Fonction exponentielle complexe.

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ cv. abs.

* pour $z=0$ c'est vraie car la suite des sommes partielles est constante égale à 1.
En particulier, la somme de la série est 1.

* pour $z\neq 0$, soit $u_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right| = \frac{|z|^n}{n!} > 0$, pour tout n.

On a, pour tout n, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|z|^n}$

$$= \frac{|z|}{n+1} \to 0.$$

D'après la règle de D'Alembert (Th. 31), $\sum u_n$ cv. Donc $\sum \frac{z^n}{n!}$ cv. abs.

Déf. 17 : Pour $z\in\mathbb{C}$, la somme de la série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ est notée e^z ou $\exp(z)$. L'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$ est l'exponentielle complexe.

Prop. 26 : $\exp(0) = 1$.

$\forall z,z'\in\mathbb{C}$, $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$.

$\forall z\in\mathbb{C}$, $\exp(z)\neq 0$ et $\frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)$.

$\forall z\in\mathbb{C}$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$

$\forall x\in\mathbb{R}$, $\exp(x)\in\mathbb{R}^{+*}$ et $|\exp(ix)| = 1$.

Preuve : on a déjà vu que $\exp(0)=1$.

Pour $z, z' \in \mathbb{C}$, les séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{n!}$ convergent abs., donc, par le produit de Cauchy (cf. th. 33),

$$\exp(z).\exp(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \times \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} \right).$$

Or, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \times \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z'^{n-k}$$

binôme de Newton

$$= \frac{1}{n!} (z+z')^n.$$

D'où

$$\exp(z).\exp(z') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+z')^n = \exp(z+z').$$

En particulier, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) \times \exp(-z) = \exp(0) = 1.$$

Donc $\exp(z) \neq 0$ et $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $N \in \mathbb{N}$

$$\overline{\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{N} \frac{\bar{z}^n}{n!}$$

Comme $z \mapsto \bar{z}$ est conti. (admis),

on a, par passage à la limite $N \to \infty$,

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}).$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $|\exp(ix)|^2 = \overline{\exp(ix)}\exp(ix)$

$$= \exp(\overline{ix})\exp(ix)$$

$$= \exp(-ix)\exp(ix)$$

$$= \exp(0) = 1.$$

De plus,

$\overline{\exp(x)} = \exp(\bar{x}) = \exp(x)$ donc $\exp(x) \in \mathbb{R}^*$.

Pour $x \geq 0$, on a, pour tout N

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^0}{0!} = 1.$$

Par passage à la limite $N \to \infty$, $\exp(x) \geq 1$.

En particulier $\exp(x) \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si $x < 0$ alors $\exp(x) = \dfrac{1}{\exp(-x)} \in \mathbb{R}^{+*}$

car $\exp(-x) \in \mathbb{R}^{+*}$. $\square$

✓

Croissances comparées.

Prop. 27 : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^x = +\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} (-x)^\alpha e^x = 0.$$

Preuve : Soit $x > 0$, et $m \in \mathbb{N}$ t.q. $m > |\alpha|$. Soit $N \geq m$. On a

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \geq \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!}.$$ Par passage à la limite $N \to \infty$,

$$\exp(x) \geq \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} \geq \frac{x^m}{m!}.$$

Donc, pour $x>0$,

$$x^\alpha \exp(x) \geq x^\alpha \times \frac{x^m}{m!} = \frac{x^{m-\alpha}}{m!} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

car $m-\alpha>0$.

Pour $x<0$, $(-x)^\alpha e^x = (-x)^\alpha \frac{1}{e^{-x}} = \left(\frac{e^{-x}}{(-x)^\alpha}\right)^{-1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, on a, par composition des limites,

$\lim\limits_{x\to-\infty} (-x)^\alpha e^x = 0$ puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{(-x)^\alpha} = +\infty$. $\square$.

Rq. : On peut définir une exponentielle plus générale. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée complète. Par exemple, $\underset{\text{(dim. finie)}}{\mathcal{A} = \mathcal{M}_d(\mathbb{C})}$ ou

$\underset{\text{(dim. infinie}}{\mathcal{A} = C^0(\mathbb{R};\mathbb{C})}$.

Sur $\mathcal{A}$, on supp. que $\|ab\| \leq \|a\|.\|b\|$.

Pour $u\in\mathcal{A}$ et $n\in\mathbb{N}$, $\left\|\frac{u^n}{n!}\right\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$ (réc)

(convention $u^0 = I$ élt. neutre de $\mathcal{A}$ pour la multi.).

La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|u\|^n}{n!}$ cv. (cf. exp. réelle).

Comme $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ est complet, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{u^n}{n!}$ cv. dans $\mathcal{A}$.

On note par $\exp(u)$ sa somme.

On peut aussi montrer que si $u,v\in\mathcal{A}$ t.q.

$uv = vu$ alors

$\exp(u).\exp(v) = \exp(v).\exp(u) = \exp(u+v)$.

Dans le cas où $\mathcal{A} = \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, l'exponentielle est très utile pour résoudre les syst. diffé. linéaires sur $\mathbb{C}^d$ car, pour $x_0 \in \mathbb{C}^d$ et $M \in \mathcal{A}$ la fonction $\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}^d$ donnée par $\exp(tM).x_0$ est une sol. de l'éq. diffé.

$$\begin{cases} y' = M.y \\ \text{et} \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

d'inconnue $\quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^d$.

Développement des réels en base b.

Soit $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geqslant 2$. Soit

$C_b = [\![0 ; b-1]\!] = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; b-1\}$.

C'est l'ensemble des chiffres associés à la base b.

Pour $N \in \mathbb{N}$, soit

$$S^N = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in C_b^{\mathbb{Z}} \; ; \; \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{Z}, a_n \in C_b \\ \text{et } \forall n < -N, a_n = 0 \end{array} \right\}.$$

Soit $S = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} S^N$.

Une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in C_b^{\mathbb{Z}}$ appartient à S

si elle est nulle à gauche d'un certain rang.

c'est-à-dire s'il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n < -N \Rightarrow a_n = 0.$$

Th. 34 : L'appl. $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$$a \longmapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

est bien définie et surjective. De plus, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

x admet au moins 2 antécédents par f

ssi x admet exactement 2

ssi il existe $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{m}{b^k}$.

Dans ce cas, il existe $N, k \in \mathbb{Z}$ avec $-N \leq k$ et

des suites

$$a = (\ldots 0 — 0; a_{-N}; \ldots; a_{k-1}; \overset{\neq 0}{a_k}; 0 ——)$$

$$a' = (\ldots 0 — 0; a_{-N}; \ldots; a_{k-1}; a_k - 1; b-1; b-1; ——).$$

t.q. $x = f(a) = f(a')$.

Soit $S_0 = \{a \in S ;\ \{n \in \mathbb{Z};\ a_n < b-1\}$ est infini$\}$.

L'appl. $f_0 : S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est bijective.
$$a \longmapsto f(a)$$

Preuve : elle résulte essentiellement de l'exercice 33 et d'un exercice complémentaire. $\square$.

Commentaire : on se place dans le cas où $b = 10$. Dans ce cas, un développement en base 10 est dit décimal.

Le th. 34 dit que tout $x \in \mathbb{R}^+$ admet un dév. décimal :

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

avec $a \in S$. On écrit

$$x = a_{-N} a_{-N+1} a_{-N+2} \cdots a_{-1} a_0 , a_1 a_2 \cdots\cdots$$

Si x est de la forme $\frac{m}{10^k}$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ (par exemple $3 . 10^7$ ou $\frac{7}{10^2}$) alors x admet exactement deux dév. décimaux

$$x = a_{-N} a_{-N+1} \cdots a_{k-1} \overset{o}{\hat{a}}_k 0 \text{———} \quad \leftarrow a \in S_0 \quad \leftarrow \text{dév. propre}$$

$$= a_{-N} a_{-N+1} \cdots a_{k-1} (a_k - 1) 9 \text{———} \quad \leftarrow \text{dév. impropre} \quad \leftarrow a' \notin S_0 .$$

Les autres réels $x \geq 0$ n'ont qu'un seul dév. décimal et la suite de chiffres correspondante appartient à S_0.

Exemple : $3 + \frac{1}{3} = 3,333$ ——— (cf. ex. 34).
1 seul dév.

$\frac{167}{100} = 1,670$ ——— $\leftarrow$ dév. propre

$\frac{167}{100} = 1,66\,9$ ——
dév. impropre.

Th. 35 : Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 2$.
$x \in \mathbb{Q}^+$ si et seulement si ses développements en base b sont périodiques à partir d'un certain rang : il existe $a \in S$, $k \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{N}^*$ tq. $x = f(a)$ et

$$\forall n \in \mathbb{Z} ; n \geq k \Rightarrow a_{n+c} = a_n .$$

Preuve : voir Arnaudiès-Fraysse (Analyse) p. 80.

Exemple : $b = 2$.

signifie que l'on répète indéfiniment la séquence "10".

Soit $x = 101,11\overline{10}$

Par le Th. 35, $x \in \mathbb{Q}^+$. En fait

$$x = \frac{83}{12}.$$

La preuve du Th. 35 donne aussi

Prop. 28 : Soit $N \in \mathbb{N}$ et $a \in S^N$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ avec $k \geq -N$,

$$0 \leq f(a) - \sum_{n=-\infty}^{k} \frac{a_n}{b^n} \leq \frac{1}{b^k}.$$

Donc $\sum_{n=-\infty}^{k} \frac{a_n}{b^n}$ est une approximation de $f(a)$ à $\frac{1}{b^k}$ près.

Preuve : admise.

Base 10 :

Déf. 18 : Les décimaux sont les réels x tel que les chiffres du développement propre de $|x|$ en base 10 sont nuls à ptr d'un certain rang :

$x = f(a)$ avec $a \in S_0$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq.

$n \geq k \Rightarrow a_n = 0$.

Par le Th. 34, ils sont de la forme $\frac{m}{10^k}$ pour $m, k \in \mathbb{Z}$.

Rq. : Ce sont précisément les décimaux qui possèdent deux développements en base 10.

Approximations relatives à une base.

Déf. 18 : Soit $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 2$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{Z}$.
On dit que $y \in \mathbb{R}$ est une approximation à l'ordre N de x, relativement à la base b, si $|x-y| < b^{-N}$.
Le nombre $b^{-N} E(b^N x)$ est l'approximation par défaut à l'ordre N de x, relativement à la base b.
On a $b^{-N} E(b^N x) \leq x$.

Exemples : $b = 10$

$N=2$: $x = 1,3749$

1,37 est l'approx. par défaut à l'ordre 2 de x.

1,374 est une approx. à l'ordre 2 de x.

1,375 ——————————————————————— .

$N=-3$: $x = 2\,074,379$

2 000 est l'approx. par défaut à l'ordre -3 de x

2011 est une approx. à l'ordre -3 de x.

$2011,\overline{9}$ ———————————————————

Dans la pratique, on considère surtout des approximations décimales, c'est-à-dire des nombres décimaux qui sont des approx. de x à un certain ordre.

Th. 36 : Soit $b \in \mathbb{N}$ avec $b \geq 2$. Soit $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ et $N \in \mathbb{Z}$ t.q. $|x-y| < b^{-N}$. On suppose de plus qu'un développement $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n b^{-n}$ de y en base b vérifie $b_N \in [\![0; b-1[\![$. Alors tout dév. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b^{-n}$ de x en base b vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad n < N \Rightarrow a_n = b_n.$$

Preuve : voir Armandiès - Fraysse, Cours de maths 2 Analyse p. 79-80.

Remarque : Dans le cadre du th. 36, les chiffres de y jusqu'à N nous donnent des chiffres exacts pour x jusqu'à N.

<u>Remarque</u> : Soit $b=10$. Soit $x=1,000\overline{1}$ et $y=0,\overline{9}$.
On a bien $|x-y|<10^{-3}$ mais x et y n'ont pas de chiffre en commun (à la m. place).

<u>Prop.</u> : Soit $x = a_{-N}a_{-N+1}\cdots a_{-1}a_0,a_1a_2\cdots$
et $y = c_{-P}c_{-P+1}\cdots c_{-1}c_0,c_1c_2\cdots$ données par leur dév. <u>propre</u> en base b. Alors

* $x=y \iff (P=N \text{ et } \forall n\geq -N,\ a_n=c_n)$.
* $x<y \iff \left(P>N \text{ ou } \begin{cases} P=N \\ \text{et } \exists m\geq -N ;\ \begin{cases} a_n=c_n \text{ pour } n<m \\ a_m<c_m \end{cases}\end{cases}\right)$.

<u>Preuve</u> : admise (voir TD).