Comparaisons asymptotiques:

Th. 29: Soit $u, v : D \to \mathbb{R}^+$.

(1) Si $u = O(v)$ alors $\begin{cases} \sum v_n \text{ cv.} \Rightarrow \sum u_n \text{ cv.} \\ \sum u_n \text{ div.} \Rightarrow \sum v_n \text{ div.} \end{cases}$

(vrai si $u = o(v)$)

(2) Si $u \sim v$ alors $\sum u_n$ cv. $\Longleftrightarrow$ $\sum v_n$ cv.

(3) Si $u \sim v$ et si $\sum u_n$ cv. alors

$$\left(\sum_{n=N}^{\infty} u_n\right)_N \underset{N\to\infty}{\sim} \left(\sum_{n=N}^{\infty} v_n\right).$$

(4) Si $u \sim v$ et si $\sum u_n$ div. alors

$$\left(\sum_{n=a}^{N} u_n\right) \underset{N\to\infty}{\sim} \left(\sum_{n=a}^{N} v_n\right).$$

Preuve: (1). $u = O(v)$. Donc il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ t.q.
$\forall n \in D$, $n \geq N \Rightarrow u_n \leq C v_n$.
Comme $\sum C v_n$ cv. ssi $\sum v_n$ cv., on peut appliquer le Th. 28 qui donne le résultat.

(2). $u \sim v$.

Par hyp., il existe $(w_n)_{n\geq a}$ tendant vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ t.q.
$\forall n \in D$, $n \geq N \Rightarrow |u_n - v_n| \leq w_n v_n$.
Comme $\lim w_n = 0$, il existe $N' \geq N$ t.q.
$\forall n \in D$, $n \geq N' \Rightarrow |u_n - v_n| \leq \frac{1}{2} v_n$.

Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N'$,

$$\frac{1}{2} v_n \underset{(*)}{\leq} u_n \underset{(**)}{\leq} \frac{3}{2} v_n.$$

En utilisant le Th. 28 et (**), on démontre

$\sum v_n$ cv. $\Rightarrow \sum u_n$ cv.

En utilisant le Th. 28 et (*), on démontre

$\sum u_n$ cv $\Rightarrow \sum v_n$ cv.

(3) et (4) : admis. $\square$.

Rq. : On a $\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$.

En effet, pour $n > 0$,

$$n\left(\ln(n+1) - \ln n\right) = n\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln n\right)$$

$$= n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$ car ln est dérivable en 1 et $\ln' 1 = 1$.

Donc $\underbrace{\ln(n+1) - \ln n}_{\geq 0} \sim \underbrace{\frac{1}{n}}_{\geq 0}$. De plus, $\sum \frac{1}{n}$ div.

Par le Th. 29 (4), $\sum_{n=1}^{N} (\ln(n+1) - \ln n) \underset{N\to\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Or, pour $N \geq 1$, $\sum_{n=1}^{N} (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(N+1) - \ln 1$

d'où $\ln(N+1) \underset{N\to\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Comme $\lim \frac{\ln(N+1)}{\ln N} = 1$,

$\ln N \underset{N\to\infty}{\sim} \ln(N+1) \underset{N\to\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

Comparaison à une série de Riemann.

Prop. 24 (test de Riemann). : Soit $u : D \to \mathbb{R}^+$ telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}^+$ t.q. $l = \lim n^\alpha u_n$.

(1). Si $0 < \ell < +\infty$,
$\sum u_n$ cv. ssi $\alpha > 1$.

(2) Si $\ell = 0$ et $\alpha > 1$, $\sum u_n$ cv.

(3) Si $\ell = +\infty$ et $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ dir.

Preuve :

(1). On a $u_n \sim \frac{\ell}{n^\alpha}$. Par le Th. 29,

$\sum u_n$ cv. $\Leftrightarrow$ $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv. $\overset{\text{étude des séries de Riemann.}}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha > 1$.

(2). On a $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv.
puisque $\alpha > 1$. Donc, par le Th. 29. (1), $\sum u_n$ cv.

(3). On a $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$ avec $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dir.
puisque $\alpha \leq 1$. Donc, par le Th. 29 (1), $\sum u_n$ dir. $\square$

Comparaison à une suite géométrique.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'appl. $\begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto x^n \end{array}$ est
str. $\nearrow$, conti. et son image est $\mathbb{R}^+$.
Elle est donc bijective. On note par $\sqrt[n]{\ }$ sa
bijection réciproque. Pour $x > 0$, on a

$$\sqrt[n]{x} = e^{\frac{1}{n} \ln x}.$$

Th. 30 (Règle de Cauchy).

Soit $u : D \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Si $l < 1$ alors $\sum u_n$ cv.

Si $l > 1$ alors $\sum u_n$ div. (convention : $+\infty > 1$).

Rq. : Le résultat est valable si $l = \overline{\lim} \sqrt[n]{u_n}$.

Preuve : **1er cas** : $l > 1$. Par déf. de l, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in D, \quad n \geq N \implies \left| \sqrt[n]{u_n} - l \right| < \frac{l-1}{2}.$$

Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$,

$$\sqrt[n]{u_n} > l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1.$$

Donc $$u_n \geq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n.$$

Comme $\frac{l+1}{2} > 1$, $\sum \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$ div. et, par le Th. 28, $\sum u_n$ div.

2è cas : $l < 1$. Par déf. de l, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in D, \quad n \geq N \implies \left| \sqrt[n]{u_n} - l \right| < \frac{1-l}{2}.$$

On en déduit que, pour $n \in D$ avec $n \geq N$,

$$u_n \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^n \text{ avec } \frac{1+l}{2} < 1 \,!.$$

Comme $\sum \left(\frac{1+l}{2}\right)^n$ cv., $\sum u_n$ cv. par le Th. 28. $\square$.

Rq. : Pour $\alpha>0$ et $n>0$, on a

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} = e^{-\alpha\left(\frac{\ln n}{n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

avec $\frac{\ln n}{n} \to 0$.

De plus, on sait que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv. ssi $\alpha>1$.

On voit que le cas $\ell=1$ dans le th. 30 est indéterminé.

Th. 31 (règle de d'Alembert).

Soit $u : D \to \mathbb{R}^{+*}$ t.q. $\ell = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Si $\ell<1$, $\sum u_n$ cv.

Si $\ell>1$, $\sum u_n$ div.

Rq. : On a aussi

$$\overline{\lim}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ cv.}$$

$$\underline{\lim}\ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ div.}$$

Preuve du Th. 31 : 1er cas : $\ell<1$. Par déf. de ℓ, il existe $N\in\mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n\in D,\ \left(n\geq N \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}-\ell\right| < \frac{1-\ell}{2}.\right)$$

Donc, pour $n\in D$ avec $n\geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{\ell+1}{2} < 1.$$

Soit $n_0 = \max(a;N)$. On vérifie par récurrence que pour $n\geq n_0$, $u_n \leq u_{n_0}\left(\frac{\ell+1}{2}\right)^{n-n_0}$.

Comme $0 \leq \frac{l+1}{2} < 1$, $\sum \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$ cv.

Par le Th. 28, $\sum u_n$ cv.

2ème cas : $l > 1$. Par déf. de l, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in D, \left(n \geq N \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \frac{l-1}{2}\right).$$

Donc, pour $n \in D$ et $n \geq N$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1.$$

Soit $n_0 = \max(a; N)$. On vérifie par récu. que, pour $n \geq n_0$, $\quad u_n \geq u_0 \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0}$.

Comme $\frac{l+1}{2} > 1$, $\sum \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$ div. donc, par le Th. 28, $\sum u_n$ div. $\square$.

<u>Rq.</u> : Pour $\alpha > 0$ et $n > 0$,

$$\frac{(n+1)^{-\alpha}}{n^{-\alpha}} = \frac{e^{-\alpha \ln(n+1)}}{e^{-\alpha \ln n}} = e^{\alpha(\ln n - \ln(n+1))}$$

$$= e^{\alpha(\ln n - \ln n - \ln(1+\frac{1}{n}))} = e^{-\alpha \overbrace{\ln(1+\frac{1}{n})}^{0}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$ Comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv. ssi $\alpha > 1$, le cas $l = 1$ ds le Th. 31 est indéterminé.

<u>Prop. 25</u> (Comparaison des règles de Cauchy et d'Alembert).

Soit $u : D \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que $l = \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Alors $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$.

<u>Preuve</u> : admise. $\square$.

<u>Rq.</u> : Si la règle de d'Alembert n'a donné aucun résultat (parce que $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$) il est inutile d'essayer celle de Cauchy car elle sera forcément sans succès.

<u>Series de complexes</u> :

Soit $u : D \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Pour étudier $\sum u_n$, on commence par voir si $\lim u_n$ existe et vaut zéro.

En effet, si ce n'est pas le cas, alors, par la prop. 21, $\sum u_n$ diverge (grossièrement). Ex. : $\sum (1-\frac{1}{n})$, $\sum e^{inb}$, $b \in \mathbb{R}$

Ensuite on étudie la cv. abs. c'est-à-dire la convergence de $\sum |u_n|$. Si $\sum |u_n|$ cv. alors, par le Th. 27, $\sum u_n$ cv. Pour étudier $\sum |u_n|$, on peut utiliser les techniques valables pour les séries à termes positifs. $\to$ ex. : $\sum\limits_{b \in \mathbb{R}} \frac{e^{inb}}{n^\alpha}$ cv. abs. si $\alpha > 1$.

Si $\sum |u_n|$ diverge ou si l'on ne sait pas étudier $\sum |u_n|$, on doit improviser une méthode pour étudier $\sum u_n$. On a cependant :

Th. 32 (Règle spéciale des séries alternées).

Soit $u : \underset{[\![a;\to[\![}{\overset{\shortparallel}{D}} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

* $(|u_n|)_{n\in D}$ est $\searrow$ et $\lim |u_n| = 0$;
* $\forall n \in D, \quad (-1)^n u_n \geq 0$. (ou ≤ 0)

Alors $\sum u_n$ cv. et, pour tout $n \in D$,

$$\left| \sum_{k=n}^{\infty} u_k \right| \leq |u_n| .$$

$\checkmark$.

Preuve : Pour $n \geq a$, soit $S_n = \sum_{k=a}^{n} u_k$.

Pour $n \geq \max(a;1)$,

$$S_{2n-1} \leq S_{2n-1} + \overbrace{|u_{2n}| - |u_{2n+1}|}^{\geq 0 \text{ car } (|u_n|)\searrow} = S_{2n-1} + u_{2n} + u_{2n+1} = S_{2n+1}.$$

et $S_{2n} = S_{2n-2} + u_{2n-1} + u_{2n} = S_{2n-2} \overbrace{- |u_{2n-1}| + |u_{2n}|}^{\leq 0} \leq S_{2n-2}$.

Donc $(S_{2n}) \searrow$ et $(S_{2n+1}) \nearrow$. De plus, pour $n \geq \max(a;1)$,

$$|S_{2n+1} - S_{2n}| = |u_{2n+1}| \longrightarrow 0$$ comme sous-suite d'une suite tendant vers 0. Les suites $(S_{2n})_{n \geq \frac{a}{2}}$ et $(S_{2n+1})_{n \geq \frac{a}{2}}$ sont donc adjacentes. Elles convergent donc vers toutes deux vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, avec $p \geq a/2$,

$$S_{2p+1} \leq \ell \leq S_{2p}.$$

Par l'exercice 28, $\lim S_n$ existe et vaut ℓ.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq n \geq \frac{a}{2}$, $S_{2n-1} \leq S_{2n+1} \leq S_{2p+1} \leq \ell \leq S_{2p} \leq S_{2n} \leq S_{2n+2}$

avec $S_{2n}-S_{2n-1}=u_{2n}=|u_{2n}|$ et $S_{2n+1}-S_{2n}=|u_{2n+1}|$.

Donc $$|S_{2p+1}-S_{2n-1}|\leq |u_{2n}|$$

et $$|S_{2p}-S_{2n}|\leq |u_{2n+1}|.$$

Par passage à la limite $p\to+\infty$, on obtient

$$\left|\sum_{k=2n}^{\infty} u_k\right| \leq |u_{2n}|$$

et $$\left|\sum_{k=2n+1}^{\infty} u_k\right| \leq |u_{2n+1}|. \quad \square.$$

Appl : * $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ cv. ssi $\alpha>0$.

Rq. : $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ cv. abs. ssi $\alpha>1$

Preuve : Si $\alpha\leq 0$, $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ ne tend pas vers 0

car $$\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right|\geq 1.$$

Si $\alpha>0$ alors la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ satisfait à la règle spéciale des séries alternées.

Donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ cv.

* Soit $\alpha\in\mathbb{R}^*$ et $w=\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Si $\alpha<0$, $w_n=\frac{1}{(-1)^n n^\alpha+1}$ avec $n^\alpha\to 0$

$(-1)^n n^\alpha\to 0$ car $((-1)^n)$ est bornée

donc $\lim w_n=1$. $\sum w_n$ div. grossièrement.

Soit $\alpha>0$.

On étudie la convergence abs.

$$|w_n| = \frac{1}{|n^\alpha + (-1)^n|} = \frac{1}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{\underbrace{1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\to 0}}} \to 1 \neq 0.$$

Comme $\lim \frac{1}{n^\alpha} = 0$ et $((-1)^n)_n$ est bornée,

$\lim \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0$ d'où $|w_n| \sim \frac{1}{n^\alpha}$.

Pour $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ cv. donc $\sum |w_n|$ cv.

et $\sum w_n$ cv.

Soit $\alpha \in]0;1]$. On ne peut pas appl. directement la règle spéciale car $(|w_n|)$ n'est pas $\downarrow$.

On écrit :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right).$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{u_n} - \underbrace{\left(\frac{1}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)}_{v_n}.$$

Par la règle spéciale $\sum u_n$ cv si $\alpha > 0$.

Pour n assez gd, $v_n \geq \frac{1}{n^{2\alpha}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha}} = \frac{1}{2n^{2\alpha}} > 0$.

De plus $v_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$. Donc $\sum v_n$ cv ssi $2\alpha > 1$. (Riemann).

Comme $\sum u_n$ cv. on a, dans le cas $\underline{\alpha \in]0;1]}$,

$$\sum w_n \text{ cv.} \iff \sum v_n \text{ cv} \iff 2\alpha > 1.$$

Concl. : $\sum w_n$ cv $\iff \alpha > \frac{1}{2}$.

Rq. : Pour $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ $\sum w_n$ est <u>semi-convergente</u>

Produit de Cauchy de séries.

Déf. 16 : Soit $u : [\![a ; \to [\![\to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $v : [\![b ; \to [\![\to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

La suite $w : [\![a+b ; \to [\![\longrightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie par

$$w_n = \sum_{\substack{p+q=n \\ p\geq a \text{ et } q\geq b}} u_p v_q = \sum_{p=a}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{q=b}^{n} u_{n-q} v_q$$

est appelée produit de convolution (ou convolée) des suites u et v. La série $\sum w_n$ est appelée la série produit des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Rq. : On supp. $u_n = 0$ si $n > a' > a$.
et $v_n = 0$ si $n > b' > b$.

$$\left(\sum_{n=a}^{a'} u_n t^n\right) \times \left(\sum_{p=b}^{b'} v_p t^p\right) = \sum_{m=a+b}^{a'+b'} \Big(\underbrace{\sum_{\substack{n+p=m \\ n\geq a \text{ et } p\geq b}} u_n v_p}_{w_m\,!}\Big) b^m$$

Th. 33 : Soit u, v et w comme dans la déf. 16.
On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ cv. abs.
Alors $\sum w_n$ cv. abs. et

$$\left(\sum_{n=a}^{\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=b}^{\infty} v_n\right) = \sum_{n=a+b}^{\infty} w_n.$$

Preuve : admise. Voir Armandiès-Fraysse Cours de maths 2 Analyse p486.