

Suites et séries de fonctions :

282

Déf. 19 : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$.

* Une suite de fonctions sur A à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) indexée par D est la donnée, pour $n \in D$, d'une application $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On note la suite correspondante par $(f_n)_{n \in D}$. On peut aussi la voir comme l'application

$$F : D \longrightarrow \mathbb{R}^A \text{ (ou } \mathbb{C}^A) \\ n \longmapsto (f_n : A \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}))$$

* Étant donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n \in D}$, la série de fonctions associée est la suite de fonctions sur A indexée par D' (partie inf. de $\mathbb{N}$) définie par

$$\left(\sum_{n \in D \text{ et } n \leq N} f_n \right)_{N \in D'}$$

On la note $(\sum_{n \in D} f_n)_{D'}$ et $\sum_{n \in D} f_n$ si $D' = D$.

Remarque : * on ne s'intéresse qu'aux suites de fonctions définies sur un m. ens. A .

* Pour les séries de fonctions, on considérera surtout le cas

où $D = [a; \rightarrow[$ et $D' = D$. Dans le cas, la série de funct. associée à la suite de funct. $(f_n)_{n \in D}$ s'écrit

$$\left(\sum_{n=a}^N f_n \right)_{N \in D'}$$

On va considérer différents type de convergence pour les suites et séries de fonctions.

183

Def. 20: Soit $B \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), D partie infinie de $\mathbb{N}$.

* $(f_n)_{n \in D}$ converge simplement sur B vers $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

si, pour tout $x \in B$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Dans ce cas, f est unique et c'est la limite simple de $(f_n)_{n \in D}$ sur B .

* $(f_n)_{n \in D}$ converge simplement sur B s'il existe $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui soit la limite simple de $(f_n)_{n \in D}$ sur B .

* $\sum_{n \in D} f_n$ converge simplement sur B si la suite de fct.

$\left(\sum_{n \in D, n \leq N} f_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$ converge simplement. Dans ce cas, la limite simple

de cette dernière est la somme simple de la série $\sum_{n \in D} f_n$.

Exemples: Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^n$.

$\rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$ car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(2) = +\infty.$$

$\rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $] -1; 1[$ vers la fonction nulle sur $] -1; 1[$. En effet, pour $|x| < 1$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = |x|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ car } |x| < 1.$$

$\rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $] -1; 1]$ vers la fonction

$$g:] -1; 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

De plus $] -1; 1]$ est un plus gd sous-ens. de $\mathbb{R}$ sur lequel $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv. simplement.

→ $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ cv. simplement sur $] -1; 1[$ vers la fonction

184

$$S :] -1; 1[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

De plus, $] -1; 1[$ est le plus gd. sous-ens. de $\mathbb{R}$
sur le quel $\sum f_n$ cv. simplement. (à vérifier)

✓

Convergence uniforme.

Def. 21 : Soit $B \subset A \subset \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$ et D une partie
infinie de $\mathbb{N}$.

* Une suite $(f_n)_{n \in D}$ de fonctions de A dans $\mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$
converge uniformément sur B vers $f : B \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$
si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in D, (n \geq N \Rightarrow (\forall x \in B, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)). (*)$$

* Une suite $(f_n)_{n \in D}$ de fonctions de A dans $\mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$
converge unif. sur B s'il existe une funct. $f : B \rightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$
telle que $(f_n)_{n \in D}$ cv. unif. sur B vers f .

* Les def. précédentes s'appl. aux séries de fonctions
via la suite des sommes partielles.

Prop. 30 : Dans le cadre précédent, si $(f_n)_{n \in D}$
cv. unif. sur B vers f alors $(f_n)_{n \in D}$ cv.
simplement sur B vers f .

Preuve : Soit $x_0 \in B$. On montre :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N' \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{D}, n \geq N' \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

(on aura ainsi : $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, pour tout $x_0 \in B$).

Soit $\varepsilon' > 0$. Par (*) avec $\varepsilon = \varepsilon'$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \in \mathbb{D}, n \geq N \Rightarrow (\forall x \in B; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon). \quad (**)$$

On choisit $N' = N$. Pour $n \in \mathbb{D}$ avec $n \geq N$, on a, par (**), et le fait que $x_0 \in B$, $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$. $\square$.

Remarque : Dans le cadre de la déf. 21,

$$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{D},$$

$$n \geq N \Rightarrow \left(\sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \right).$$

Exemple : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{x}{n}$.

On s'intéresse à la cv. unif. de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

D'après la prop. 29, il est utile d'étudier d'abord la cv. simple.

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{|x|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par le th. des gendarmes, $f_n(x) \rightarrow 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

A-t-on cv. unif. vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$?

Si la cv. était unif. sur $\mathbb{R}$, on aurait,
par la remarque

(86)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| \longrightarrow 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = +\infty !!$

Contradiction. La conv. n'est pas unif. sur $\mathbb{R}$.

Cependant elle l'est sur $[-M; M]$, pour tout $M > 0$.

En effet, soit $M > 0$. Pour $x \in [-M; M]$,

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x}{n} \right| \leq \frac{M}{n}.$$

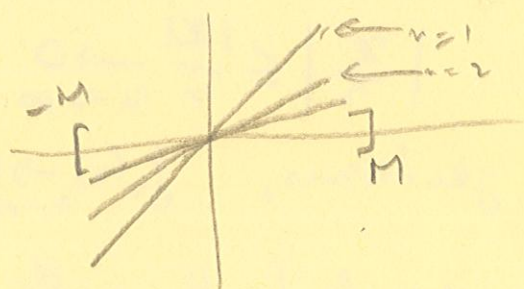
Donc $\frac{M}{n}$ majore $\{|f_n(x)|; x \in [-M; M]\}$ et, par d.f.,
de la borne sup.,

$$\sup_{x \in [-M; M]} |f_n(x)| \leq \frac{M}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par le Th. des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [-M; M]} |f_n(x)| \right) = 0$

et la cv. est unif. sur $[-M; M]$. ✓

Illustration graphique :



"L'écart global sur $[-M; M]$
entre f_n et sa f. lch.
nulle tend vers 0".

Critères de Cauchy.

Rappel : une suite réelle (ou complexe) cv. ssi elle est de Cauchy.

Il existe un critère de Cauchy pour les limites finies de fct :

Prop. 31 : Soit $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

existe dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall (x; y) \in A^2, (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

(dans le cas où $a \in \mathbb{R}$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0; \forall (x; y) \in A^2, (x \geq M \wedge y \geq M) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(dans le cas où $a = +\infty$)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0; \forall (x; y) \in A^2, (x \leq -M \wedge y \leq -M) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

(dans le cas où $a = -\infty$).

Preuve : admise.

Remarque : d'après le rappel précédent,

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv. simplement sur B ssi
 $\forall x \in B, (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Prop. 32 : Critère de Cauchy pour la cv. unif.

Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $B \subset A \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fct. de A dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

cv. unif. sur B ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (p, q) \in D^2, (p \geq N \wedge q \geq N) \Rightarrow \sup_{x \in B} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon.$$

(*)

Remarque: * lorsque $D = [a; \rightarrow[$, on peut

l'écrire (*) de manière équivalente sous la forme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in D, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in B} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon).$$

* Si $f_n \rightarrow f$ simplement sur B et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy unif. sur B alors, en fait, la cv. de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est unif. sur B .

* Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy unif. sur B alors, pour tout $x \in B$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv. simplement. On déduit ainsi que la cv. unif. implique la cv. simple.

Preuve de la prop. 32:

$\Leftarrow$): Soit $y \in B$. D'après l'hyp., on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (p, q) \in \mathbb{D}^2, ((p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow |f_p(y) - f_q(y)| < \varepsilon).$$

Donc $(f_n(y))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle cv. donc vers un certain $f(y) \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On construit ainsi $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) qui est la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On montre maintenant que la cv. de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f est unif. sur B .

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit un N donné par l'hyp. Pour $(p, q) \in \mathbb{D}^2$ avec $p \geq N$ et $q \geq N$, on a

$$\sup_{x \in B} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Dne, en particulier, pour tout $x \in B$,

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon,$$

En passant à la limite $p \rightarrow \infty$ dans $\left. \begin{array}{l} \text{ } \end{array} \right\}$, on obtient

$$|f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

(on a utilisé que f est continue), ceci étant vrai pour tout $x \in B$, on a aussi

$$\sup_{x \in B} |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall q \in \mathbb{D}, (q \geq N \Rightarrow \sup_{x \in B} |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon).$$

Dne $(f_n)_{n \in \mathbb{D}}$ cr. unif. sur B vers f .

$\Rightarrow$ f est la limite de $(f_n)_{n \in \mathbb{D}}$ sur B .

$\Rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp., il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{D}, n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in B} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (**)$$

Soit $(p, q) \in \mathbb{D}^2$ avec $p \geq N$ et $q \geq N$. On a, pour $x \in B$,

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

par (**). Ceci étant vrai, pour tout $x \in B$,

$$\sup_{x \in B} |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

On a donc (*). $\square$

Théorème de la double limite.

(30)

Lorsqu'on étudie des suites de fonctions, la question suivante est très naturelle : pour une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dfg. sur A et $a \in A$ a-t-on :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right) ?$$

C'est faux en général. Exemple : $f_n(x) = x^n$ sur $A = [0; 1[$

$$\text{Or a } \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

$$\text{et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ <}} 0 = 0.$$

Mais on a le

Th. 37 (Th. de la double limite) :

Soit $A \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in \bar{A}$ (l'adhérence de A).

Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Pour $n \in D$, soit $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On suppose que

* $\forall n \in D, l_n = \lim_{x \rightarrow a} f_n(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$);

* $(f_n)_{n \in D}$ cv. vers f unif. sur A .

Alors il existe $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tq. $l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ et

$l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Or a donc

$$\lim_{x \rightarrow a} \underbrace{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)}_{f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)}_{l_n}.$$

Corollaire 2. Soit $A \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit D une partie infinie 51
 de $\mathbb{N}$. Soit $(f_n)_{n \in D}$ une suite de fonctions continues sur A ,
 qui converge uniformément sur A vers $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
 Alors f est continue sur A .

Preuve: on applique le Th. 37. $\triangleleft$ voir sur l'exemple
 $f_n(x) = x^n$.

Preuve du Th. 37: Par la prop. 32, on traduit l'hyp. de cv. unif.
 sous la forme du critère de Cauchy unif.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in D; \forall (p, q) \in D^2,$$

$$(p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon. \quad (*)$$

On montre d'abord que $(f_n)_{n \in D}$ cv. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N \in D$.
 (*) soit vraie, pour tout $(p, q) \in D^2$. Soit $(p, q) \in D^2$ avec $p \geq N$
 et $q \geq N$. On a, par (*),

$$\forall x \in A, \quad |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon. \quad (**).$$

or $l_p = \lim_{x \rightarrow a} f_p(x)$ et $l_q = \lim_{x \rightarrow a} f_q(x)$ donc, par passage à
 la limite dans (**), on obtient $|l_p - l_q| < \varepsilon$.

On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in D, \forall (p, q) \in D^2, ((p \geq N \text{ et } q \geq N) \Rightarrow |l_p - l_q| < \varepsilon).$$

$(f_n)_{n \in D}$ est donc une suite de Cauchy. Elle cv. donc vers un
 certain $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On montre maintenant que $l = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, dans le cas
 où $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par cv. unif., il existe $N_1 \in \mathbb{D}$ tq., pour $n \in \mathbb{D}$, (92)

$$n \geq N_1 \Rightarrow \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme $l = \lim f_n$, il existe $N_2 \in \mathbb{D}$ tq., pour $n \in \mathbb{D}$,

$$n \geq N_2 \Rightarrow |f_n - l| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Par hyp., $l_N = \lim_{x \rightarrow a} f_N(x)$ donc, il existe $\delta > 0$; pour $x \in A$,

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - l_N| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $x \in A$ tq. $|x - a| < \delta$. On a :

$$\begin{aligned} |f(x) - l| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - l_N| + |l_N - l| \\ &< 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

d'après ce qui précède, $\underline{D}_{Rq. \text{ sur l'exp.}} \checkmark$.

Théorèmes de dérivation.

Th. 38 : Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ de long. > 0 . Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et, pour $n \in D$, $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tq. $f_n \rightarrow f$ simplement sur I ;

- * $f_n \rightarrow f$ simplement sur I ;
- * pour tout $n \in D$, f_n est dérivable sur I ;
- * $(f'_n)_{n \in D}$ cv. unif. sur I vers une fct. g .

Alors f est dérivable sur I et $f' = g$ sur I . De plus, pour tout $a < b$ dans I , $f_n \rightarrow f$ unif. sur $[a; b]$.

Th. 35: Soit D une partie infinie de $\mathbb{R}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ de long. > 0 . Pour $n \in D$, soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) dérivable. On suppose, de plus, que:

193

* il existe $x_0 \in I$ tq. $(f_n(x_0))_{n \in D}$ cv;

* $(f'_n)_{n \in D}$ cv. unif. sur I vers une fct. g .

Alors $(f_n)_{n \in D}$ cv. simpl. sur I vers une certaine fct. f , qui est dérivable et tq. $f' = g$ sur I . ✓

Preuve du Th. 35: Soit $l_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$. Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f'_n)_{n \in D}$ est unif. de Cauchy (par hyp.) et $(f_n(x_0))_{n \in D}$ est une suite de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ et

$$\forall (p, q) \in D^2, \quad \left. \begin{array}{l} p \geq N \\ \text{et} \\ q \geq N \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sup_{x \in I} |f'_p(x) - f'_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2|x-x_0|} \\ \text{et} \\ |f_p(x_0) - f_q(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{array} \right.$$

Par le Th. des $\nearrow$ finis, pour un c compris entre x et x_0 ,

$$a := |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(x_0) - f_q(x_0))| = |x - x_0| |f'_p(c) - f'_q(c)|.$$

Dne, pour $p, q \geq N$, on a

$$0 \leq a \leq |x - x_0| \times \sup_{x \in I} |f'_p(x) - f'_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dne, pour $p, q \geq N$, on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq a + |f_p(x_0) - f_q(x_0)| < \varepsilon.$$

On a montré que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{D}}$ est de Cauchy. Elle [94.
 cv. donc vers un certain $f(x)$, ceci est valable
 pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$. En posant $f(x_0) = l_0$, cela
 définit une fct. $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). De plus, on a
 montré que $(f_n)_{n \in \mathbb{D}}$ cv. simpl. sur I vers f .

On applique maintenant le Th. 38 qui donne
 la dérivabilité de f sur I et $f' = g$ sur I . $\square$

Preuve du Th. 38 : on traite le cas de fct. à val.
 réelles seulement et on ne montre pas le dernier résultat.

Soit $x_0 \in I$. Pour $n \in \mathbb{D}$, soit φ_n

$$\varphi_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0, \\ f'_n(x_0) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

$$\text{Soit } \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & \text{si } x \neq x_0, \\ g(x_0) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

On a : * φ_n est conti. sur $I \setminus \{x_0\}$. Comme f_n est dérivable
 en x_0 , φ_n est aussi conti. en x_0 .

* $\varphi_n \rightarrow \varphi$ simpl. sur I $\left(\begin{array}{l} \text{q. } f_n \rightarrow f \text{ simpl. sur } I \setminus \{x_0\} \\ \text{et } f'_n \rightarrow g \text{ simpl. sur } I \end{array} \right)$

On va montrer que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ unif. sur I ,

En admettant momentanément ce fait, on peut appliquer le Th. de la double limite (Th. 37) à la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{D}}$ et à $a = x_0$. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \right)$$

Soit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

En particulier $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x_0) \stackrel{\text{hyp.}}{=} g(x_0)$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = g(x_0)$.

Il reste à montrer la cv. unif. de $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{D}}$ vers φ sur I .

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp., il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\forall n \in \mathbb{D}, \left(n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in I} |f'_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Donc, pour $(p, q) \in \mathbb{D}^2$ avec $p \geq N$ et $q \geq N$, pour $x \in I$, on a

$$|f'_p(x) - f'_q(x)| \leq |f'_p(x) - g(x)| + |g(x) - f'_q(x)| < \varepsilon.$$

En passant au sup. sur x à gauche, on obtient

$$\sup_{x \in I} |f'_p(x) - f'_q(x)| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Toujours pour $(p, q) \in \mathbb{D}^2$ avec $p \geq N$ et $q \geq N$ et $x \in I$, on a, par le Th. des T finis, pour un c entre x_0 et x ,

$$f_p(x) - f_q(x) - (f_p(x_0) - f_q(x_0)) = (x - x_0)(f'_p(c) - f'_q(c)).$$

Dnc, par (*),

96

$$|f_p(x) - f_q(x) - (f_p(x_0) - f_q(x_0))| \leq |x - x_0| \varepsilon$$

d'où, pour $x \neq x_0$,

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| \leq \varepsilon.$$

D'autre part, $|\varphi_p(x_0) - \varphi_q(x_0)| = |f'_p(x_0) - f'_q(x_0)| \leq \varepsilon$

par (*). D'où, pour $(p, q) \in \mathbb{D}^2$ avec $p \geq N$ et $q \geq N$,

$$\sup_{x \in I} |\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| \leq \varepsilon.$$

$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{D}}$ est donc unif. de Cauchy sur I . Par le Th. 32,

$(\varphi_n)_{n \in \mathbb{D}}$ cv. unif. sur I . $\square$.

Application à l'exponentielle réelle

A D'après l'exercice n° 44, on a, pour $r > 0$,

$$\sup_{x \in [-r; r]} |f_n(x) - e^x| \leq \sup_{z \in \mathbb{D}(0; r]} |f_n(z) - e^z| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $f_n \rightarrow \exp$ unif. sur $[-r; r]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est dérivable et $f'_n = f_{n-1}$.

En particulier, $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cv. unif. vers $\exp$ sur $[-r; r]$.

Par le Th. 38 sur l'int. $[-r; r]$, $\exp$ est dérivable

sur $[-r; r]$ et $\exp' = \exp$ sur $[-r; r]$.

Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, $\exp$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$.