Des relations entre π, la constante d'Euler γ et la fonction ζ de Riemann.

Thierry Jecko
AGM, UMR 8088 du CNRS, Université de Cergy-Pontoise,
Département de mathématiques, site de Saint Martin,
2 avenue Adolphe Chauvin, F-95000 Pontoise, France.
e-mail : thierry.jecko@u-cergy.fr, web : http ://jecko.u-cergy.fr//

22-01-2014

L'objet de cette note est d'établir les formules suivantes

$$\ln(\pi) \;=\; \gamma + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{2^{1-p}\zeta(p)}{p} \,, \tag{1}$$

et, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(\pi) \;=\; 2\sum_{k=1}^{m} \ln(k) \,+\, (2m+1)\Big(\gamma - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\Big) \,+\, 2\sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{p}\Big(\zeta(p) - \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^p}\Big) \,, \tag{2}$$

où ln désigne le logarithme népérien, π le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, γ la constante d'Euler et ζ la fonction zéta de Riemann. On rappelle que, pour $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 1$,

$$\zeta(s) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \,, \tag{3}$$

où la série converge absolumment. L'identité (1) est une interprétation adéquate de l'identité (2) pour $m = 0$.

La formule (1) découle d'une formule connue concernant la fonction strictement positive Γ définie, pour $s \in \mathbb{R}$ avec $s > 0$, par

$$\Gamma(s) \;=\; \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt \,.$$

En effet, il suffit de prendre $s = \frac{1}{2}$ dans l'identité connue suivante (cf. [AS, WW, Wi])

$$\forall s \in]-1;1[\,, \quad \ln\big(\Gamma(1-s)\big) \;=\; \gamma s \,+\, \sum_{p=2}^{\infty} \frac{\zeta(p)}{p} s^p \,,$$

sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. L'auteur n'a pas trouvé de trace des égalités (2) pour $m \in \mathbb{N}^*$ dans la littérature mathématique. Cependant, il est peut-être possible de les relier à des formules connues sur la fonction Γ.

La preuve proposée des identités (1) et (2) ne fait pas explicitement intervenir la fonction Γ et repose sur des techniques élémentaires du niveau de deuxième année universitaire. En particulier, il semble raisonnable de tirer de cette dernière un sujet de concours pour les grandes écoles.

Le reste de la note est consacré à la preuve des relations (1) et (2). La preuve proposée de la formule (2) couvre en fait celle de la formule (1) mais, pour plus de clareté, on a choisi de présenter la preuve de (1) dans la partie 1 et celle du cas général dans la partie 2.

1 Preuve de la première formule.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(t) \;=\; \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \;=\; e^{-n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)} \;. \tag{4}$$

En utilisant la formule de binôme de Newton, on vérifie que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{n} \;\geq\; 1+t^2 \;,$$

ce qui donne la domination $0\leq f_n\leq f_1$, avec f_1 intégrable sur $\mathbb{R}$. (En étudiant les variations de $\ln(f_{n+1}/f_n)$, on peut même montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante pour l'ordre habituel sur les fonctions). À l'aide du développement limité à l'ordre 1 de la fonction ln, on montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la gaussienne $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donnée par $g(t)=e^{-t^2}$. Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n \;=\; \int_{\mathbb{R}} g \;. \tag{5}$$

Il est bien connu que l'intégrale de g sur $\mathbb{R}$ est $\sqrt{\pi}$. (Ce résultat peut se montrer en utilisant des intégrables doubles). On va maintenant calculer la limite dans (5) d'une autre manière, ce qui donnera la formule (1).

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geq 0$, on pose

$$I_n(x) \;=\; \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n} \quad \text{et} \quad I_n \;=\; \int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^n} \;.$$

Comme $n\geq 1$, I_n est fini. En effectuant le changement de variable $t=u\sqrt{n}$, on vérifie que, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geq 0$,

$$\int_0^x f_n(t)\,dt \;=\; \sqrt{n}I_n\Big(\frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \;,$$

et, en prenant la limite quand $x\to+\infty$ et en utilisant la parité de f_n, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \,, \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \;=\; 2\sqrt{n}I_n \;. \tag{6}$$

En utilisant une intégration par parties appropriée, on montre que, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\geq 0$,

$$I_{n+1}(x) \;=\; \Big(1-\frac{1}{2n}\Big)I_n(x) \;+\; \frac{x}{2n(1+x^2)^n} \;.$$

En passant à la limite $x\to+\infty$ dans cette égalité, on obtient la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \,, \quad I_{n+1} \;=\; \Big(1-\frac{1}{2n}\Big)I_n \;.$$

Comme $I_1=\pi/2$, on montre alors par récurrence que

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \,, \quad I_n \;=\; \frac{\pi}{2}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\Big(1-\frac{1}{2k}\Big) \;. \tag{7}$$

En utilisant le développement en série entière de la fonction $]-1;1[\ni t\mapsto -\ln(1-t)$ donné par

$$\forall t\in]-1;1[\,, \quad -\ln(1-t) \;=\; \sum_{p=1}^{\infty}\frac{t^p}{p} \;, \tag{8}$$

on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en partant de (7),

$$\begin{aligned}
\ln\big(2\sqrt{n} I_n\big) &= \ln(\pi) + \ln\big(\sqrt{n}\big) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\Big(1 - \frac{1}{2k}\Big) \\
&= \ln(\pi) + \frac{1}{2}\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{2^{-p}}{pk^p} \\
&= \ln(\pi) + \frac{1}{2}\Big(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\Big) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=2}^{\infty} \frac{2^{-p}}{pk^p} \\
&= \ln(\pi) + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\Big(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Big) - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=2}^{\infty} \frac{2^{-p}}{pk^p}\,. \qquad (9)
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le résultat bien connu qui définit la constante d'Euler. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ (en fait $\gamma \in]0;1[$) tel que

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\Big) = \gamma\,.$$

En reportant dans (9) et en tenant compte de (5) et de (6), on voit que le dernier terme de (9) a une limite finie donnée par

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{p=2}^{\infty} \frac{2^{-p}}{pk^p} = \ln(\pi) - \frac{\gamma}{2} - \ln\big(\sqrt{\pi}\big) = \frac{1}{2}\ln(\pi) - \frac{\gamma}{2}\,. \qquad (10)$$

En utilisant un résultat sur les séries doubles à termes positifs (une version discrète du théorème de Fubini en fait), on redémontre la convergence de la série $\sum_{k\geq 1}(p2^pk^p)^{-1}$, pour tout $p \geq 2$, et on a la formule

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p=2}^{\infty} \frac{2^{-p}}{pk^p} = \sum_{p=2}^{\infty}\frac{2^{-p}}{p}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} = \sum_{p=2}^{\infty}\frac{2^{-p}}{p}\zeta(p)\,,$$

d'après (3). En reportant cette information dans (10) et en multipliant par 2, on obtient (1).

2 Preuve de la formule générale.

Pour montrer la formule (2), on suit la même démarche que précédemment en utilisant la transformée de Fourier de la gaussienne g définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad G(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi}e^{-t^2}\,dt\,. \qquad (11)$$

Après avoir montré la régularité de G (la classe C^1 suffit), on peut, à l'aide d'une équation différentielle et de la valeur de l'intégrale de g sur $\mathbb{R}$, la calculer explicitement et on trouve

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad G(\xi) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{\xi^2}{4}} = \sqrt{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\xi^{2m}}{(m!)4^m}\,, \qquad (12)$$

en utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle. Ici $m!$ est défini par récurrence en posant $0! = 1$ et, pour $m \geq 1$, $m! = m\cdot(m-1)!$. En particulier, pour tout $m \in \mathbb{N}$, la dérivée $(2m+1)$-ième de G s'annule en 0 et

$$G^{(2m)}(0) = \sqrt{\pi}\frac{(-1)^m(2m)!}{(m!)4^m}\,. \qquad (13)$$

On considère la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F_n(t;\xi) = e^{-it\xi}\Big(1 + \frac{t^2}{n}\Big)^{-n} = e^{-it\xi - n\ln\left(1+\frac{t^2}{n}\right)}\,. \qquad (14)$$

On remarque que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n(t;0) = f_n(t)$, où f_n est donnée par (4). Pour $m \in \mathbb{N}$, pour tout $(t;\xi) \in \mathbb{R}^2$, on a, en utilisant la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\frac{\partial^m F_n}{\partial \xi^m}(t;\xi) \;=\; \frac{(-it)^m e^{-it\xi}}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^n} \;\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; (-it)^m e^{-it\xi} e^{-t^2}\;, \tag{15}$$

uniformément par rapport à ξ et ponctuellement en t. Pour $m \in \mathbb{N}$, posons $N_m = E(\frac{m+1}{2}) + 1$, où E désigne la fonction partie entière. On a $N_m = \frac{m}{2} + 1$ si m est pair et $N_m = \frac{m-1}{2} + 1$ si m est impair. En utilisant la décroissance de la suite de fonctions $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on vérifie que, pour $m \in \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N_m$, pour tout $(t;\xi) \in \mathbb{R}^2$,

$$\left|\frac{\partial^m F_n}{\partial \xi^m}(t;\xi)\right| \;\leq\; \left|\frac{\partial^m F_{N_m}}{\partial \xi^m}(t;0)\right|, \tag{16}$$

le majorant étant une fonction indépendante de n et de ξ et intégrable en t sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de convergence dominée à ξ fixé,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^m F_n}{\partial \xi^m}(t;\xi)\, dt \;\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \int_{\mathbb{R}} (-it)^m e^{-it\xi} e^{-t^2}\, dt\,. \tag{17}$$

On vérifie que cette convergence est en fait uniforme par rapport à ξ dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de dérivation des intégrales généralisées, G est de classe C^∞ et, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\,, \quad G^{(m)}(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}} (-it)^m e^{-it\xi} e^{-t^2}\, dt\,. \tag{18}$$

Ce même théorème permet de montrer que le membre de gauche de la formule (17) est continu en ξ. Par le théorème de la double limite, on déduit de la converge uniforme dans (17) que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^m F_n}{\partial \xi^m}(t;0)\, dt \;=\; \lim_{n\to\infty} \lim_{\xi\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^m F_n}{\partial \xi^m}(t;\xi)\, dt \;=\; \lim_{\xi\to 0} G^{(m)}(\xi) \;=\; G^{(m)}(0)\,. \tag{19}$$

Lorsque m est impair, cette égalité n'est pas intéressante puisque le terme le plus à gauche et le terme le plus à droite sont nuls. En revanche, on va exploiter l'égalité, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{2m} F_n}{\partial \xi^{2m}}(t;0)\, dt \;=\; G^{(2m)}(0)\,. \tag{20}$$

Comme dans la première partie, la formule (2) cherchée va découler de (13), de (20) et d'un calcul explicite du membre de gauche de (20).

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $n \geq N_{2m} = m+1$. En faisant le changement de variable $t = u\sqrt{n}$ sur un intervalle $[-T;T]$ puis en faisant tendre T vers $+\infty$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{2m} F_n}{\partial \xi^{2m}}(t;0)\, dt \;=\; (-1)^m n^{m+\frac{1}{2}} J_{n;m}\,, \tag{21}$$

où

$$J_{n;m} \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2m}}{(1+u^2)^n}\, du\,.$$

En effectuant une intégration par parties sur un intervalle $[-T;T]$ puis en faisant tendre T vers $+\infty$, on vérifie la relation

$$J_{n;m} \;=\; J_{n+1;m} \;+\; \frac{2m+1}{2n} J_{n;m}\,,$$

ce qui conduit à la relation de récurrence, pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq N_{2m} = m+1$,

$$J_{n+1;m} \;=\; \Big(1 - \frac{2m+1}{2n}\Big) J_{n;m}\,.$$

Par récurrence sur n, on en déduit que

$$\forall n \geq m+1\,, \quad J_{n;m} \;=\; J_{m+1;m} \cdot \prod_{k=m+1}^{n-1} \Big(1 - \frac{2m+1}{2k}\Big)\,. \tag{22}$$

En effectuant une intégration par parties sur un intervalle $[-T;T]$ puis en faisant tendre T vers $+\infty$, on montre la relation, pour $m \geq 1$,

$$J_{m+1;m} \;=\; \frac{2m-1}{2m} J_{m;m-1}\,.$$

Sachant que $J_{1;0} = I_1 = \pi$, on voit, par récurrence sur m, que

$$\forall m \in \mathbb{N}\,, \quad J_{m+1;m} \;=\; J_{1;0} \cdot \prod_{j=1}^{m} \frac{2j-1}{2j} \;=\; \pi \cdot \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3 \cdot 1}{2m \cdot 2(m-1)\cdots 4 \cdot 2} \;=\; \frac{\pi(2m)!}{4^m (m!)^2}\,. \tag{23}$$

En tenant compte de (21), (22) et (23), on obtient, pour $m \in \mathbb{N}$ et $n \geq m+1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^{2m} F_n}{\partial \xi^{2m}}(t;0)\,dt \;=\; (-1)^m n^{m+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\pi(2m)!}{4^m (m!)^2} \cdot \prod_{k=m+1}^{n-1} \Big(1 - \frac{2m+1}{2k}\Big)\,. \tag{24}$$

En combinant (13), (20) et (24), on obtient

$$\lim v_n \;=\; m! \quad \text{en posant} \quad v_n \;=\; \sqrt{\pi} n^{m+\frac{1}{2}} \cdot \prod_{k=m+1}^{n-1} \Big(1 - \frac{2m+1}{2k}\Big)\,, \quad \text{pour}\, n \geq m+1\,.$$

Maintenant, en utilisant (8), on écrit, pour $n > m+1$,

$$\begin{aligned}
\ln(v_n) \;&=\; \frac{1}{2}\ln(\pi) \,+\, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\ln(n) \,+\, \sum_{k=m+1}^{n-1} \ln\Big(1 - \frac{2m+1}{2k}\Big) \\
&=\; \frac{1}{2}\ln(\pi) \,+\, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\ln(n) \,-\, \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p} \\
&=\; \frac{1}{2}\ln(\pi) \,+\, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\Big(\ln(n) - \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{1}{k}\Big) \,-\, \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p} \\
&=\; \frac{1}{2}\ln(\pi) \,+\, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \,+\, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{n} + \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\Big) \,-\, \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p} \\
\ln(m!) \;&=\; \frac{1}{2}\ln(\pi) \,+\, \Big(m + \frac{1}{2}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} - \gamma\Big) \,-\, \sum_{k=m+1}^{n-1} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p} \,+\, o(1)\,,
\end{aligned} \tag{25}$$

lorsque n tend vers l'infini. En utilisant un résultat sur les séries doubles à termes positifs (une version discrète du théorème de Fubini en fait), on obtient la formule

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{pk^p} \;=\; \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{p} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \;=\; \sum_{p=2}^{\infty} \frac{(m+\frac{1}{2})^p}{p} \Big(\zeta(p) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^p}\Big)\,,$$

d'après (3). En reportant cette information dans (25) et en multipliant par 2, on obtient la formule (2) puisque

$$\ln(m!) \;=\; \sum_{k=1}^{m} \ln(k)\,.$$

Références

[AS] M. Abramowitz, I.A. Stegun, *The Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York : Dover, 1972.

[WW] E.T. Whittaker, G.N. Watson : *A course of modern Analysis.* 4th ed., Cambridge University Press 1927. Reprinted in 1996. Table errata : Math. Comp. v. 36 (1981), no. 153, p. 319. (November 30, 2012).

[Wi] Wikipedia : *Gamma function.*, see :
" http ://en.wikipedia.org/wiki/Gamma_function".