

Formule de Cauchy-Hadamard.

Th. 41 : Soit $\Delta = \sum_{n \in \mathbb{D}} a_n z^n$ une série entière. Alors

$$R_{cv}(\Delta) = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

avec la convention $R_{cv}(\Delta) = +\infty$ si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

✓

Preuve : admise.

Regularité des séries entières.

Prop. 35 : Soit $\Delta = \sum_{n \geq a} a_n z^n$ une série entière et $\Delta' = \sum_{n \geq \max(a,1)} n a_n z^{n-1}$.

Alors $R_{cv}(\Delta) = R_{cv}(\Delta')$.

Preuve : Pour $n \in \mathbb{D}$ et $z \neq 0$, $|n a_n z^{n-1}| = \frac{n}{|z|} |a_n z^n| \geq \frac{1}{|z|} |a_n z^n|$.

Donc si $(|a_n z^n|)$ n'est pas majorée, $(|n a_n z^{n-1}|)$ ne l'est pas non plus. Si $|z| > R_{cv}(\Delta)$ alors $(|a_n z^n|)$ n'est pas maj. (cf. Th. 40) et donc $(|n a_n z^{n-1}|)$ non plus et, par le Th. 40,

$|z| \geq R_{cv}(\Delta')$. On a montré que

$$|z| > R_{cv}(\Delta) \Rightarrow |z| \geq R_{cv}(\Delta').$$

Donc $R_{cv}(\Delta') \leq R_{cv}(\Delta)$.

Soit $z \in \mathbb{C}$; $|z| < R_{cv}(\Delta)$ et $r \in]|z|, R_{cv}(\Delta)[$.

Comme $\sum |a_n| r^n$ cv., $(|a_n| r^n)_n$ est bornée. Pour $n \in \mathbb{D}$,

$$|n a_n z^{n-1}| = \frac{n}{r} |a_n| r^n \times \left(\frac{|z|}{r}\right)^{n-1} \leq C \underbrace{\left(\frac{|z|}{r}\right)^n}_{u_n}$$

$\sum u_n$ cv. par la règle de D'Alembert. En effet,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{n} \times \frac{|z|}{r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{r} \in [0, 1[.$$

Par comparaison, $\sum |n a_n z^{n-1}|$ cv. donc $|z| \leq R_{cv}(\Delta')$ par le Th. 40.

On a montré : $(|z| < R_{cv}(\Delta) \Rightarrow |z| < R_{cv}(\Delta'))$. Donc $R_{cv}(\Delta) \leq R_{cv}(\Delta')$. $\square$

Th. 42: Soit $s = \sum_{n \geq a} a_n z^n$ une série entière de rayon de cv. (106)
 $R_{cv}(s) > 0$. La somme S de la série entière s est de classe C^∞ sur $] -R_{cv}(s); R_{cv}(s) [$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in] -R_{cv}(s); R_{cv}(s) [, \quad S^{(k)}(x) = \sum_{n=\max(a, k)}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n z^{n-k},$$

Preuve: Les fct. $R \ni x \mapsto a_n z^n$ sont de classe C^∞ et, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(x) &= n(n-1)\dots(n-k+1) a_n z^{n-k}, & \text{si } k \leq n, \\ &= 0 & \text{si } k > n. \end{aligned}$$

Soit $r \in [0; R_{cv}(s)[$. Comme la série s cv. normalement
 (dne unif.) sur $[-r; r]$ (cf. Th. 40), la somme S est
 conti. sur $[-r; r]$ (cf. Cor. 2). Comme le rayon de cv.

de la série $\sum_{n \geq \max(a, 1)} n a_n z^{n-1}$ est $R_{cv}(s)$, cette série cv.
 normalement (dne unif.) sur $[-r; r]$ (cf. Th. 40).

Par le th. de dérivation (Th. 38), S est dérivable sur $[-r; r]$ et

$$\forall x \in [-r; r], \quad S'(x) = \sum_{n=\max(a, 1)}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

En appliquant encore le Cor. 2, S' est conti. sur $[-r; r]$.

Supposons montré, pour un $k \in \mathbb{N}$, que $S^{(k)}$ est bien déf. et
 continue sur $[-r; r]$ et est donnée par la formule dans
 l'énoncé, la série ayant pour rayon de cv. $R_{cv}(s)$.

La série $\sum_{n \geq \max(a, k+1)} n(n-1)\dots(n-k+1) (n-k) a_n z^{n-k-1}$ a le m. rayon
 de cv. que $\sum_{n \geq \max(a, k)} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n z^{n-k}$ c'est-à-d. $R_{cv}(s)$.

Par le th. de dérivation (Th. 38), $S^{(k)}$ est dérivable sur $[-r; r]$
 et $S^{(k+1)}$ est donnée, pour $[-r; r]$, par la formule de l'énoncé
 avec le remplaç. par $k+1$. Par le Cor. 2, la somme de cette
 série est conti. sur $[-r; r]$.

Par le Th. de réc., S est de classe C^∞ sur $[-r; r]$ et 107
 la formule de l'énoncé est vraie, sur $[-r; r]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
 Comme r est arbitraire ds $[0; \text{Ray}(S)[$, on a le résultat
 annoncé. $\square$

Cor. 3 : Dans le cadre du Th. 4.2, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{S^{(k)}(0)}{k!} = a_k, \text{ si } k \geq a,$$

$$= 0, \text{ sinon.}$$

En particulier, si $S' = \sum_{n \geq a} b_n z^n$ a pour somme S
 alors, pour tout $n \geq a$, $a_n = b_n$.

Preuve : Par le Th. 4.2., on a, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$S^{(k)}(0) = 0 \quad \text{si } k < a,$$

$$= k(k-1) \dots 1 \times a_k' = k! a_k, \text{ si } k \geq a.$$

Soit S' la somme de S' . On a donc, pour tout $k \geq a$,

$$b_k = \frac{S'^{(k)}(0)}{k!}.$$

Si $S' = S$ alors, pour tout $k \geq a$, $b_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!} = a_k. \square$.

Application aux éq. différentielles.

On montre ici, sur un exemple simple, comment utiliser
 le Th. 4.2 pour trouver une solution d'une éq. diff.

Soit (E) l'éq. diff. d'inconnue $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 (à trouver en fonction de x).

donnée par

108

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = y(x).$$

Soit $S = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière à coeff. réels et
le rayon de cv. $R_{cv}(S) > 0$. Par le Th. 42,
la somme S est dérivable sur $] -R_{cv}(S); R_{cv}(S)[$ et

$$\forall x \in] -R_{cv}(S); R_{cv}(S)[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) a_{p+1} x^p.$$

Dnc

$$(S \text{ est sol. de } (E)) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = 0.$$

(ici on a utilisé l'argument suivant. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^N [(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^N (n+1) a_{n+1} x^n}_{\substack{\text{cv. qd } N \rightarrow \infty \\ \text{vers } 0.}} - \underbrace{\sum_{n=0}^N a_n x^n}_{\substack{\downarrow N \rightarrow \infty \\ S(x)}} = \underbrace{\sum_{n=0}^N a_n x^n}_{\substack{\downarrow N \rightarrow \infty \\ S(x)}} - \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) a_{n+1} - a_n] x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) a_{n+1} = a_n.$$

(Pour cette dernière équiv., on a uti. le cor. 3.).

On considère la suite récu. donnée par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \end{cases}.$$

Elle est bien définie. On montre par réc. la propriété, pour $n \in \mathbb{N}$, 103

$$S(n) = \left(a_n = \frac{a_0}{n!} \right).$$

$S(0)$ est vraie car $0! = 1$. Supp. $S(n)$ vraie.

Par def., $a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \underset{\text{H.R.}}{=} \frac{1}{n+1} \frac{a_0}{n!} = \frac{a_0}{(n+1)!}$.

Donc $S(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de réc., $S(n)$ est vraie pour tout n .

Comme, pour $n \geq 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

$\Delta := \sum a_n z^n$ cv. abs. pour tout z , d'après la

régle de D'Alembert. Donc $R_{cv}(S) = +\infty$

(cf. Th. 40). D'après les équivalences précédentes, la somme S de S est sol.

de (E) sur $] -R_{cv}(S), R_{cv}(S)[= \mathbb{R}!$.

Bien sûr, S est la fonction exponentielle réelle.

Soit (E) l'éq. diff. d'inconnue $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = y(x) + ch(x)$$

$$\text{on } ch(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

D'après la théorie générale des éq. diff. linéaires, 1110
il suffit de connaître une sol. particulière de $(\hat{E})$
pour la résoudre complètement.

Soit $t = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ une série entière de rayon de cv.

$\text{Re}_v(t) > 0$. On note par T sa somme.

$$(T \text{ est sol. de } (\hat{E})) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) b_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}.$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{p=0}^{\infty} \left[(2p+2) b_{2p+2} - b_{2p+1} \right] x^{2p+1} + \sum_{p=0}^{\infty} \left[(2p+1) b_{2p+1} - b_{2p} - \frac{1}{(2p)!} \right] x^{2p} = 0.$$

$$\Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} (2p+2) b_{2p+2} = b_{2p+1} \\ \text{et} \\ (2p+1) b_{2p+1} = b_{2p} + \frac{1}{(2p)!} \end{cases}$$

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par réc. par

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad b_{2p+1} = \frac{1}{(2p+1)} \left(b_{2p} + \frac{1}{(2p)!} \right) \text{ et } b_{2p+2} = \frac{b_{2p+1}}{2p+2}. \end{cases}$$

On vérifie par réc. que, pour $n \geq 1$, $b_n \geq \frac{1}{n!}$.

Dne, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq \frac{b_{2p+1}}{b_{2p}} = \frac{1}{2p+1} \left(1 + \frac{1}{b_{2p} (2p)!} \right) \leq \frac{2}{2p+1}$$

et

$$0 \leq \frac{b_{2p+2}}{b_{2p+1}} = \frac{1}{2p+2}.$$

Dne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{2}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

D'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 0.$

Par le test de D'Alembert, $\sum |b_n x^n|$ conv. abs

pour tout $x \neq 0$. Dnc $R_{cv}(t) = +\infty$,

D'après les équivalences précédentes, T est sol. de $(\tilde{E})$
sur $] -R_{cv}(t), R_{cv}(t)[= \mathbb{R}$.

✓ Rq : on peut aussi trouver une sol. particulière de $(\tilde{E})$
en utilisant la méthode de "variation de la constante".

Développement en série entière.

Rappel : formules de Taylor en 0.

Th. 43: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe C^∞ ,
 U voisinage de 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in U, \quad f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n),$$
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt,$$

il existe η compris entre 0 et x t.q.

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Def. 25: Une fonction $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) définie près de 0 est développable
en série entière s'il existe $r > 0$ t.q. f coïncide sur
 $] -r, r[$ avec la somme d'une série entière.

Prop. 36: Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

(i) f est dev. en série entière près de 0

ssi (ii) $\exists r > 0$ tel que f est C^∞ sur $] -r, r[$ et sa série de Taylor conv.
norm. sur $] -r, r[$

ssi (iii) $\exists r > 0$ tel que f est C^∞ sur $] -r, r[$ et ses restes

de Taylor cv. unif. sur $[-r; r]$ vers 0.

112

Preuve: on montre (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit f dér. en série entière sur $] -r_0; r_0[$. Soit Δ la série entière. On a $R_{cv}(\Delta) \geq r_0 > 0$. Dne, pour $r \in]0; R_{cv}[, \Delta$ cv. norma. sur $[-r; r]$ et sa somme S est C^∞ sur $]-r; r[$. Dne f est C^∞ sur $]-r; r[$. De plus, comme $f = S$ et

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k, \text{ pour } x \in [-r; r]$$

Δ est la série de Taylor de f .

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Δ cv. norma. sur $[-r; r]$ dne unif.

$$D'nt \quad \sup_{x \in [-r; r]} \left| \text{reste de Taylor d'ordre } n \right| = \sup_{x \in [-r; r]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right|$$

par la form. de Taylor $\downarrow n \rightarrow \infty$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Pour $x \in [-r; r]$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$

dne f est la somme d'une série entière sur $]-r; r[$. $\square$

Développements des funct. usuelles.

Funct. déf. par une série entière:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \text{Ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \text{Re}(e^{iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin z = \text{Im}(e^{iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Prop. 37: Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_\alpha:]-1;1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$, (113)

f_α est de classe C^∞ . De plus, f_α est d'ér. en série entière dans $]-1;1[$ et

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n.$$

où $C_\alpha^n = \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

Preuve: Par composition de fct. C^∞ , f_α est C^∞ .

De plus, on vérifie par réc. que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-1;1[, \quad f_\alpha^{(n)}(x) = n! C_\alpha^n (1+x)^{\alpha-n} \text{ et } \frac{f_\alpha^{(n)}(x)}{n!} = C_\alpha^n.$$

Pour $x \in]-1;1[\setminus \{0\}$, on a: $\left| \frac{C_\alpha^{n+1} x^{n+1}}{C_\alpha^n x^n} \right| = \frac{|n-\alpha| |x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |x|.$

Donc $\sum C_\alpha^n x^n$ conv. abs. sur $]-1;1[$, par D'Alembert.

Donc $\text{Rcv}(\sum C_\alpha^n x^n) \geq 1$. Il y a donc cr.

norma. de la série sur $[-r; r]$, pour tout $r \in]0;1[$.

Par la prop. 36., f_α est d'ér. en série entière sur

$[-r; r]$, pour tout $r \in]0;1[$, donc sur $]-1;1[$. D.

Applications:

$\alpha = -1$: $\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k,$

donc $\forall x \in]-1;1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k.$

séries
géom.

La série $\Delta = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$ a m. rayon

114

de cv. que $\Delta' = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$

$R_c(\Delta') \geq 1$. De plus, leurs sommes sont S et S' .

Or, pour $x \in]-1; 1[$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

Donc
$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = 0 + \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x).$$

D'après $\forall x \in]-1; 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

Pour $x \in]-1; 1[$, $x^2 \in]-1; 1[$ donc

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

La série $\Delta = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ a m. rayon

de cv. que $\Delta' = \sum_{k \geq 0} (-1)^k x^{2k}$.

Donc, pour $x \in]-1; 1[$,

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc,
$$S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt = 0 + \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctan } x - 0.$$

Donc

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arctanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Comme, pour $x \in]-1; 1[, (\operatorname{Arctanh})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$,

on obtient de m

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arctanh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$\alpha = -\frac{1}{2}$: Pour tout $x \in]-1; 1[,$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{2})(-\tfrac{1}{2}-1)\dots(-\tfrac{1}{2}-n+1) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{p=1}^n (2p-1)}{2^n} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{p=1}^n (2p-1)}{\prod_{p=1}^n 2p} (-1)^n x^n. \end{aligned}$$

Donc, pour $x \in]-1; 1[,$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{p=1}^n (2p-1)}{\prod_{p=1}^n 2p} x^{2n}.$$

Comme, pour $x \in]-1; 1[, -(\operatorname{Arccos})'(x) = (\operatorname{Arcsin})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
on obtient, comme précédemment,

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{p=1}^n (2p-1)}{\prod_{p=1}^n 2p} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\text{et } \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} x.$$

✓