

Séries :

On suppose que $D = [a; \rightarrow[$
avec $a \in \mathbb{N}$.

52

Def. 14 : Soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une suite.

* Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle somme partielle de u d'ordre n le nombre

$$S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \in D}}^n u_k.$$

* La série de terme général u_n , notée $\sum_{k \in D} u_k$, est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

* La série $\sum u_k$ a une limite si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite. Dans ce cas, on note

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \in D}}^{\infty} u_k = \lim S_n.$$

C'est la somme de la série $\sum u_k$.

* On dit que la série cv. si la limite précédente existe dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Sinon elle diverge.

Rq : On suppose que $D = [a; \rightarrow[$, $a \in \mathbb{N}$ et $u : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit $v : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

définie par $v_p = 0$ si $p \leq a$, $v_p = u_p - u_{p-1}$ si $p > a$.
(ou $u_{p+1} - u_p$).

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq a$, $\sum_{p=0}^n v_p = u_n - u_a$.

L'étude de la suite u se ramène donc à celle de la série $\sum v_n$.

Exemple : Soit $u : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto \frac{1}{n(n+1)}$.

53

La série $\sum u_n$ cv. vers 1.

En effet, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{l=2}^{n+1} \frac{1}{l} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \end{aligned}$$

Prop. 21 : Si $\sum u_n$ cv. alors $\lim u_n$ existe et vaut 0.

Preuve : Soit (S_n) la suite des sommes partielles de u .

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Comme $(S_n)_n$ cv. vers un certain l , la s. suite (S_{n-1}) cv. aussi vers l donc $\lim u_n$ existe et vaut 0 par différence. $\square$

Exemple : Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, la
série $\sum_{k \in \mathbb{N}} z^k$ cv. vers $\frac{1}{1-z}$, (voir exercice).

En particulier, la prop. 21 redonne : $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$

si $|z| < 1$.

Rg. : On ne modifie pas la nature d'une série $\sum u_n$ en changeant un nb. fini de la suite (u_n) .

Th. 26 : Une série réelle (ou complexe) $\sum u_n$ cv. ssi elle vérifie le critère de Cauchy.

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon)$.

Preuve : $(\sum u_n)$ cv. $\Leftrightarrow (S_n)_n$ cv. $\Leftrightarrow (S_n)_n$ est une suite de Cauchy $\Leftrightarrow (*)$. $\square$ réelle ou complexe

Def. 15 : On dit que la série $\sum u_n$ cv. abs. si la série réelle $\sum |u_n|$ cv.
 $\nwarrow$ val. abs. ou module.

L'intérêt de cette notion est illustré par le

Th. 27 : Une série réelle ou complexe qui converge abs. cv. tout court. De plus

$$\left| \sum_{n=a}^{\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=a}^{\infty} |u_n|.$$

Preuve : On montre que $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum |u_n|$ cv., la suite $(V_n)_n$ de ses sommes partielles est une suite de Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$.

$\forall m \in \mathbb{D}, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |V_{n+p} - V_n| < \varepsilon)$.
 On peut suppr. que $n \geq a$.
 Pour $m \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \stackrel{\text{inég. triangulaire}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| = \underbrace{V_{n+p} - V_n}_{\geq 0} = |V_{n+p} - V_n| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy est vérifié donc, par le Th. 26, $\sum u_n$ cv.

Pour tout $n \geq a$, on a $\left| \sum_{k=a}^n u_k \right| \leq \sum_{k=a}^n |u_k|.$

De plus, on sait que

$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=a}^n u_k$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=a}^n |u_k|$ existent

(55)

donc, par la prop. 16 et par passage à la limite des les inég.,

$$\left| \sum_{k=a}^{\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=a}^{\infty} |u_k|. \quad \square.$$

Rq. L'étude de beaucoup de séries se ramène à l'étude d'une série à termes réels positifs, grâce au th. 27. Mais pas tjrs.

Il existe des séries qui convergent mais qui ne convergent pas absolument, on dit qu'elles sont semi-convergente.

Exemple : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

On montrera plus loin qu'elle cv.

Montrons maintenant que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, pour $n \geq 1$. On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2n} \times (2n - (n+1) + 1) = \frac{1}{2}.$$

La suite $(S_n)_n$ n'est pas de Cauchy, $(S_n)_n$ ne cv. donc pas.

Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} \geq S_n$. Donc (S_n) est $\uparrow$.

Par le th. 24, $\lim S_n$ existe et vaut $\sup \{S_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Comme (S_n) ne cv. pas, $\lim S_n = +\infty$. $\square$. ✓

Prop. 22.

Soit $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

* Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ cv, alors $\sum (\lambda u_n + v_n)$ aussi et

$$\sum_{n=a}^{\infty} (\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=a}^{\infty} u_n + \sum_{n=a}^{\infty} v_n.$$

* Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ diverge vers $+\infty$ ($-\infty$),
 $\sum (u_n + v_n)$ diverge aussi vers $+\infty$ ($-\infty$).

Preuve: exercice.

Séries à termes réels positifs.

Prop. 23: Soit $u : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles. Alors $(S_n)_n$ est $\uparrow$ à partir du rang a .

En particulier $\lim S_n$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Preuve: Pour $n \geq a$, $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$. Donc $(S_n)_{n \geq a}$ est $\uparrow$.
 On applique ensuite le th. 24. $\square$

Th. 28: Soit $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ t.q. il existe $N \in D$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \leq v_n.$$

* Alors $(\sum u_n \text{ div.} \Rightarrow \sum v_n \text{ div.})$
 $(\sum v_n \text{ cv.} \Rightarrow \sum u_n \text{ cv.})$.

* Si $N = a$, $\sum_{n=a}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=a}^{\infty} v_n$ (convention $\mathbb{R} \ni t \leq +\infty$, $+\infty \leq +\infty$)

Preuve : Pour $n \geq N$, on a

157

$$\sum_{k=a}^n u_k - \sum_{k=a}^{N-1} u_k \leq \sum_{k=N}^n v_k$$

On a (*) $\sum_{k=a}^n u_k \leq \sum_{k=a}^n v_k + M \rightarrow \sum_{k=a}^{n-1} (u_k - v_k).$

Si $(\sum_{k=a}^n u_k)_n$ tend vers $+\infty$, $(\sum_{k=a}^n v_k + M)_n$ tend aussi vers $+\infty$ par C. Th. des gendarmes. Dne $(\sum_{k=a}^n v_k)_n$ tend vers $+\infty$ (par différence), (4.4)

Si $(\sum_{k=a}^n v_k)_n$ cv., $(\sum_{k=a}^n v_k)_n$ est majorée par certain A . Dne, par (*), $(\sum_{k=a}^n u_k)_n$ est majorée par $A+M$.
Dne la suite croissante $(\sum_{k=a}^n u_k)_n$ cv.

Si $N=a$ alors on a, pour tout $n \geq a$,

$$\sum_{k=a}^n u_k \leq \sum_{k=a}^n v_k.$$

Par passage à la limite dans les inég. $\sum_{k=a}^n u_k \leq \sum_{k=a}^{\infty} v_k$. $\square$

Exemple : Série de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère la série $\sum_{n \geq 1} n^{-\alpha} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}} = \sum_{n \geq 1} e^{-\alpha \ln n}$.

Si $\alpha \leq 0$, $\lim n^{-\alpha}$ existe mais n'est pas nulle.

Dne la série $\sum n^{-\alpha}$ diverge par la prop. 21

(on parle de divergence grossière).

Preuve $\alpha > 0$.

Si $\alpha \leq 1$ on a, pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^{\alpha}}$.

or $\sum \frac{1}{n}$ div., dne, par le Th. 28, $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge.

Soit $\alpha > 1$. Notons par $(S_n)_{n \geq 1}$ les sommes partielles de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, (S_n) est p. On montre que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, ce qui donnera la cv. de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k^\alpha} = \overbrace{1 + \frac{1}{2^\alpha}}^{v_1} + \sum_{k=3}^{2^n} \frac{1}{k^\alpha} \\ &= v_1 + \sum_{l=2}^n v_l \quad \text{où} \quad v_l = \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{k^\alpha}. \end{aligned}$$

Comme $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \geq 1} \searrow$ (cf. $\alpha > 1$), on a, pour $l \geq 2$,

$$v_l \leq \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{(2^{l-1})^\alpha} = \frac{1}{2^{\alpha(l-1)}} \times [2^l - (2^{l-1}+1) + 1]$$

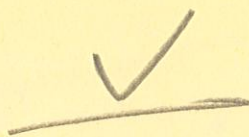
$$\text{Soit} \quad v_l \leq \frac{2^l - 2^{l-1}}{2^{\alpha(l-1)}} = \frac{2^{l-1}}{2^{\alpha(l-1)}} = \frac{1}{2^{1-\alpha}} \times \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^l.$$

Comme $\alpha > 1$, la série géom. $\sum_{l \geq 0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^l$ cv.

Par le Th. 28, $\sum v_l$ cv. aussi donc ses sommes partielles sont majorées par un certain M .

Pour $p \in \mathbb{N}$, il existe n t.q. $p \leq 2^n$.
(car $\lim 2^n = +\infty$). Dne

$S_p \leq S_{2^n} \leq M$. Dne $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée. $\square$.



On peut retrouver le résultat pour $\alpha > 0$ en utilisant (59) des intégrales:

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $[k, k+1] \ni t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est $\downarrow$
donc $\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$

Par intégration,

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

Donc, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^\alpha}$$

Or, si $\alpha \neq 1$, $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$

donc, par le th. des gendarmes,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \text{ diverge vers } +\infty \text{ si } \alpha < 1$$

et les sommes partielles de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ sont bornées si $\alpha > 1$ (d'après la série cv.).

Lorsque $\alpha = 1$, $\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$

Par le th. des gendarmes, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

Conclusion: $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ cv. ssi $\alpha > 1$.