majore $]0, 1[$ ^{prop. 17}
et $1 = \lim 1 - \frac{1}{n+1}$ avec $1 - \frac{1}{n+1} \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\checkmark$

Suites adjacentes : annexe 2.

Composition avec des fct.

Th. 25 : Soit $u : D \rightarrow E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,

(1). On suppose que $a = \lim u_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

et que $\lim_a f = l$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Alors $\lim f(u_n) = l$.

(2) Soit $(a, l) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$.

$\lim_a f = l$ ssi pour toute suite $v : D \rightarrow E$ avec $\lim v_n = a$ on a $\lim f(v_n) = l$.

Prouve : admise. ((2) donne (1)).

Def. 12 : Soit $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

(1). On dit que u est dominée par v s'il existe $A > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall n \in D, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq A |v_n|.$$

Dans ce cas, on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$.

(2) On dit que u est négligeable devant v s'il existe $w : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ tendant vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall n \in D, n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq w_n |v_n|.$$

Dans ce cas, on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$.

Rq. : * Dans la def. 12, si v ne s'annule plus à partir d'un certain rang, $(u = O(v))$ ssi $\frac{u}{v}$ est bornée)

et $(u = o(v))$ ssi $\lim \frac{u}{v} = 0$.

* On a bien sûr, $(u = o(v)) \Rightarrow u = O(v)$.

Car une suite convergente est bornée.

Exemples :

$$\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad \frac{1}{n^4} = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad \frac{4}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right);$$

$$\frac{1}{n} = O\left(\frac{\ln n}{n}\right); \quad \frac{1}{n} = O(1);$$

$$\frac{(-1)^n}{n} = O\left(\frac{1}{n}\right); \quad \frac{e^{\frac{i n \pi}{8}}}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Attention : $\begin{matrix} u = o(v) \\ w = o(v) \end{matrix} \not\Rightarrow u = w$.

Prop. 18: Soit $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
Si $\lim v = 0$ et $u = O(v)$, $\lim u = 0$
($\uparrow$
 $u = o(v)$)

Preuve: exercice.

Prop. 19: Soit $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
 $u = o(v) \Leftrightarrow v = o(u)$.

Preuve: On montre seulement le sens " $\Rightarrow$ ". L'autre sens s'en déduit en échangeant les rôles de u et v .
 $\Rightarrow$). Par hyp., il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ et $w: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ tendant vers 0 tq.
 $\forall n \in D, n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - v_n| \leq w_n |v_n|$. (*)
Comme $\lim w_n = 0$, il existe $N \geq N_0$ tq. $n \geq N \Rightarrow 0 \leq w_n < \frac{1}{2}$.
Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a: $|v_n| \leq |w_n - u_n| + |u_n|$ donc
 $w_n |v_n| \leq w_n (|u_n - v_n| + |u_n|)$ et, par (*),
 $|u_n - v_n| (1 - w_n) \leq w_n |u_n|$.
Donc $|u_n - v_n| \leq \frac{w_n}{1 - w_n} |u_n|$. $\square$
 $\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Def. 13: Soit $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On dit que u et v sont équivalentes, on note $u \sim v$ ou $u \approx v$, si $u - v = o(v)$ (ou $u - v = o(u)$).

Rq: * Si v ne s'annule pas sur D , $(u \sim v \Leftrightarrow \lim \frac{u}{v} = 1)$.
* $\sim$ est une relation d'équiv. sur les suites.

Exemple: $\frac{n+3}{n^2+8} \sim \frac{1}{n}$; $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$.

Prop. 20: Si $u, v: D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)
sont équivalentes, elles sont de même nature:
($\lim u$ existe $\Rightarrow \lim v$ existe et vaut $\lim u$)
($\lim u = +\infty \Rightarrow \lim v = +\infty$ et $\lim u = -\infty \Rightarrow \lim v = -\infty$).

Prouve: exercice.

Complément: limites supérieures et inférieures.
(voir cours de L2 sur ma page).

Déf. 14: Soit $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle queue de suite d'ordre n de u
l'ensemble $U_n = \{u_m; m \geq n \text{ et } m \in D\}$ ($\neq \emptyset$ car D est infini).

(1). Lorsque u est majorée (resp. minorée),
la suite réelle $(\sup U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et $\searrow$ (resp. $\nearrow$).
(resp. $(\inf U_n)_{n \in \mathbb{N}}$)

La limite supérieure de u est $\lim (\sup U_n)$,
(resp. inférieure) $(\lim (\inf U_n))$.

notée $\limsup u = \limsup u_n = \lim u = \lim u_n$
(resp. $\liminf u = \liminf u_n = \lim u = \lim u_n$).

(2) Lorsque u n'est pas majorée (resp. minorée)
on pose $\limsup u = +\infty$
(resp. $\liminf u = -\infty$).

Rq: $\nexists U_{n+1} \subset U_n$ donc $\inf U_{n+1} \geq \inf U_n$
et $\sup U_{n+1} \leq \sup U_n$.

* A la différence des limites, les limites
sup. et inf. existent tj's. $\lim (-1)^n = 1$
 $\lim (-1)^n = -1$.

Propriétés : $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$.

151

$$\lim (-u) = - \lim u.$$

$$\inf u \leq \underline{\lim} u \leq \overline{\lim} u \leq \sup u$$

$$(\lim u \text{ existe dans } \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}) \Leftrightarrow (\overline{\lim} u = \underline{\lim} u).$$

Dans ce cas, $\lim u = \overline{\lim} u = \underline{\lim} u$.

Si v est une s.s. de u ,
 $\underline{\lim} u \leq \underline{\lim} v \leq \overline{\lim} v \leq \overline{\lim} u$.

Il existe une s.s. v de u tq. $\overline{\lim} u = \lim v$
 " " " " $\underline{\lim} u = \lim v$.

Si $u \leq v$ à partir d'un certain rang, $\begin{cases} \overline{\lim} u \leq \overline{\lim} v, \\ \text{et} \\ \underline{\lim} u \leq \underline{\lim} v. \end{cases}$

$\overline{\lim} (u+v) \leq \overline{\lim} u + \overline{\lim} v$ sauf qd $\overline{\lim} u = +\infty$
 ($\underline{\lim}$) $(\geq \underline{\lim} u + \underline{\lim} v)$ et $\underline{\lim} v = -\infty$

Si u cv. $\overline{\lim} (u+v) = \lim u + \overline{\lim} v$
 $\underline{\lim} (u+v) = \lim u + \underline{\lim} v$.

Si u et v sont positives,
 $0 \leq \overline{\lim} (uv) \leq \overline{\lim} u \times \overline{\lim} v$ sauf qd $\overline{\lim} u = \lim u = 0$
 ($\underline{\lim}$) $(\geq \underline{\lim} u \times \underline{\lim} v)$ et $\underline{\lim} v = +\infty$
 et $\underline{\lim} u = \lim u = 0$
 et $\underline{\lim} v = +\infty$

Si, de plus, u cv., $\overline{\lim} (uv) = \lim u \times \overline{\lim} v$ (+)
 $\underline{\lim} (uv) = \lim u \times \underline{\lim} v$ (indites.)

Preuve : admette.

