

Application aux séries de fonctions.

197

Soit $D = [a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{N}$.

Les résultats précédents s'appliquent aux séries de fonctions $\sum_{n \geq a} f_n$. Il suffit de remplacer la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans ces résultats par la suite

$$\left(\sum_{k=a}^n f_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

Exercice : formuler les résultats précédents dans le cas d'une série de fonctions.

Une notion, spécifique aux séries de fonctions, est très utile. Elle est donnée dans la

Déf. 22 : Soit $D = [a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{N}$. Soit $B \subset \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Pour $n \in D$, soit $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq a} f_n$ converge normalement sur B si la série numérique

$$\sum_{n \geq a} \sup_{x \in B} |f_n(x)|$$

converge.

Prop. 33 : Dans le cadre de la déf. 22, si la série $\sum_{n \geq a} f_n$ cv. normalement sur B , elle y converge uniformément.

Preuve : Il suffit de montrer que $\sum_{n \geq a} f_n$

satisfait aux critères de Cauchy unif. sur B (cf. prop. 32).

On montre donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N};$$

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{x \in B} \left| \sum_{k=a}^n f_k(x) - \sum_{k=a}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Notons que le terme $\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)$ (et 0 si $p=0$).

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série numérique de la déf. 22 cv., il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{x \in B} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On a donc, pour $x \in B$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \stackrel{\text{inég. triangl.}}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \sup_{x \in B} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \sup_{x \in B} |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in B$, on obtient

$$\sup_{x \in B} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \varepsilon. \quad \square$$

Rq. : * La cv. normale est pour la cv. unif. un peu
ce qu'est la cv. abs. pour la cv. des séries.
* La réciproque de la prop. 33 est fausse.
Voir ex. 46.

Application à l'exponentielle.

199

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \frac{z^n}{n!}$.

Pour $r > 0$, soit $D(0; r]$ le disque fermé de centre 0 et de rayon r . Pour $n \in \mathbb{N}$, et $z \in D(0; r]$,

$$\left| \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{r^n}{n!}.$$

$$\text{Dnc} \quad \sup_{z \in D(0; r]} \left| \frac{z^n}{n!} \right| \leq \frac{r^n}{n!}.$$

Or la série $\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$ cv. (vers $\exp(r)$) dnc,
par comparaison, la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in D(0; r]} \left| \frac{z^n}{n!} \right| \text{ cv.}$$

La série $\sum_{n \geq 0} f_n$ cv. dnc normalement sur tout
disque $D(0; r]$ avec $r > 0$.

Comme, pour tout n , f_n est conti., la prop. 33 et
le cor. 2 nous donnent la conti. de la somme de
la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$, qui est par déf. l'exponentielle.

De ce qui précède, on déduit que $\sum f_n$ cv. normalement
sur $[-r; r]$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est
dériv. et $f'_0 = 0$, $f'_n = f_{n-1}$ si $n \geq 1$.

Par la prop. 33 et le Th. 38, $\exp|_{\mathbb{R}}$ est dérivable sur $[-r, r]$ de dérivée

100

$$\exp'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x) = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n-1}(x) = 0 + \sum_{m=0}^{\infty} f_m(x) = \exp(x).$$

Ceci étant vrai pour tout $n > 0$, $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$ sur $\mathbb{R}$. ✓

Séries entières.

Déf 23 : Une série entière est une série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ du type :

$$f_n : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \quad x \mapsto a_n x^n, \quad a_n \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C},$$

ou bien $f_n : J \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C},$

On la note abusivement $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ ou $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

Lemme 1 (Lemme d'Abel) :

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière telle qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t.q. $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée. Alors, pour $|z| < |z_0|$,

la série de complexes $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ cv. abs. De plus, si $r \in [0; |z_0|[,$

la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ cv. normalement sur le disque fermé

$D(0; r]$ de centre 0 et de rayon r .

$$\hookrightarrow := \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq r\}.$$

Preuve : Par hyp., il existe $M > 0$ tq.

101

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M.$$

Soit $z \in \mathbb{C}$ tq. $|z| < |z_0|$. Pour tout n , on a

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \times \left| \frac{z}{z_0} \right|^n \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^n.$$

Comme $\left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$, la série géom. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{z}{z_0} \right|^n$ cv

donc, par comparaison, $\sum a_n z^n$ cv. abs.

Soit $r \in [0, |z_0|[$. Pour $z \in D(0, r]$, on a

$$|a_n z^n| \leq |a_n z_0^n| \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \leq M \times \frac{r^n}{|z_0|^n}$$

$$\text{Donc } \sup_{z \in D(0, r]} |a_n z^n| \leq M \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n.$$

Comme $r < |z_0|$, la série géom. $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{r}{|z_0|} \right)^n$ cv. d'n,

par comparaison, la série de fct. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ cv. normalement

sur $D(0, r]$. $\square$

Rayon de convergence

Prop. 34 : Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière, on définit les parties de $\mathbb{C}$ suivantes :

$$\mathcal{E}_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}; \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ cv.} \right\},$$

$$\mathcal{E}_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}; \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ cv. abs.} \right\},$$

$$\mathcal{E}_3 = \left\{ z \in \mathbb{C}; (a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$$

$$\mathcal{E}_4 = \left\{ z \in \mathbb{C}; \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n \text{ diverge} \right\}.$$

Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on pose $R_i = \sup_{z \in \mathcal{E}_i} |z|$ et $R_4 = \inf_{z \in \mathcal{E}_4} |z|$

(avec la convention $R_i = -\infty$ si E_i est vide et $R_i = +\infty$ si E_i est vide), 1102

Alors $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$.

Preuve: On remarque que, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $0 \in E_i$ donc R_i est bien déf. dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

D'après les résultats sur les séries,

* si $\sum |a_n z^n|$ cv. alors $\sum a_n z^n$ cv. donc $E_2 \subset E_1$;

* si $\sum a_n z^n$ cv. alors $(a_n z^n)_n$ tend vers 0 donc est bornée et donc $E_1 \subset E_3$.

Comme $\sup A \leq \sup B$ si $A \subset B$, on en déduit que

$$R_2 \leq R_1 \leq R_3, \quad (*)$$

1^{er} cas: $R_3 = 0$. Dans ce cas $R_1 = R_2 = R_3 = 0$ et $E_4 = \emptyset \cup \{0\}$. Donc $R_4 = 0$. On a bien $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$.

2^è cas: $R_3 > 0$. Soit $\rho \in [0; R_3[$.
Par déf. de R_3 , il existe $z_0 \in E_3$ t.q. $\rho < |z_0| \leq R_3$.

Comme $z_0 \in E_3$, le lemme d'Abel (Lemme 1) montre que

$\{z \in \mathbb{C}; |z| = \rho\} \subset E_2$. En particulier,

si d'on avait $R_2 < R_3$ alors, en prenant $\rho \in]R_2; R_3[$,

on aurait par l'argument préc. $\rho \leq R_2$. Contr.

Donc $R_2 \geq R_3$. Par (*), on en déduit que $R_1 = R_2 = R_3$.

On a montré ci-dessus que $\{z \in \mathbb{C}; |z| < R_3\} \subset E_1$.

donc $E_4 \subset \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq R_3\}$. Donc $R_4 \geq R_3$.

Si $R_4 > R_3$ alors, pour $\rho \in]R_3; R_4[$, on a $\rho \notin E_4$ donc $\rho \notin E_1 \subset E_3$ et $\rho \leq R_3$. Contr. Donc $R_4 = R_3$. $\square$

Def. 24 : Pour une série entière $s = \sum a_n z^n$, la quantité

$$R = R_1 = R_2 = R_3 = R_4 \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

(avec les notations de la prop. 34)

est appelé rayon de cv. de la série entière et est noté $R_{cv}(s)$.

Th. 40 : Soit $s = \sum a_n z^n$ une série entière.

1). $R_{cv}(s) = 0 \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C}^*, \sum a_n z^n \text{ div.})$.

2). $R_{cv}(s) = +\infty \Leftrightarrow (\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ cv. (abs.)})$

3). Soit $R \in]0; +\infty[$, les propriétés suivantes sont équivalentes

i) $R = R_{cv}(s)$

ii) $\sum |a_n z^n|$ cv. pour tout z t. $|z| < R$,
et div. --- $|z| > R$.

iii) $\sum a_n z^n$ cv. abs. pour tout $|z| < R$ et $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non bornée, pour tout $|z| > R$.

Preuve : 1). On sait que $\mathbb{E}_1 \supset \{0\}$. On a

$$R_1 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}_1 = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{E}_4 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Ce qui donne le résultat.

2). On a :

$$(\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ cv. abs.}) \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ cv.})$$

$$\Rightarrow R_1 = +\infty \Rightarrow R_3 = +\infty \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{via le} \\ \text{théorème d'Abel}}]{\substack{\uparrow \\ \text{cf prop. 34}}} (\forall z \in \mathbb{C}, \sum a_n z^n \text{ cv. abs.})$$

3). On montre $\text{iii}) \Rightarrow \text{ii}) \Rightarrow \text{i}) \Rightarrow \text{iii})$.

iii) $\Rightarrow$ ii): Pour $|z| > R$, $(a_n z^n)_n$ ne tend pas vers 0 donc $\sum a_n z^n$ div. (104)

ii) $\Rightarrow$ i): P. Si $R > R_2$ alors il existerait $z \in \mathbb{C}$, $R_2 < |z| < R$ et v. p. $\sum |a_n z^n|$ cv. Contr. avec la déf. de R_2 donc $R_2 \leq R$.
Si $R < R_1$ alors il existerait $z \in \mathbb{C}$, $R < |z| < R_1$ et t. p. $\sum a_n z^n$ div. Contr. avec la déf. de R_1 donc $R_1 \leq R$.
Par la prop. 34, $R = R_1 = R_2 = R_{cv}(S)$.

i) $\Rightarrow$ iii): Comme $R = R_3$, on a, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > R$, $z \notin E_3$ donc $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une bornee.
Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$. Soit $r_0 \in]|z|; R[$.
Comme $R = R_3$, $(a_n r_0^n)_n$ est bornée. Par le lemme d'Abel, $\sum a_n z^n$ cv. abs. $\square$

Exemples: * $S = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

On a $R_{cv}(S) = 1$ par le Th. 40, 3) iii).

* $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. Par la règle de D'Alembert, on vérifie que la série cv. abs. pour tout $z \in \mathbb{C}$ donc $R_{cv} = +\infty$ par le Th. 40, 2).

* $S = \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$. Pour $z > 0$, $\sum n! z^n$ div. par la règle de D'Alembert. Donc $R_4 = 0$.
D'où $R_{cv} = 0$.

* $S = \sum e^{i n \theta} z^n$, $\theta \in \mathbb{R}$.
Vérifier que $R_{cv} = 1$.