Analyse fonctionnelle et distributions, EISTI, ING 2, 2015-2016.

Thierry Jecko
AGM, UMR 8088 du CNRS, Université de Cergy-Pontoise,
Département de mathématiques, site de Saint Martin,
2 avenue Adolphe Chauvin,
F-95302 Cergy-Pontoise cédex, France.
e-mail : thierry.jecko@u-cergy.fr
web : http ://www.u-cergy.fr/tjecko/

07-12-2015

1 Espaces topologiques.

1.1 Définitions et premières propriétés.

1.1.1 Topologie, ouverts, fermés.

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble et $\mathcal{T}$ une famille de parties de E (i.e. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$). On dit que $\mathcal{T}$ définit une* **topologie** *sur E (est une topologie sur E) si*

(o_1) *$E \in \mathcal{T}$ et $\emptyset \in \mathcal{T}$,*

(o_2) *si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$,*

(o_3) *si A est un ensemble quelconque d'indices et si $(O_\alpha)_{\alpha \in A} \in \mathcal{T}^A$ alors $\bigcup_{\alpha \in A} O_\alpha \in \mathcal{T}$.*

Définition 1.1.2. *Un* **espace topologique** *est un ensemble muni d'une topologie $(E, \mathcal{T})$. Les éléments de la famille $\mathcal{T}$ s'appellent les parties* **ouvertes** *de E (les ouverts de E) pour la topologie $\mathcal{T}$. Une partie F de E est dite* **fermée** *(F est un fermé de E) pour la topologie $\mathcal{T}$ si $F^c := E \setminus F$ est un ouvert pour $\mathcal{T}$. La topologie $\mathcal{T}$ est* **séparée** *(l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est* **séparé***) si pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $x \in O_1$ et $y \in O_2$.*

Proposition 1.1.3. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.*

(f_1) *$\emptyset$ et E sont ouverts et fermés à la fois.*

(f_2) *Une réunion de deux fermés de E est un fermé de E.*

(f_3) *Une intersection quelconque de fermés de E est un fermé de E.*

Exemple 1.1.4. *Topologie induite.*
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $X \subset E$. La topologie induite sur X par celle de $\mathcal{T}$ est définie par

$$\mathcal{T}_X = \{O \cap X;\ O \in \mathcal{T}\}.$$

a) $F \in \mathcal{P}(X)$ est fermé dans X si et seulement s'il existe F' fermé dans E tel que $F = F' \cap X$.
b) E séparé implique X séparé.

Exemple 1.1.5. *Topologie quotient.*
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'equivalence sur E. On a donc, pour tous $x, y, z \in E$,

$x\mathcal{R}x$,
si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$,
si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.
Pour tout $x \in E$, $[x] = \{y \in E; y\mathcal{R}x\}$ est la classe de x et on considère l'ensemble quotient $\tilde{E} = \{[x]; x \in E\}$. L'application $\pi : E \to \tilde{E}$ définie par

$$\pi(x) = [x]$$

est appelée application canonique. La topologie quotient $\tilde{\mathcal{T}}$ sur $\tilde{E}$ est définie par

$$\tilde{\mathcal{T}} = \big\{U \in \mathcal{P}(\tilde{E}); \pi^{-1}(U) \in \mathcal{T}\big\}.$$

1.1.2 Voisinages.

Définition 1.1.6. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $x \in E$. On dit que $V \in \mathcal{P}(E)$ est un voisinage de x (pour la topologie $\mathcal{T}$) s'il existe un ouvert $O \in \mathcal{T}$ tel que $x \in O \subset V$.*

Proposition 1.1.7. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $U \in \mathcal{P}(E)$. U est ouvert si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.*

1.1.3 Adhérence, intérieur, points isolés et points d'accumulation.

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \in \mathcal{P}(E)$.

Proposition 1.1.8. *La réunion de tous les ouverts inclus dans A est le plus grand ouvert inclu dans A. L'intersection de tous les fermés contenant A est le plus petit fermé contenant A.*

Définition 1.1.9.

On appelle intérieur de A le plus grand ouvert inclus dans A. On le note $\mathring{A}$.

On appelle adhérence de A le plus petit fermé contenant A. On le note $\overline{A}$.

Définition 1.1.10.

1) *Un point $x \in E$ est adhérent à A si $x \in \overline{A}$.*

2) L'ensemble A est dense dans E si $\overline{A} = E$.

3) Un point $x \in E$ est un point d'accumulation de A si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

4) Un point $x \in A$ est isolé dans A si x n'est pas un point d'accumulation de A.

Proposition 1.1.11.

1) A est ouvert dans E si et seulement si $\mathring{A} = A$.

2) A est fermé dans E si et seulement si $\overline{A} = A$.

3) $x \in \overline{A}$ si et seulement si A rencontre tout voisinage de x.

4) A est dense dans E si et seulement si A rencontre tout ouvert de E.

5) $x \in E$ est un point d'accumulation de A si et seulement si tout voisinage de x rencontre l'ensemble $A \setminus \{x\}$.

6) $x \in A$ est isolé dans A si et seulement s'il existe un voisinage de x qui ne rencontre pas $A \setminus \{x\}$.

1.1.4 Base d'une topologie.

Proposition 1.1.12. *Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{W}$ une famille de parties de E (i.e. $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}(E)$) telle que*

(i) $\emptyset \in \mathcal{W}$ et $E = \cup_{W \in \mathcal{W}} W$;

(ii) l'intersection de deux éléments quelconques de $\mathcal{W}$ s'écrit comme une réunion d'éléments de $\mathcal{W}$.

Alors la famille

$$\mathcal{T}_{\mathcal{W}} = \{\textit{toutes les réunions possibles d'éléments de} \mathcal{W}\}$$

définit une topologie sur E, appelée la topologie engendrée par $\mathcal{W}$.

Démonstration.

(o_1) D'après (i), $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $E \in \mathcal{T}$.

(o_2) D'après (ii),

$$\begin{aligned} \Big(\bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha\Big) \bigcap \Big(\bigcup_{\beta \in B} V_\beta\Big) &= \bigcup_{(\alpha,\beta) \in A \times B} W_\alpha \cap V_\beta \\ &= \bigcup_{(\alpha,\beta) \in A \times B} \ \bigcup_{\gamma \in I(\alpha,\beta)} M_{\alpha,\beta,\gamma}\,, \end{aligned}$$

oú les $M_{\alpha,\beta,\gamma}$ sont tous dans $\mathcal{W}$.

(o_3) Une réunion de réunions d'éléments de $\mathcal{W}$ est une réunion d'éléments de $\mathcal{W}$.

$\square$

Définition 1.1.13. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une famille $\mathcal{W}$ de parties de E est une base de la topologie $\mathcal{T}$ si*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{W}} = \{\textit{toutes les réunions possibles d'éléments de } \mathcal{W}\}\,.$$

Proposition 1.1.14. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{W} \subset \mathcal{T}$. La famille $\mathcal{W}$ est une base de $\mathcal{T}$ si et seulement si, pour tout $O \in \mathcal{T}$ et tout $x \in O$, il existe $W_x \in \mathcal{W}$ tel que $x \in W_x \subset O$.*

Démonstration.

($\Rightarrow$) : Pour des W_α dans $\mathcal{W}$, $x \in O = \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$ donc, pour un certain α, $x \in W_\alpha \subset O$.

($\Leftarrow$) :

$$O = \bigcup_{x \in O} W_x\,.$$

$\square$

Exemple 1.1.15. *Topologie usuelle de R.*
La famille $\mathcal{W} = \{]a; b[; a, b \in \mathbb{R}\}$ est une base de la topologie usuelle de R.

Exemple 1.1.16. *Topologie usuelle de R^d.*
Soit $|\cdot|_e$ la norme euclidienne sur R^d . La famille de toutes les boules ouvertes

$$B(a; r[= \{x \in \mathbb{R}^d; |x - a|_e < r\}$$

avec $a \in \mathbb{R}^d$ et $r \geq 0$, est une base de la topologie usuelle de R^d.

Exercice 1.1.17. *Montrer que, quelle que soit la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$, la famille de toutes les boules ouvertes $\{x \in \mathbb{R}^d; \|x - a\| < r\}$ avec $a \in \mathbb{R}^d$ et $r \geq 0$ est une base de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^d$. (On admettra que toutes les normes sur R^d sont équivalentes).*

1.2 Topologie produit.

1.2.1 Produit de deux espaces topologiques.

Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

Définition 1.2.1. *On appelle ouvert élémentaire de* $E = X \times X'$ *toute partie* $U \times V$ *de* $X \times X'$ *avec* $U \in \mathcal{T}$ *et* $V \in \mathcal{T}'$*.*

Proposition 1.2.2. *La famille*

$$\mathcal{W} \;=\; \{\textit{ouverts élémentaires de } E = X \times X'\}$$

vérifie les conditions (i) et (ii) de la Proposition 1.1.12.

Définition 1.2.3. *La topologie sur* $E = X \times Y$ *engendrée par* $\mathcal{W}$ *est appelée topologie produit sur* $E = X \times Y$*.*

Attention ! Dans la topologie produit, il y a *des ouverts non élémentaires* ! comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 1.2.4. *Dans* $\mathbb{R}^2$ *munie de la topologie produit (qui se trouve être sa topologie usuelle, voir ci-après), vérifier que* $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x; 0); x \leq 0\}$ *est un ouvert qui n'est pas élémentaire.*

Exemple 1.2.5. *Topologie usuelle de* $\mathbb{R}^2$*.*
Soit $\mathcal{T}$ *la topologie usuelle et* $\mathcal{W}$ *la famille des ouverts élémentaires. Soit* $O \in \mathcal{T}$ *et* $x \in O$*. Par définition,* O *contient un disque ouvert centré en* x*. Comme ce disque contient un carré ouvert centré en* x*,* O *contient un élément de* $\mathcal{W}$ *qui contient* x*. Par la proposition 1.1.14,* $\mathcal{T}$ *est la topologie engendrée par* $\mathcal{W}$*, c'est-à-dire la topologie produit.*

1.2.2 Produit de n espaces topologiques.

Soit $(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$ des espaces topologiques.

Définition 1.2.6. *On appelle ouvert élémentaire de* $E = X_1 \times \cdots \times X_n$ *toute partie de* $U_1 \times \cdots \times U_n$ *de* E *avec* $U_i \in \mathcal{T}_i$*, pour tout* $i = 1, \ldots, d$*.*

Proposition 1.2.7. *Soit* $E = X_1 \times \cdots \times X_n$*. La famille*

$$\mathcal{W} \;=\; \{\textit{ouverts élémentaires de}\, E\}$$

vérifie les conditions (i) et (ii) de la Proposition 1.1.12.

Définition 1.2.8. *La topologie engendrée par* $\mathcal{W}$ *est appelée topologie produit sur* $E = X_1 \times \cdots \times X_n$*.*

Exemple 1.2.9. *Topologie usuelle de* $\mathbb{R}^d$*,* $d \geq 2$*.*

1.3 Produit infini.

Soit I un ensemble quelconque d'indices et $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Soit $E = \prod_{i\in I} X_i$. Pour tout $i \in I$, on note par p_i la projection canonique de E sur X_i.

Définition 1.3.1. *On appelle ouvert élémentaire de* $E = \prod_{i\in I} X_i$ *toute intersection* **finie**

$$\bigcap_{i\in J} p_i^{-1}(U_j)$$

où $J \subset I$ *est fini et, pour tout* $i \in J$, $U_i \in \mathcal{T}_i$.

Proposition 1.3.2. *Soit* $E = \prod_{i\in I} X_i$. *La famille*

$$\mathcal{W} \;=\; \{\textit{ouverts élémentaires de}\, E\}$$

vérifie les conditions (i) et (ii) de la Proposition 1.1.12.

Démonstration. Admise. □

Définition 1.3.3. *La topologie engendrée par* $\mathcal{W}$ *est appelée topologie produit sur* $E = \prod_{i\in I} X_i$.

Proposition 1.3.4. $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{W}})$ *est séparé si et seulement si, pour tout* $i \in I$, $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *l'est.*

Démonstration. Admise. □

1.4 Topologie d'un espace métrique.

Définition 1.4.1. *Un espace métrique* (E,d) *est un ensemble* E *muni d'une distance* d*, c'est-à-dire d'une application* $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ *vérifiant les propriétés suivantes. Pour tous* $x, y, z \in E$,

(d_1) $d(x;y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$,

(d_2) $d(x;y) = d(y,x)$,

(d_3) $d(x;z) \leq d(x;y) + d(y;z)$.

Pour $a \in E$ et $r \geq 0$ on note par

$$\begin{array}{rrcl} & B(a;r[& = & \{x \in E;\ d(x;a) < r\} \\ \text{resp.} & B(a;r] & = & \{x \in E;\ d(x;a) \leq r\} \end{array}$$

la boule ouverte (resp. fermée) du centre a et du rayon r dans E.

Définition 1.4.2. *On dit qu'une partie A de E est bornée si il existe une boule $B(a;r]$ dans E telle que $A \subset B(a;r]$.*

Proposition 1.4.3. *La famille $\mathcal{W} = \{B(a;r[;\ a \in X,\ r \geq 0\}$ vérifie les conditions (i) et (ii) de la Proposition 1.1.12.*

Définition 1.4.4. *La topologie usuelle d'un espace métrique (E,d) est $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ pour $\mathcal{W} = \{B(a;r[;\ a \in E, r \geq 0\}$. Elle est séparée.*

Proposition 1.4.5. *Une partie U d'un espace métrique (E,d) est ouverte si et seulement si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x;r[\subset U$.*

Proposition 1.4.6. *Une partie F d'un espace métrique (E,d) est fermée si et seulement si, pour toute suite convergente d'éléments de F, la limite est dans F.*

1.5 Topologie d'un espace vectoriel normé.

Définition 1.5.1. *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme $\|\cdot\|$ sur E est une application de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que*

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

(ii) $\forall x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

(iii) $\|x\| = 0$ *implique* $x = 0$.

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$ est appelé un espace vectoriel normé ("evn" en abrégé).

Remarque 1.5.2. *Un evn $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrique pour la distance $d_{\|\cdot\|}(x;y) = \|x - y\|$.*

Définition 1.5.3. *La topologie usuelle d'un evn $(E,\|\cdot\|)$ est la topologie de l'espace métrique $(E, d_{\|\cdot\|})$.*

Remarque 1.5.4. *Dans un evn $(E, \|\cdot\|)$,*

$$B(a;r[= a + B(0;r[\text{ et } B(a;r] = a + B(0;r]\,.$$

1.6 Applications continues, homéomorphismes.

Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$.

Définition 1.6.1.

1) *L'application $f : X \to Y$ est continue si, pour tout $V \in \mathcal{T}_Y$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.*
2) *$\ell \in Y$ est limite de f en $a \in X$ si, pour tout $V \in \mathcal{V}(\ell)$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$.*
3) *f est continue en $x \in X$ si $f(x)$ est limite de f en x.*

Proposition 1.6.2. *$f : X \to Y$ est continue si et seulement si f est continue en x, pour tout $x \in X$.*

Proposition 1.6.3. *$f : X \to Y$ est continue si et seulement si, pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est fermé dans X.*

Proposition 1.6.4. *Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques. Soit $Y = \prod_{i\in I} X_i$ muni de la topologie produit. Une application $f : X \to Y$ est continue si et seulement si, pour tout $i \in I$, $p_i \circ f$ est continue.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Définition 1.6.5.

1) *Une application $f : X \to Y$ est ouverte si, pour tout ouvert O de X, $f(O)$ est ouvert dans Y.*
2) *Une application $f : X \to Y$ est fermée si, pour tout fermé F de X, $f(F)$ est fermé dans Y.*
3) *Une application $f : X \to Y$ est un homéomorphisme si $f : X \to Y$ est bijective et les applications $f : X \to Y$ et $f^{-1} : Y \to X$ sont continues.*

Proposition 1.6.6. *Soit $f : X \to Y$ une bijection continue. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) *$f : X \to Y$ est ouverte.*
2) *$f : X \to Y$ est fermée.*
3) *$f : X \to Y$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Comme f est bijective, on a, en notant par $f^{\langle -1\rangle}$ la bijection réciproque de f,

$$\forall U \in \mathcal{P}(X),\ \left(f^{\langle -1\rangle}\right)^{-1}(U) = f(U)\,.$$

On en déduit $(1 \Leftrightarrow 3)$ et $(2 \Leftrightarrow 3)$. $\square$

2 Espaces compacts, espaces complets.

2.1 Compacité : premiéres propriétés.

Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique et P une partie de E.

Définition 2.1.1.

1) *On dit qu'une famille $\{U_\alpha,\, \alpha \in A\}$ est un recouvrement ouvert de P si, pour tout $\alpha \in A$, $U_\alpha \in \mathcal{T}$ et $P \subset \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$.*
2) *On dit que $\{U_\beta,\, \beta \in B\}$ est un sous-recouvrement du recouvrement ouvert $\{U_\alpha,\, \alpha \in A\}$ de P si $B \subset A$ et $P \subset \cup_{\beta\in B} U_\beta$.*
3) *On dit qu'un recouvrement ouvert $\{U_\alpha,\, \alpha \in A\}$ de P est fini si l'ensemble A est fini.*

Exemple 2.1.2. *Recouvrements ouverts de $\mathbb{R}$.*

1) *La famille $\{]a;b[; a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$.*
2) *La famille $\{]x-\epsilon;x+\epsilon[; x \in \mathbb{R}, \epsilon > 0\}$ est le même recouvrement.*
3) *La famille $\{]x-\epsilon;x+\epsilon[; x \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0\}$ en est un sous-recouvrement.*

Définition 2.1.3. *On dit que K est compact dans $(E,\mathcal{T})$ si, pour tout recouvrement ouvert de K, il en existe un sous-recouvrement fini.*

Proposition 2.1.4. *Dans un espace topologique* **séparé***, tout compact est fermé.*

Démonstration. Pour tous $x \in K$ et $y \in K^c$, il existe deux ouverts disjoints U_{xy} et O_{xy} tels que $x \in U_{xy}$ et $y \in O_{xy}$. Soit $y \in K^c$. $\{U_{xy},\ x \in K\}$ est un recouvrement ouvert de K donc il en existe un sous-recouvrement fini $\{U_{xy},\ x \in A_y\}$. L'intersection finie

$$O_y \ := \bigcap_{x\in A_y} O_{xy} \in \mathcal{T}\,,$$

contient y. De plus, pour $x \in A_y$, $U_{xy} \cap O_{xy} = \emptyset$ donc $U_{xy} \cap O_y = \emptyset$ et, comme les U_{xy} pour $x \in A_y$ recouvrent K, $O_y \cap K = \emptyset$. Ceci étant vrai pour tout $y \in K^c$, $\cup_{y\in K^c} O_y \subset K^c$. Comme chaque O_y contient y, $K^c \subset \cup_{y\in K^c} O_y$. D'où $K^c = \cup_{y\in K^c} O_y$ est ouvert. $\square$

Proposition 2.1.5. *Toute partie fermée F d'un compact K est compacte.*

Démonstration. Si $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ est un recouvrement ouvert de F alors $\{F^c\} \cup \{U_\alpha,\ \alpha \in A\}$ est un recouvrement ouvert du compact $K = (F^c \cap K) \cup F$. Donc, il existe A' fini tel que $\{F^c\} \cup \{U_\alpha,\ \alpha \in A'\}$ ou bien $\{U_\alpha,\ \alpha \in A'\}$ recouvre K. Dans les deux cas, $\{U_\alpha,\ \alpha \in A'\}$ recouvre F et il est fini. F est donc compact. □

Proposition 2.1.6. *Toute partie infinie I d'un compact K admet au moins un point d'accumulation.*

Démonstration. Par l'absurde. I n'admet pas de point d'accumulation donc, en particulier,

$$\forall x \in I,\ \exists U_x \in \mathcal{T};\ U_x \cap I = \{x\}\,. \tag{1}$$

Soit $x \in K \backslash I$. Comme x n'est pas point d'accumulation de I, il existe $U_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in U_x$ et $U_x \cap I = \emptyset$. $\{U_x,\ x \in K\}$ est un recouvrement ouvert du compact K. Il admet donc un sous-recouvrement fini $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$. Comme $I \subset K$, les éléments de I se répartissent dans les U_{x_j} avec $x_j \in I$. À cause de (1), un tel U_{x_j} contient au plus un élément de I. Contradiction puisque I est infini. □

Proposition 2.1.7. *Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et $f : X \to Y$ continue. Si $K \in \mathcal{P}(X)$ est compact, alors $f(K)$ l'est aussi.*

Démonstration. Si $\{U_\alpha,\ \alpha \in A\}$ est un recouvrement ouvert de $f(K)$ alors $\{f^{-1}(U_\alpha),\ \alpha \in A\}$ est recouvrement ouvert du compact K. Il existe donc $J \in \mathcal{P}(A)$ fini tel que $\{f^{-1}(U_\alpha),\ \alpha \in J\}$ recouvre K. $\{U_\alpha,\ \alpha \in J\}$ recouvre $f(K)$ et $f(K)$ est compact. □

Définition 2.1.8. *Un espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est localement compact si tout point de E admet un voisinage compact.*

2.2 Produits d'espaces compacts.

Théorème 2.2.1. *(***Théoréme de Tychonov.***) Tout produit d'espaces compacts est compact pour la topologie produit.*

Exemple 2.2.2. $[0;1]^{\mathbb{N}}$ *et* $[0;1]^{\mathbb{R}}$ *sont compacts pour la topologie produit.*

Démonstration. **Produit de deux espaces compacts seulement.**
Soit $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces compacts. Soit $\{O_\alpha, \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Comme les ouverts élémentaires forment une base de la topologie produit, il existe, pour tout $(x, y) \in X \times Y$, $U_{xy} \in \mathcal{T}_X$, $V_{xy} \in \mathcal{T}_Y$ et $\alpha(x; y) \in A$ tels que $(x; y) \in U_{xy} \times V_{xy} \subset O_{\alpha(x,y)}$. On fixe $y \in Y$. $\{U_{xy}; x \in X\}$ recouvre X. Par compacité de X, il existe $A_y \in \mathcal{P}(A)$ fini tel que $X \subset \cup_{x \in A_y} U_{xy}$. On a $y \in V_y := \cap_{x \in A_y} V_{xy} \in \mathcal{T}_Y$. Donc $\{V_y; y \in Y\}$ est un recouvrement ouvert de Y et, par compacité de Y, il existe $B \in \mathcal{P}(Y)$ fini tel que $Y \subset \cup_{y \in B} V_y$. Donc

$$X \times Y \subset X \times \bigcup_{y \in B} V_y = \bigcup_{y \in B} (X \times V_y) .$$

Pour $y \in B$,

$$X \times V_y = X \times \bigcap_{x \in A_y} V_{xy} \subset \Big(\bigcup_{x \in A_y} U_{xy} \Big) \times \Big(\bigcap_{x \in A_y} V_{xy} \Big) .$$

Pour tout $x \in A_y$,

$$\bigcap_{x' \in A_y} V_{x'y} \subset V_{xy} \text{ donc } X \times V_y \subset \bigcup_{x \in A_y} (U_{xy} \times V_{xy}) .$$

On obtient donc

$$X \times Y \subset \bigcup_{y \in B} \bigcup_{x \in A_y} (U_{xy} \times V_{xy}) \subset \bigcup_{y \in B} \bigcup_{x \in A_y} O_{\alpha(x,y)} ,$$

ce qui donne un sous-recouvrement fini de $\{O_\alpha, \alpha \in A\}$. □

2.3 Compacts dans un espace métrique.

Soit (X, d) un espace métrique (donc séparé).

Proposition 2.3.1. *Dans un espace métrique, tout compact est borné.*

Démonstration. Du recouvrement ouvert $\{B(x; r[, x \in K, r > 0\}$ d'un compact K, on peut en extraire un fini : $\cup_{1 \leq i \leq n} B(x_i; r_i[$. Soit $x_0 \in X$. D'aprés l'inégalité triangulaire, on peut trouver $r_0 > 0$ assez grand tel que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $B(x_i; r_i[\subset B(x_0; r_0[$. Donc $K \subset B(x_0; r_0[$. □

Proposition 2.3.2. *Soit $X = \mathbb{R}^d$ muni de la topologie usuelle et $K \subset E$. Alors*

$$(K \text{ est compact }) \Leftrightarrow (K \text{ est fermé et borné }) .$$

Attention ! Faux en général, cf. exemple 2.3.9.

Démonstration.
$(\Rightarrow)$: cf. Propositions 2.1.4 et 2.3.1.
$(\Leftarrow)$: K est contenu dans $[-M; M]^d$ qui est compact pour la topologie produit (cf. théoréme 2.2.1). Comme la topologie produit coïncide avec la topologie usuelle, $[-M; M]^d$ est compact pour cette dernière. K étant fermé, il est aussi compact (cf. Proposition 2.1.5). □

Proposition 2.3.3. *Soit (X,d) un espace métrique. Il est localement compact si et seulement si, pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$, tel que la boule fermée $B(x; r]$ est compacte.*

Démonstration.
$(\Leftarrow)$: Pour tout $x \in X$, $B(x; r]$ est un voisinage compact de x puisqu'il contient $B(x; r[$.
$(\Rightarrow)$: Pour un voisinage compact K de x, il existe $r > 0$ tel que $B(x; 2r[\subset K$. On a $x \in B(x; r] \subset B(x; 2r[\subset K$. $B(x; r]$ est un fermé dans un compact donc est compacte. □

Définition 2.3.4. *On dit que $K \subset X$ est précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir K par un nombre fini de boules ouvertes du rayon $\varepsilon > 0$:*

$$K \subset B(x_1; \varepsilon[\cup \ldots \cup B(x_n; \varepsilon[.$$

Lemme 2.3.5. *Soit $K \in \mathcal{P}(X)$. Si toute partie infinie I de K admet un point d'accumulation dans K alors K est précompact.*

Démonstration. Par contraposée. Il existe $\epsilon > 0$ tel que K ne peut être recouvert par un nombre fini de boule de rayon ϵ. Soit $x_0 \in K$. Comme K n'est pas recouvert par $B(x_0; \epsilon[$, il existe $x_1 \in K$ tel que $d(x_0; x_1) \geq \epsilon$. Supposons construits $x_0, x_1, \cdots, x_n$ tels que, pour tous $i \neq j$ entre 1 et n, on ait $d(x_i; x_j) \geq \epsilon$. Comme K ne peut être recouvert par les boules $B(x_0; \epsilon[$, $\cdots$, $B(x_n; \epsilon[$, qui sont en nombre fini, il existe $x_{n+1} \in K$ tel que, pour tout $0 \leq i \leq n$, $d(x_i; x_{n+1}) \geq \epsilon$. Par récurrence, on obtient ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que, pour $n \neq m$, $d(x_n; x_m) \geq \epsilon > 0$. L'ensemble $I = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ est infini et sans point d'accumulation. □

Lemme 2.3.6. *Soit $K \in \mathcal{P}(X)$. Si toute partie infinie I de K admet un point d'accumulation dans K alors toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente dans K.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$. Soit $X_0 = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Si X_0 est un ensemble fini alors la suite est stationnaire donc convergente. Sinon, par hypothèse, X_0 a un point d'accumulation $\ell \in K$. Il existe donc m_0 tel que $x_{m_0} \neq \ell$ et $x_{m_0} \in B(\ell; 1[$. On pose $r_0 = 1$ et $\phi(0) = m_0$. Supposons construits $\phi(0) < \cdots < \phi(n)$ et $r_0 \geq \cdots \geq r_n$ tels que, pour $0 \leq k \leq n$, $x_{\phi(k)} \in B(\ell; r_k[$ et

$$r_k = \min\Big(2^{-k}; \min_{p\leq\phi(k-1)} d(\ell, x_p)\Big)\,.$$

$$\text{Soit} \quad r_{n+1} = \min\Big(2^{-(n+1)}; \min_{p\leq\phi(n)} d(\ell; x_p)\Big)\,.$$

Il existe m tel que $x_m \neq \ell$ et $x_m \in B(\ell; r_{n+1}[$. Nécessairement $\phi(n+1) = m > \phi(n)$. Par récurrence, on construit ainsi une sous-suite $(x_{\phi(n)})_n$ qui converge vers ℓ puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\phi(n)} \in B(\ell; 2^{-n}[$. □

Lemme 2.3.7. *Soit $K \in \mathcal{P}(X)$. Si, de toute suite d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite convergente dans K alors, pour tout recouvrement ouvert $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ de K,*

$$\exists\epsilon > 0;\ \forall x \in K, \exists\alpha \in A;\ B(x; \epsilon[\subset U_\alpha\,.$$

Démonstration. Par l'absurde. Il existe $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $\alpha \in A$, $B(x_n; 2^{-n}[\not\subset U_\alpha$. Soit $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergeant vers un certain $x \in K$. Il existe $\beta \in A$ tel que $x \in U_\beta$. Comme U_β est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x; r[\subset U_\beta$. En utilisant l'inégalité triangulaire et la convergence $x_{\phi(n)} \to x$, on peut trouver p assez grand tel que $B(x_p; 2^{-p}[\subset B(x; r[\subset U_\beta$. Contradiction. □

Théorème 2.3.8. *(***Bolzano-Weierstrass.***) Soit (X,d) un espace métrique et $K \in \mathcal{P}(X)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
1) De toute suite d'éléments de K on peut extraire une sous-suite convergente dans K.
2) Toute partie infinie I de K admet un point d'accumulation dans K.
3) K est compact.

Démonstration.
$(1 \Rightarrow 2)$: I contient une suite de points deux à deux distints qui converge.

Sa limite est un point d'accumulation de I.
$(2 \Rightarrow 1)$: cf. Lemme 2.3.6.
$(3 \Rightarrow 2)$: cf. Proposition 2.1.6.
$(2 \Rightarrow 3)$: Soit $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de K. Par $(2 \Rightarrow 1)$ et le lemme 2.3.7,

$$\exists \epsilon > 0;\ \forall x \in K, \exists \alpha \in A;\ B(x;\epsilon[\subset U_\alpha\,.$$

D'autre part, d'après le lemme 2.3.5, K est précompact. Donc

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i;\epsilon[\subset \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha\,,$$

où $J \in \mathcal{P}(A)$ est fini. □

Exemple 2.3.9. *Soit E l'espace des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme*

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|\,.$$

La boule $B(0;1]$ centrée sur la fonction nulle est fermée et bornée mais elle n'est pas compacte. On ne peut extraire de sous-suite convergente de la suite $(\mathbb{1}_{[n;n+1[})_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Définition 2.3.10. *Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques. $f : X \to Y$ est uniformément continue sur X si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, x' \in X$,*

$$\big(d_X(x;x') < \delta\big) \quad\Rightarrow\quad \big(d_Y(f(x);f(x')) < \varepsilon\big)\,.$$

Théorème 2.3.11. *(**Théorème de Heine.**) Soit (X,d_X) et (Y,d_Y) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ continue. Si X est compact alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par continuité, il existe, pour chaque $x \in X$, un $\delta_x > 0$ tel que $f(B(x;2\delta_x[) \subset B(f(x);\epsilon/2[$. $\cup_{x\in X} B(x,\delta_x[$ est un recouvrement ouvert du compact X donc $X \subset \cup_{1\le i\le n} B(x_i,\delta_{x_i}[$. Soit $\delta = \min_{1\le i\le n} \delta_{x_i}$. Soit $x, x' \in X$ avec $d(x;x') < \delta$. Il existe i tel que $x \in B(x_i;\delta_{x_i}[$. Par l'inégalité triangulaire, $x' \in B(x_i;2\delta_{x_i}[$. Comme

$$d(f(x);f(x')) \le d(f(x);f(x_i)) \;+\; d(f(x');f(x_i))\,,$$

on a $d(f(x);f(x')) < 2 \times \epsilon/2 = \epsilon$. □

2.4 Espaces métriques complets.

Définition 2.4.1. *Soit (X, d) un espace métrique.*

1). Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n, p \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow d(x_{n+p}; x_n) < \epsilon\,.$$

2). (X, d) est complet si toute suite de Cauchy de X converge vers un élément de X.

Proposition 2.4.2.

1). Toute suite convergente est de Cauchy.

2). Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

3). Toute suite de Cauchy est bornée.

4). Une suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge vers la même limite.

5). Soit (X, d) un espace métrique complet et $F \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. F est fermé ssi F est complet.

Démonstration. Exercice. Rappel : Une injection croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifie, pour tout n, $\varphi(n) \geq n$. □

Théorème 2.4.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1). X est compact.

2). Toute partie infinie de X admet un point d'accumulation.

3). Toute suite de X admet un sous-suite convergente.

4). X est précompact et complet.

Démonstration.
$(1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3)$: c'est le théorème de Bolzano-Weierstrass (théorème 2.3.8).
$(1 \Rightarrow 4)$: X est précompact par le lemme 2.3.5. Une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence donc elle converge par le 4) de la proposition 2.4.2.
$(4 \Rightarrow 1)$: preuve admise. □

Proposition 2.4.4. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
1) La boule fermée $B(0; 1]$ est compacte.

2) Pour tout $e \in E$ et tout $r > 0$, la boule fermée $B(e; r]$ est compacte.
3) E est localement compact.

Démonstration.
$(1 \Rightarrow 2)$: Soit $f : E \to E$ définie par $f(x) = e + rx$. Elle est continue. Comme $B(0; 1]$ est compacte, $B(e; r] = f(B(0; 1])$ l'est aussi.
$(2 \Rightarrow 3)$: cf. Proposition 2.3.3.
$(3 \Rightarrow 1)$: Par la Proposition 2.3.3, il existe $r > 0$ tel que $B(0; r]$ soit compacte. Comme $f : x \mapsto x/r$ est continue, $B(0; 1] = f(B(0; r])$ est compacte. □

Proposition 2.4.5. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn localement compact. Alors E est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Elle est bornée donc incluse dans une boule $B(0; R]$ qui est compacte, par hypothèse. La suite admet donc une valeur d'adhérence. Comme elle est de Cauchy, elle converge. □

Proposition 2.4.6. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et F un sous-espace de dimension finie. F est complet (donc fermé) et toutes les normes sur F sont équivalentes.*

Démonstration. Soit d la dimension de F. On traite d'abord le cas $F = \mathbb{R}^d$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$. Pour tous $x = (x_1; \cdots; x_d)$ et $y = (y_1; \cdots; y_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, on a, par l'inégalité triangulaire et en notant par $(e_1; \cdots; e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$,

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| \leq \sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j| \cdot \|e_j\| \leq d \cdot |x - y|_e \cdot \sup_{1\leq j\leq d} \|e_j\| .$$

Donc $\|\cdot\|$ est lipschitzienne donc continue. Soit $\|\cdot\|'$ une autre norme sur $\mathbb{R}^d$. Elle est aussi continue. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{\|x\|}{\|x\|'} = \frac{|x|_e \|x/|x|_e\|}{|x|_e \|x/|x|_e\|'} = \frac{\|x/|x|_e\|}{\|x/|x|_e\|'}$$

donc $\sup_{x\neq 0} \|x\|(\|x\|')^{-1} = \sup_{|x|_e=1} \|x\|(\|x\|')^{-1}$. Par la proposition 2.3.2, la sphère $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d; |x|_e = 1\}$ est compacte. Comme $\|\cdot\|(\|\cdot\|')^{-1}$ est continue, elle est bornée sur $\mathbb{S}^{d-1}$ (cf. propositions 2.1.7 et 2.3.2). Donc les “sup” précédents sont finis et $\|\cdot\| \leq C\|\cdot\|'$, pour un certain $C > 0$ (l'inégalité

est bien sûr valable pour $x = 0$). Par le même argument, en échangeant les rôles de $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$, on obtient $\|\cdot\|' \leq C'\|\cdot\|$, pour un certain $C' > 0$. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes.
D'après le résultat précédent, on peut choisir une norme sur $\mathbb{R}^d$ pour montrer la complétude. On choisit la $|\cdot|_\infty$, la norme "sup" sur $\mathbb{R}^d$ définie par $|x|_\infty = \sup_{1\leq j\leq d} |x_j|$, pour $x = (x_1; \cdots; x_d)$. Soit $(x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$ de Cauchy. Pour $1 \leq j \leq d$, comme $|y_j| \leq |y|_\infty$, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $(x_j(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc converge vers un certain x_j. Soit $x = (x_1; \cdots; x_d)$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x(n) - x|_\infty = \max_{1\leq j\leq d} |x_j(n) - x_j|$, $(x(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour $|\cdot|_\infty$.
On revient au cas général. Soit $(f_1, \cdots, f_d)$ étant une base de F et $\varphi : \mathbb{R}^d \to F$ définie par $\varphi(a_1, \cdots, a_p) = \sum_{j=1}^n a_j f_j$. φ est linéaire bijective.
Si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes sur F, $\|\cdot\| \circ \varphi$ et $\|\cdot\|' \circ \varphi$ sont deux normes sur $\mathbb{R}^d$. Ces dernières sont équivalentes donc les premières aussi, puisque φ est bijective.
Soit $\|\cdot\|$ une norme sur F. Comme φ est une isométrie de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\| \circ \varphi)$ sur $(F, \|\cdot\|)$, φ^{-1} transforme les suites de Cauchy dans F en suites de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$. Ces dernières convergent dans $\mathbb{R}^d$ donc, par continuité de φ, les premières convergent dans F. □

2.5 Théorème de Riesz.

Théorème 2.5.1. *(***Théorème de Riesz***) Un evn est localement compact si et seulement s'il est de dimension finie.*

Démonstration.
$(\Leftarrow)$: Un espace F de dimension d est en bijection bicontinue avec $\mathbb{R}^d$: $\varphi : \mathbb{R}^d \to F$ (cf. preuve de la proposition 2.4.6). En particulier, sa boule unité fermée B est l'image par φ d'un fermé borné de $\mathbb{R}^d$. Ce dernier est compact (cf. proposition 2.3.2). Comme φ est continue, B est compacte (cf. proposition 2.1.7). F est donc localement compact d'après la proposition 2.4.4.
$(\Rightarrow)$: Soit E evn localement compact. Par la proposition 2.4.4, $B = B(0; 1]$ est compacte. Il existe donc $x_1, \cdots, x_n \in B$ tels que

$$B \subset \bigcup_{1\leq i\leq n} B(x_i; 1/2[\,.$$

Soit F le sous-espace engendré par $\{x_1, \cdots, x_n\}$. Comme il est de dimension finie, il est complet donc fermé (cf. proposition 2.4.6). On montre par l'absurde que $E = F$. Supposons qu'il existe $a \in E \setminus F$. Comme $a \notin F$, la distance r de a à F est strictement positive. Par définition de cette distance, il existe $x \in F$ tel que $r \leq \|x - a\| < 3r/2$. Soit $y = (a - x)/\|a - x\|$. Comme $y \in B$, il existe i tel que $y \in B(x_i; 1/2[$. On a

$$\begin{aligned} a = x + \|a - x\|y &= x + \|a - x\|x_i + \|a - x\|(y - x_i) \\ &= x' + \|a - x\|(y - x_i) \end{aligned}$$

avec $x' := x + \|a - x\|x_i \in F$. Donc

$$r \leq \|a - x'\| = \|a - x\| \cdot \|y - x_i\| < \|a - x\|/2 < 3r/4\,.$$

Contradiction. □

2.6 Théorème du point fixe de Picard.

Soit (X,d) un espace métrique.

Définition 2.6.1. *Soit $f : X \to X$.*

1). f est contractante s'il existe $k \in [0; 1[$ tel que, pour tout $x, y \in X$, $d(f(x); f(y)) \leq kd(x; y)$.

2). $a \in X$ est un point fixe de f si $f(a) = a$.

Théorème 2.6.2. *Soit (X, d) un espace métrique complet non-vide. Toute application contractante $f : X \to X$ admet un unique point fixe.*

Démonstration. Si x et y sont des points fixes alors $d(x; y) = d(f(x); f(y)) \leq kd(x; y)$. Comme $k < 1$, $d(x; y) = 0$ et $x = y$. Soit $x \in X$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f^{\circ n}(x))_n$. Pour tout n,

$$d(x_{n+1}; x_n) \leq kd(x_n; x_{n-1}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1; x_0)\,.$$

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+p}; x_n) \leq \sum_{\ell=0}^{p-1} d(x_{n+1+\ell}; x_{n+\ell}) \leq k^n d(x_1; x_0) \sum_{\ell=0}^{p-1} k^\ell \leq k^n d(x_1; x_0)(1-k)^{-1}\,.$$

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Comme X est complet, elle converge vers un certain $a \in X$. La sous-suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers a. f étant contractante, elle est lipschitzienne donc continue. D'où $f(a) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = a$. □

2.7 Prolongement d'applications uniformément continues.

Théorème 2.7.1. *Soit (X, d_X) un espace métrique, X_1 un sous-ensemble dense de X, (Y, d_Y) un espace métrique complet et $f : X_1 \to Y$ une application uniformément continue. Il existe une unique fonction continue $\tilde{f} : X \to Y$ telle que, pour tout $x \in X_1$, $f(x) = \tilde{f}(x)$. De plus, $\tilde{f}$ est aussi uniformément continue.*

Démonstration. Si g et h sont deux prolongements continus, alors, par densité, $x = \lim x_n$ avec $x_n \in X_1$ et $g(x) = \lim f(x_n) = h(x)$.
Soit $x \in X \setminus X_1$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_1^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x dans X. C'est donc une suite de Cauchy. Comme f est uniformément continue, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans Y, qui est complet, donc elle converge vers un $y \in Y$. On pose $\tilde{f}(x) = y$. Si $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_1^{\mathbb{N}}$ converge aussi vers x alors $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le même y car, d'après l'uniforme continuité,

$$d_Y\big(f(x'_n); f(x_n)\big) \to 0\,, \text{quand } n \to \infty\,.$$

$\tilde{f}$ est donc bien définie.
Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x_1, x'_1 \in X_1$,

$$d_X(x_1; x'_1) \;<\; \delta \quad \Rightarrow \quad d_Y\big(f(x_1); f(x'_1)\big) \;<\; \epsilon/3\,. \tag{2}$$

Soit $x \in X$ et $x' \in X$ avec $d_X(x; x') < \delta/3$. Il existe $x_1, x'_1 \in X_1$ tels que $d_X(x; x_1) < \delta/3$, $d_Y(f(x_1); f(x)) < \epsilon/3$, $d_X(x', x'_1) < \delta/3$ et $d_Y(f(x'_1); f(x')) < \epsilon/3$. Par l'inégalité triangulaire, $d_X(x_1; x'_1) < \delta$. Par l'inégalité triangulaire et (2), $d_Y(f(x); f(x')) < \epsilon$. □

2.8 Espaces de fonctions continues.

On procède à quelques rappels sur les espaces de fonctions continues. Une version plus détaillée est présentée en appendice.

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé compact et (Y, d) un espace métrique complet. L'espace $\mathcal{C}(X, Y)$ des fonctions continues de X dans Y est un espace métrique complet pour la distance de la convergence uniforme :

$$d_\infty : \mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(X, Y) \;\to \mathbb{R}^+$$

définie par, pour $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$,

$$d_\infty(f, g) \;=\; \sup_{x\in X} d\big(f(x), g(x)\big)\ ,$$

Définition 2.8.1. *Soit $a \in X$. Une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ est équicontinue en a si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a);\ \forall f \in \mathcal{A}, \forall x \in X,\ x \in V \ \Rightarrow\ d\big(f(x), f(a)\big) \;<\; \varepsilon\,.$$

$\mathcal{A}$ est équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout a de X.

Théorème 2.8.2. *(***Théorème d'Ascoli***) Soit X un espace topologique compact, (Y,d) un espace métrique complet et $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1). L'adhérence de $\mathcal{A}$ est compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$.

2). $\mathcal{A}$ est équicontinue sur X et, pour tout $a \in X$, l'adhérence de $\{f(a); f \in \mathcal{A}\}$ est compacte dans Y.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ associée à la distance d_∞.

Théorème 2.8.3. *(***Théorème de Stone-Weierstrass, cas réel***). Soit X un espace topologique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que*

1). La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$.

2). Pour tout $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Théorème 2.8.4. *(***Théorème de Stone-Weierstrass, cas complexe***). Soit X un espace topologique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ telle que*

1). La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$.

2). Pour tout $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

3). Pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

2.9 Applications linéaires continues.

Définition 2.9.1. *Soit E et F deux evns sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une application $f : E \to F$ est linéaire si, pour tous $x, x' \in E$ et $a, b \in \mathbb{K}$, $f(ax + bx') = af(x) + bf(x')$.*

Proposition 2.9.2. *Soit E et F deux evns sur $\mathbb{K}$ et $f : E \to F$ linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1). f est continue.

2). f est continue en un point de E.

3). $\exists c > 0\,;\ \forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq c\|x\|$.

4). $\sup_{x\neq 0} \|f(x)\|/\|x\| < \infty$.

5). $\sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| < \infty$.

6). $\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty$.

7). Si $A \in \mathcal{P}(E)$ est bornée, $f(A)$ est bornée.

8). f est uniformément continue.

Démonstration. $(1 \Rightarrow 2)$, $(3 \Rightarrow 4)$, $(4 \Rightarrow 5)$, $(5 \Rightarrow 6)$, $(8 \Rightarrow 1)$: exercice.
$(2 \Rightarrow 3)$: On suppose f continue en a. Soit $g : E \to E$ définie par $g(x) = x+a$ et $h : F \to F$ définie par $h(y) = y - f(a)$. Comme g et h sont continues, $h\circ f\circ g$ est continue en 0. Or, pour tout x, $h\circ f\circ g(x) = f(x+a)-f(a) = f(x)$ par linéarité. Donc f continue en 0. Il existe donc $r > 0$ tel que $(\|x\| \leq r \Rightarrow \|f(x)\| \leq 1)$. Soit $c = 1/r$. Pour $x \neq 0$, $\|rx/\|x\|\| \leq r$ donc $\|f(rx/\|x\|)\| \leq 1$ soit $\|f(x)\| \leq c\|x\|$. Cette formule est encore valable si $x = 0$.
$(6 \Rightarrow 7)$: On note par c le sup dans 6). Il existe $r > 0$ tel que $A \subset B(0, r]$. Pour $x \in B(0, r] \setminus \{0\}$, $\|f(x)\| = \|x\|\|f(x/\|x\|)\| \leq \|x\|c \leq cr$. Comme $f(0) = 0$, $f(B(0, r]) \subset B(0, cr]$. Comme $A \subset B(0, r]$, $f(A)$ est borné.
$(7 \Rightarrow 8)$: $f(B(0; 1])$ est borné donc il existe $c > 0$ tel que $(\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|f(x)\| \leq c)$. Comme précédemment, on a, pour tout x, $\|f(x)\| \leq c\|x\|$. Donc, pour $x, x' \in E$, $\|f(x) - f(x')\| = \|f(x - x')\| \leq c\|x - x'\|$. f est c-lipschitzienne donc uniformément continue. □

Remarque 2.9.3. *Pour $f : E \to F$ linéaire continue,*

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|\,.$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 2.9.4. *On note par $\mathcal{L}(E;F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. Pour $f \in \mathcal{L}(E;F)$, la valeur commune de la remarque 2.9.3 est la norme de f dans $\mathcal{L}(E;F)$, notée $\|f\|_{\mathcal{L}(E;F)}$ (ou $\|f\|$).*

Exemple 2.9.5. *L'application $I : \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$I(g) \;=\; \int_0^1 g(t)\,dt\,,$$

pour $g \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, est linéaire continue de norme $\|I\| = 1$.

Exemple 2.9.6. *Soit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ est borné, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. L'application $I : \mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par, pour $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$,*

$$I(g) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt$$

est bien définie, linéaire mais pas continue. En effet, en prenant $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(t) = nt$ si $0 \leq t \leq 1/n$, $g_n(t) = 1$, si $1/n \leq t \leq n$, $g_n(t) = n(n+1/n-t)$, si $n \leq t \leq n+1/n$, et nulle ailleurs, on voit que $(I(g_n))_n$ tend vers l'infini alors que, pour tout n, $\|g_n\|_\infty = 1$.

Proposition 2.9.7. *Soit E, F deux evns.*

1). *$\mathcal{L}(E;F)$ est un espace vectoriel et l'application $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E;F)} : \mathcal{L}(E;F) \to \mathbb{R}^+$ définit une norme.*
2). *Si F est de Banach alors $(\mathcal{L}(E;F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E;F)})$ l'est aussi.*

Démonstration.
1) : Exercice.
2) : Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E;F)$. Soit $x \in E$. $(f_n(x))_n$ est donc une suite de Cauchy dans F qui est complet. Elle converge vers un certain $f(x)$. Ceci définit $f : E \to F$. Par passage à la limite, on voit que f est linéaire. Comme $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E;F)$, on voit que $(f_n)_n$ converge vers f, uniformément sur la boule unité fermée de E. On en déduit que f est bornée sur cette dernière, donc $f \in \mathcal{L}(E;F)$, et que $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}(E;F)} \to 0$. $\square$

Définition 2.9.8. *Pour un evn E sur un corps $\mathbb{K}$, on note $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. C'est le* **dual topologique** *de E. Pour tout $u \in E'$ et $x \in E$ on note $(u,x) = u(x) \in \mathbb{K}$. E' muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{K})}$ est le* **dual fort** *de E.*

Corollaire 2.9.9. *Le dual fort E' d'un evn E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Comme $\mathbb{K}$ est complet, il suffit d'appliquer le 2) de la proposition 2.9.7. □

3 Théorème de Hahn-Banach et ses conséquences.

3.1 Lemme de Zorn.

Définition 3.1.1. *Soit Z un ensemble. Un relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur Z est une relation vérifiant*

1). $\forall x \in Z$, $x\mathcal{R}x$;

2). $\forall x, y \in Z$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

3). $\forall x, y, z \in Z$, $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Dans ce cas, on dit que $(Z, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné.

Définition 3.1.2. *Soit $(Z, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit $A \in \mathcal{P}(Z)$.*

1). A est totalement ordonnée si $\forall x, y \in A$, $(x \leq y$ ou $y \leq x)$.

2). $z \in Z$ majore A (est un majorant de A) si $\forall x \in A$, $x \leq z$.

3). $a \in A$ est un élément maximal de A si $\forall x \in A$, $a \leq x \Rightarrow x = a$.

Définition 3.1.3. *Soit $(Z, \leq)$ un ensemble ordonné. L'ordre est inductif si toute partie totalement ordonnée de Z admet un majorant.*

Théorème 3.1.4. *(**Lemme de Zorn**). Tout ensemble non vide ordonné inductif admet un élément maximal.*

Démonstration. Admise (elle utilise l'axiome du choix). □

3.2 Théorème d'Hahn-Banach : forme analytique.

Définition 3.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une application $p : E \to \mathbb{R}^+$ est une sous-norme si*

1). $\forall x, y \in E$, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

2). $\forall x \in E$, $\forall t > 0$, $p(tx) = tp(x)$.

C'est une semi-norme si, en outre, pour tout $t \in \mathbb{K}$, $p(tx) = |t|p(x)$.

Théorème 3.2.2. *(***Théorème de Hahn-Banach analytique réel***). Soit E un $\mathbb{R}$-ev muni d'une sous-norme p. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant, pour tout $x \in F$, $f(x) \leq p(x)$. Il existe une forme linéaire $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge f et telle que, pour tout $x \in E$, $\tilde{f}(x) \leq p(x)$.*

Démonstration. Soit Z l'ensemble des applications linéaires h, définie sur un sous-espace $D(h)$ de E qui contient F, et à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que h prolonge f et, pour tout $x \in D(h)$, $h(x) \leq p(x)$. Z contient f. Pour $h_1, h_2 \in Z$, $h_1 \leq h_2$ si $D(h_1) \subset D(h_2)$ et si h_2 prolonge h_1. $(Z, \leq)$ est un ensemble ordonné. Soit $A = (h_i)_{i \in I}$ une partie totalement ordonnée de Z. Soit h définie sur

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i)$$

par $h(x) = h_i(x)$ si $x \in D(h_i)$. h est bien définie (car A est totalement ordonnée), appartient à Z et majore A. L'ordre est donc inductif. Par le lemme de Zorn (cf. théorème 3.1.4), Z admet un élément maximal $\tilde{f}$. Pour conclure la preuve, il suffit de montrer que $D(\tilde{f}) = E$.

Supposons qu'il existe $x_0 \in E \setminus D(\tilde{f})$. Nécessairement $x_0 \neq 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit h définie sur $D(h) = D(\tilde{f}) + \mathbb{R}x_0$ par $h(x + tx_0) = \tilde{f}(x) + t\alpha$. Admettons provisoirement qu'on peut choisir α de sorte que $h \in Z$. Alors, dans ce cas, $\tilde{f} \leq h$ mais $\tilde{f} \neq h$ puisque $D(\tilde{f})$ est strictement inclu dans $D(h)$. Ceci contredit la maximalité de $\tilde{f}$ et montre que $D(\tilde{f}) = E$.

Il reste à trouver α tel que $h \in Z$. Pour $x, y \in D(\tilde{f})$,

$$\tilde{f}(x) + \tilde{f}(y) = \tilde{f}(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x+x_0) + p(y-x_0)\,.$$

Donc $\tilde{f}(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \tilde{f}(x)$. Pour

$$S = \sup_{y \in D(\tilde{f})} \left(\tilde{f}(y) - p(y-x_0)\right),\ I = \inf_{x \in D(\tilde{f})} \left(p(x+x_0) - \tilde{f}(x)\right),$$

on a $S \leq I$. Soit $\alpha \in [S; I]$. Pour $z \in D(\tilde{f})$ et $t \in \mathbb{R}$, on vérifie que $h(z+tx_0) \leq p(z+tx_0)$. C'est vrai si $t = 0$ car $\tilde{f}(z) \leq p(z)$. Pour $t > 0$, on a

$$h(z+tx_0) = t\big(\tilde{f}(z/t) + \alpha\big) \leq t\big(\tilde{f}(z/t) + I\big)$$
$$\leq t\big(\tilde{f}(z/t) + p(z/t + x_0) - \tilde{f}(z/t)\big) = p(z+tx_0)\,.$$

Pour $t < 0$, on obtient de même le résultat en utilisant cette fois $\alpha \geq S$. □

Remarque 3.2.3. *Dans le cadre du théorème précédent, on a, pour tout $x \in E$, $-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq p(-x)$ donc $-p(-x) \leq \tilde{f}(x) \leq p(x)$ soit*

$$|\tilde{f}(x)| \leq \max(p(-x); p(x))\,.$$

En particulier, si p est une semi-norme, on a, pour tout $x \in E$, $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.

Théorème 3.2.4. *(***Théorème de Hahn-Banach analytique complexe***). Soit E un $\mathbb{C}$-ev muni d'une semi-norme p. Soit F un sous-espace vectoriel de E et $f : F \to \mathbb{C}$ une forme linéaire vérifiant, pour tout $x \in F$, $|f(x)| \leq p(x)$. Il existe une forme linéaire $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$ qui prolonge f et telle que, pour tout $x \in E$, $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$.*

Démonstration. $\Re(f)$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur E, vu comme $\mathbb{R}$-ev, qui vérifie $\Re(f) \leq |\Re(f)| \leq |f| \leq p$. Par le théorème d'Hahn-Banach réel (cf. théorème 3.2.2), il existe $g : E \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$-linéaire qui prolonge $\Re(f)$ et qui vérifie $g \leq p$.
On définit $\tilde{f} : E \to \mathbb{C}$ par $\tilde{f}(x) = g(x) - ig(ix)$. Pour $x \in F$, $-\Re(f)(ix) = -\Re(f(ix)) = -(f(ix) + \overline{f(ix)})/2 = -(if(x) - i\overline{f(x)})/2 = -i(f(x) - \overline{f(x)})/2 = \Im(f)(x)$. D'où $\tilde{f}(x) = g(x) - ig(ix) = \Re(f)(x) - i\Re(f)(ix) = \Re(f)(x) + i\Im(f)(x) = f(x)$. $\tilde{f}$ prolonge donc f.
$\tilde{f}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Pour $x \in E$, $\tilde{f}(ix) = g(ix) - ig(-x) = i(-ig(ix) + g(x)) = i\tilde{f}(x)$. Donc $\tilde{f}$ est $\mathbb{C}$-linéaire.
Il reste à voir que, pour tout $x \in E$, $|\tilde{f}(x)| \leq p(x)$. Si $\tilde{f}(x) = 0$, c'est vrai car p est positive. Si $\tilde{f}(x) \neq 0$, soit $z = \overline{\tilde{f}(x)}/|\tilde{f}(x)|$. Comme $\tilde{f}(zx) = z\tilde{f}(x) = |\tilde{f}(x)|$ est réel, $\tilde{f}(zx) = \Re(\tilde{f})(zx) = (g(zx) - ig(izx) + \overline{g(zx) - ig(izx)})/2$ avec $g(zx)$, $g(izx)$ réels. Donc $\tilde{f}(zx) = g(zx) \leq p(zx)$. Comme p est une semi-norme, $p(zx) = |z|p(x) = p(x)$ donc $|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(zx) \leq p(x)$. □

3.3 Conséquences dans les evns.

Proposition 3.3.1. *Soit E un evn, $x \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E. $x \in \overline{F}$ si et seulement si toute forme linéaire continue sur E, nulle sur*

F, s'annule en x. En particulier, F est dense dans E si et seulement si toute forme linéaire continue sur E, nulle sur F, est nulle.

Démonstration.
($\Rightarrow$) : Si $x \in \overline{F}$, il existe $(x_n)_n$ une suite d'éléments de F qui tend vers x. Pour toute forme linéaire continue f, $f(x) = \lim f(x_n)$. Si f est nulle sur F alors $f(x) = 0$.
($\Leftarrow$) : On montre la contraposée. Soit $x_0 \notin \overline{F}$. La somme $G = \overline{F} + \mathbb{C}x_0$ est directe et $d := d(x_0, \overline{F}) > 0$. Soit $g : G \to \mathbb{C}$ définie par $g(x + zx_0) = zd$, pour $x \in \overline{F}$ et $z \in \mathbb{C}$. g est linéaire. Comme $-z^{-1}x \in F$,

$$\begin{aligned} |g(x + zx_0)| &= |z|d \leq |z|\|z^{-1}x + x_0\|_E \\ &= \|x + zx_0\|_E \,. \end{aligned}$$

On peut donc appliquer le théorème d'Hahn-Banach complexe (cf. théorème 3.2.4) avec $p = \|\cdot\|_E$. Soit f un prolongement de g à E vérifiant $|f| \leq \|\cdot\|_E$. $f \in E'$, $f(x_0) = g(x_0) = 1$ et, pour tout $x \in \overline{F}$, $f(x) = g(x) = 0$.
($\Rightarrow$) : Soit $f \in E'$ nulle sur F. Pour $x \in E$, $x = \lim x_n$ avec $x_n \in F$ pour tout n, par densité. Par continuité de f, $f(x) = \lim f(x_n) = 0$.
($\Leftarrow$) : Soit $x \in E$. Comme toute forme linéaire continue sur E et nulle sur F s'annule en x, $x \in \overline{F}$ (par la première équivalence). D'où $E = \overline{F}$. □

Proposition 3.3.2. *Soit E un evn.*

1). $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\exists f \in E'$; $\|f\|_{E'} = 1$ et $f(x) = \|x\|_E$.

2). Pour tout $x \in E$,

$$\sup_{\|f\|_{E'}=1} |f(x)| = \sup_{\|f\|_{E'}\leq 1} |f(x)| = \sup_{\|f\|_{E'}\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|_{E'}} = \|x\|_E \,.$$

3). Pour $x \neq y$ dans E, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) \neq f(y)$.

Démonstration.
1). Soit $g : \mathbb{C}x \to \mathbb{C}$ définie par $g(zx) = z\|x\|_E$. g est linéaire et, pour tout z, $|g(zx)| = |z| \cdot \|x\|_E \leq \|zx\|_E$. Par le théorème d'Hahn-Banach complexe (cf. théorème 3.2.4) avec $p = \|\cdot\|_E$, il existe $f : E \to \mathbb{C}$ linéaire prolongeant g et telle que $|f| \leq p$. Donc $f \in E'$ et $\|f\|_{E'} \leq 1$. De plus, $f(x) = g(x) = \|x\|_E$ et donc $\|f\|_{E'} = 1$.
2). Soit $x \in E$. On a déjà vu l'égalité des trois suprema (cf. remarque 2.9.3). Soit S leur valeur. Pour $f \in E'$, par définition de $\|f\|_{E'}$, $|f(x)| \leq \|f\|_{E'} \cdot \|x\|_E$. Donc $S \leq \|x\|_E$. Par 1), $S = \|x\|_E$.
3). Soit $x \neq y$ dans E. On applique le 1) à $x - y$. □

Définition 3.3.3. *Pour un evn E sur un corps $\mathbb{K}$, le bidual de E, noté E'', est le dual de $(E', \|\cdot\|_{E'})$.*

Proposition 3.3.4. *Soit E un espace de Banach et $J : E \to E''$ définie par, pour $x \in E$, $J(x)$ est la forme linéaire continue sur E' définie par $J(x)(f) = f(x)$. J est une isométrie.*

Démonstration. Comme, pour tout $x \in E$ et tout $f \in E'$, $|J(x)(f)| \leq \|x\|_E \|f\|_{E'}$, $J(x) \in E''$ et J est bien définie. De plus, pour tout $x \in E$, $\|J(x)\|_{E''} \leq \|x\|_E$. Par la proposition 3.3.2, pour tout $x \in E$, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) = \|x\|_E$ et $\|f\|_{E'} = 1$. Donc $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$. $\square$

Définition 3.3.5. *Un espace de Banach E est réflexif si $J(E) = E''$.*

3.4 Théorème d'Hahn-Banach : forme géométrique.

Définition 3.4.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $C \in \mathcal{P}(E)$. On dit que C est convexe si*

$$\forall x, y \in C\,,\ \forall t \in [0;1]\,,\ tx + (1-t)y \in C\,.$$

Proposition 3.4.2. *Soit E un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, C un convexe ouvert de E contenant l'origine. Pour tout $x \in E$, on définit la jauge de C par*

$$p(x) \;=\; \inf\big\{t > 0;\ t^{-1}x \in C\big\}\,.$$

On note $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{K}; |z| = 1\}$.

1) *p est une sous-norme sur E.*
2) *$C \;=\; \{x \in \mathbb{E};\ p(x) < 1\}$.*
3) *Il existe une constante $r > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, $p(x) \leq r^{-1}\|x\|_E$.*
4) *$p(x)$ est une semi-norme si et seulement si, pour tout $x \in C$ et tout $z \in \mathbb{S}^1$, $zx \in C$.*

Démonstration.
3). Comme C est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B_E(0, 2r[\subset C$. $p(x)$ est bien défini car, pour $t = r^{-1}\|x\|_E$, $t^{-1}x \in B_E(0, 2r[$. De plus, $p(x) \leq t = r^{-1}\|x\|_E$. En particulier, $p(0) = 0$.

2). Si $p(x) < 1$ alors, par définition de $p(x)$, $x = 1 \cdot x \in C$. Si $x \in C$ alors, comme C est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B_E(x, \rho[\subset C$. Donc $(1+\rho/2)x \in C$ et $p(x) \leq (1 + \rho/2)^{-1} < 1$.
1) Soit $s > 0$. Si $t^{-1}x \in C$ alors $(ts)^{-1}sx \in C$ donc $p(sx) \leq ts$. En passant à l'infimum sur t, $p(sx) \leq s \cdot p(x)$. En appliquant ce résultat à $(s; s^{-1}x)$ au lieu de $(s; x)$ puis à $(s^{-1}; x)$, on obtient $p(x) = p(ss^{-1}x) \leq s \cdot p(s^{-1}x) \leq s \cdot s^{-1} \cdot p(x) = p(x)$. D'où $s \cdot p(s^{-1}x) = p(x)$ soit $p(s^{-1}x) = s^{-1} \cdot p(x)$.
Soit $x, y \in E$. Soit $t, s > 0$ tels $t^{-1}x \in C$ et $s^{-1}y \in C$. Comme C est convexe,

$$\frac{x+y}{t+s} = \frac{t}{t+s} \cdot \frac{x}{t} + \Big(1 - \frac{t}{t+s}\Big) \cdot \frac{y}{s} \in C\,.$$

Donc $p(x + y) \leq t + s$. En faisant tendre $t \to p(x)$ et $s \to p(y)$, on obtient $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
4). $(\Rightarrow)$: Si $x \in C$ et $z \in \mathbb{S}^1$ alors $p(zx) = p(x) < 1$ par 2). Donc $zx \in C$ par 2).
$(\Leftarrow)$: Par contraposée. D'après 1) et le fait que $p(0) = 0$, il existe $y \in E$ et $z \in \mathbb{S}^1$ tels que $p(y) \neq p(zy)$. Par exemple $p(zy) < p(y)$. Pour $x = (z/p(y))y$, $p(x) = p(zy)/p(y) < 1$ d'après 1), donc, par 2), $x \in C$. On a $\overline{z} \in \mathbb{S}^1$ et $p(\overline{z}x) = 1$, d'après 1), donc, par 2), $\overline{z}x \notin C$. □

Théorème 3.4.3. *(***Théorème de Hahn-Banach géométrique***). Soit A et B deux parties convexes, non-vides et disjointes d'un evn E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1) Si A est ouvert, il existe $f \in E' \setminus \{0\}$, séparant A et B au sens large, c'est-à-dire : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \Re(f)(x) \leq a \leq \Re(f)(y)\,.$$

2) Si A est fermé et B est compact alors il existe $f \in E'$ séparant strictement A et B, c'est-à-dire : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in A, \forall y \in B, \Re(f)(x) \leq a < b \leq \Re(f)(y)\,.$$

Démonstration.
Étape 1. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on suppose A voisinage ouvert de 0 et $B = \{x_0\}$ (en particulier $x_0 \notin A$). Soit p la jauge de A (cf. proposition 3.4.2). C'est une sous-norme sur E, $A = p^{-1}([0; 1[)$ et $p(x_0) \geq 1$. L'application $g : \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ définie par $g(tx_0) = t$ est linéaire et vérifie, pour tout $t > 0$,

$$g(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)\,,$$

et, pour $t \le 0$,

$$g(tx_0) = t \le 0 \le p(tx_0)\,.$$

Par le théorème de Hahn-Banach analytique réel (cf. théorème 3.2.2), il existe $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire, non nulle, qui prolonge g et telle que $f \le p$. Pour $x \in A$, $f(x) \le p(x) < 1 = g(x_0) = f(x_0)$. De plus, f est majorée par 1 sur A donc minorée par -1 sur $-A$. Or $-A \cap A$ est un voisinage ouvert de 0, donc f est bornée sur une boule centrée en 0. Par la proposition 2.9.2, f est continue.
Étape 2. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on suppose A ouvert mais $0 \notin A$ et $B = \{x_0\}$. Soit $x_1 \in A$. On applique l'étape 1 à $A - x_1$ et $x_0 - x_1$. Par linéarité, une forme linéaire qui sépare $A - x_1$ et $x_0 - x_1$ sépare aussi A et B.
Étape 3. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on se place dans le cas général du point 1) du théorème. On applique l'étape 2 à l'ouvert

$$A - B = \{x - y;\, x \in A,\, y \in B\}\,,$$

qui ne contient pas 0 (car A et B sont disjoints), et à $\{0\}$. Soit $f \in E'$ séparant $A - B$ et $\{0\}$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer $f \le 0$ sur $A - B$ donc $\sup_A f \le \inf_B f$.
Étape 4. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on suppose A fermé et B compact. Donc $A - B$ est un fermé ne contenant pas 0. Il existe donc $r > 0$ tel que l'ouvert $B_E(0; r[$ est disjoint de $A - B$. Par l'étape 3, il existe $f \in E'$ séparant $B_E(0; r[$ et $A - B$. Quitte à changer f en $-f$,

$$\sup_{A-B} f \le \inf_{B_E(0;r[} f = d < 0\,.$$

Donc $\sup_A f \le d + \inf_B f < \inf_B f$.
Étape 5. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, soit $f_r \in \mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ séparant A et B. En posant $f(x) = f_r(x) - i f_r(ix)$, f est linéaire continue sur $\mathbb{C}$ (cf. preuve du théorème 3.2.4) et $\Re(f)$ sépare A et B. □

4 Théorème de Baire et ses conséquences.

4.1 Espaces de Baire.

Définition 4.1.1. *Un espace topologique X est de* **Baire** *si, pour toute suite de fermés F_n de X d'intérieur vide, $\bigcup_n F_n$ est d'intérieur vide.*

Proposition 4.1.2. *Un espace topologique X est de Baire si et seulement si, pour toute suite d'ouverts denses O_n de X, l'intersection $\bigcap_n O_n$ est dense.*

Démonstration. O est dense dans X si et seulement si $F = X \setminus O$ est d'intérieur vide. De plus $X \setminus \bigcap_n O_n = \bigcup_n X \setminus O_n$. $\square$

Exemple 4.1.3. *Tout ensemble X muni de la topologie discréte est de Baire.*

Démonstration. Dans ce cas, un fermé d'intérieur vide est toujours vide. $\square$

Exemple 4.1.4. $\mathbb{R}$ *muni de la topologie* $\mathcal{T}_{s.c.i} = \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{]a; +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$ *n'est pas de Baire.*

Démonstration. Dans ce cas, un ouvert est soit vide soit dense. En prenant, $0_n =]n; +\infty[$, pour tout n, $\bigcap_n O_n = \emptyset$, qui n'est pas dense. $\square$

Lemme 4.1.5. *Un partie A d'un espace topologique X est dense dans X si et seulement si tout ouvert de X rencontre A.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Proposition 4.1.6. *Soit X un espace topologique de Baire et (F_n) une suite de fermés de X telle que $\bigcup_n F_n = X$. Alors $\bigcup_n \mathring{F}_n$ est dense dans X.*

Démonstration. Pour tout n, $K_n = F_n \setminus \mathring{F}_n$ est un fermé d'intérieur vide. Comme X est de Baire, $\bigcup_n K_n$ est d'intérieur vide. En particulier, $X \setminus \bigcup_n K_n$ est dense dans X. Comme

$$X = \bigcup_n F_n = \bigcup_n (\mathring{F}_n \cup K_n) = \Big(\bigcup_n \mathring{F}_n\Big) \cup \Big(\bigcup_n K_n\Big),$$

$X \setminus \bigcup_n K_n \subset \bigcup_n \mathring{F}_n$ et $\bigcup_n \mathring{F}_n$ est dense dans X. $\square$

Théorème 4.1.7. *(***Théorème de Baire***). Tout espace métrique complet est de Baire.*

Démonstration. Soit X un espace métrique complet et $(O_n)_n$ une suite d'ouverts denses dans X. Soit U un ouvert de X, il suffit de montrer que U rencontre l'intersection des O_n.
Comme O_1 est dense, l'ouvert $U \cap O_1$ est non vide. Il existe donc $x_1 \in U \cap O_1$ et $r_1 > 0$ tel que $B(x_1; r_1] \subset U \cap O_1$. Supposons construits $x_1, \cdots, x_n \in X$ et $r_1, \cdots, r_n$ tels que, pour tout $1 \leq p \leq n-1$, $0 < r_{p+1} < r_p/2$ et

$B(x_{p+1}; r_{p+1}] \subset O_{p+1} \cap B(x_p; r_p[$. Comme O_{n+1} est dense, $O_{n+1} \cap B(x_n; r_n[$ est non vide donc il existe $x_{n+1} \in O_{n+1} \cap B(x_n; r_n[$ et $r_{n+1} < r_n/2$ tels que $B(x_{n+1}; r_{n+1}] \subset O_{n+1} \cap B(x_n; r_n[$. Par récurrence, on construit ainsi des suites $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ et $(r_n)_n \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$,

$$r_n \leq r_1 2^{1-n} \quad \text{et} \quad x_{n+p} \in B(x_n; r_n[\,.$$

La suite $(x_n)_n$ est de Cauchy dans le complet X donc converge vers un certain x vérifiant, pour tout n, $x \in B(x_n; r_n]$ car la boule est fermée. Donc

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B(x_n; r_n] \subset U \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \right)$$

et U rencontre l'intersection des O_n. □

Remarque 4.1.8. *Soit E un evn. Si F est un sous-espace strict de E, $\mathring{F} = \emptyset$. Si E est complet, il ne peut être réunion dénombrable de sous-espaces stricts, par le théorème de Baire (cf. théorème 4.1.7) et la proposition 4.1.6. En particulier, il ne peut pas avoir une base algébrique dénombrable. L'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ a une telle base donc il n'est complet pour aucune norme mise sur lui.*

Définition 4.1.9. *Soit X un espace topologique de Baire. Un ouvert O de X est de* **Baire** *si O muni de la topologie induite par X est de Baire.*

Proposition 4.1.10. *Soit X un espace topologique de Baire et O un ouvert de X. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1). *O est de Baire.*
2). *Pour toute suite $(O_n)_n$ d'ouverts de X telles que, pour tout n, $O \cap O_n$ est dense dans O, l'intersection des $O \cap O_n$ est dense dans O.*
3). *Pour toute suite $(F_n)_n$ de fermés de X telles que, pour tout n, $O \cap F_n$ est d'intérieur vide, la réunion des $O \cap F_n$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 4.1.11. *Tout ouvert d'un espace métrique complet est de Baire.*

Démonstration. Par la proposition 4.1.10, on peut reprendre la preuve du théoréme de Baire (cf. théorème 4.1.7) en remplaçant, pour tout n, O_n par $O \cap O_n$, O étant l'ouvert de X considéré. □

Définition 4.1.12. *Dans un espace topologique X de Baire, une partie A est* **maigre** *si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés de X d'intérieur vide.*

Remarque 4.1.13. *Une partie maigre d'un espace de Baire X est d'intérieur vide. Son complémentaire dans X est donc dense dans X.*

Remarque 4.1.14. *Une suite de fonctions convergeant simplement ne converge pas toujours uniformément (même sur un compact). La suite $(t \mapsto t^n)_n$ converge simplement sur $[0;1]$ vers une fonction discontinue donc la convergence ne peut être uniforme.*

Proposition 4.1.15. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $I \to \mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. Il existe une partie maigre B de $\mathbb{R}$ incluse dans I telle que f est continue sur $I \setminus B$.*

Démonstration. Pour $n, p, q \in \mathbb{N}$, soit

$$E_{n,p,q} = \{x \in I;\, |f_{p+q}(x) - f_p(x)| \leq 1/n+1\}\,.$$

Par continuité, chaque $E_{n,p,q}$ est fermé donc l'intersection $E_{n,p} = \cap_q E_{n,p,q}$ l'est aussi. Soit n fixé. Pour chaque $x \in I$, $(f_n(x))_n$ tend vers $f(x)$ donc, pour p assez grand et pour tout q, $x \in E_{n,p,q}$. Donc $x \in E_{n,p}$. D'où $I = \cup_p E_{n,p}$. Soit $G_n := \cup_p \mathring{E}_{n,p}$. Il est ouvert. On montre qu'il est dense dans I.
Soit U un ouvert non vide de I. Il existe O ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $U = O \cap I$. Pour chaque p, $E_{n,p} \cap O$ est un fermé de O et $O = \cup_p (E_{n,p} \cap O)$. Comme $\mathbb{R}$ est complet, O est de Baire donc il existe p tel que $E_{n,p} \cap O$ est d'intérieur non vide. Il existe donc un ouvert inclu dans $E_{n,p} \cap O \subset O \cap I = U$ et $G_n \cap U \neq \emptyset$. Donc G_n est dense dans I.
Soit $G = \cap_n G_n$. Il suffit de montrer que f est continue sur G et que $B = I \setminus G$ est maigre.
$I \setminus G$ est la réunion des $I \setminus G_n$, qui sont d'intérieur vide puisque G_n est dense dans I. Donc $I \setminus G$ est maigre.
Soit $a \in G$ et $\varepsilon > 0$. Soit n tel que $3/n < \varepsilon$. Comme $a \in G_n$, il existe p tel que $a \in \mathring{E}_{n,p}$. Pour $x \in \mathring{E}_{n,p}$, $|f_p(x) - f(x)| \leq 1/n$, par passage à la limite. Comme f_p est continue en a, il existe un ouvert V tel que $a \in V \cap I$ et, pour tout $x \in V \cap I$, $|f_p(x) - f_p(a)| \leq 1/n$. Donc, pour $x \in V \cap \mathring{E}_{n,p}$ (voisinage de a dans I),

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_p(x)| + |f_p(x) - f_p(a)| + |f_p(a) - f(a)| \leq 3/n < \varepsilon\,,$$

ce qui donne la continuité de f en a. $\square$

Remarque 4.1.16. *En utilisant le théorème de Baire, on peut montrer que l'ensemble des fonctions continues de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui sont dérivables en au moins un point constitue une partie* **maigre** *dans l'ensemble des fonctions continues de* $[0;1]$ *dans* $\mathbb{R}$*. Il y a donc une partie dense de fonctions continues nulle part dérivables dans l'ensemble des fonctions continues.*

4.2 Théorème de Banach-Steinhaus.

Théorème 4.2.1. *Soit* E, F *deux evns,* E *étant un Banach non vide. Soit* $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(E;F)$*. Si*

$$\forall x \in E, \quad \sup_{h\in\mathcal{H}} \|h(x)\|_F \; < \; +\infty$$

alors

$$\sup_{h\in\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{L}(E;F)} \; < \; +\infty \, .$$

Démonstration. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}^+$ définie par $\varphi(x) = \sup_{h\in\mathcal{H}} \|h(x)\|_F$ et, pour tout n, posons

$$V_n = \varphi^{-1}(]n;+\infty[) = \{x \in E;\; \varphi(x) > n\} \, .$$

Montrons que V_n est ouvert. Soit $x \in V_n$. Par définition de φ, il existe $h \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ telle que $\|h(x)\|_F > n$. Pour tout $x' \in E$,

$$\|h(x)\|_F - \|h(x')\|_F \leq \|h(x) - h(x')\|_F = \|h(x - x')\| \leq \|h\| \cdot \|x - x'\|_E \, .$$

Soit $r = \|h(x)\|_F - n > 0$. Pour $x' \in E$ vérifiant $\|x - x'\|_E < r/\|h\|$, $\|h(x)\|_F - \|h(x')\|_F < r$ donc $\|h(x')\|_F > \|h(x)\|_F - r = n$. En particulier, V_n contient $B(x; r\|h\|^{-1}[$. Ceci étant vrai pour tout $x \in V_n$, V_n est ouvert.
Comme φ prend des valeurs finies, $\bigcap_n V_n = \emptyset$. Donc, $E = \bigcup_n F_n$, où $F_n := E \setminus V_n$ est fermé, pour tout n. Par le théorème de Baire (cf. théorème 4.1.7) et le fait que E n'ait pas un intérieur vide, les F_n ne peuvent pas tous avoir un intérieur vide. Il existe donc un n pour lequel $\mathring{F}_n \neq \emptyset$. Comme $\mathring{F}_n = E \setminus \overline{V}_n$, il existe donc $a \in E$ et $r > 0$ tel que $B(a; r] \cap V_n = \emptyset$. Soit $x \in E$ avec $\|x\|_E = 1$ et soit $h \in \mathcal{H}$. Comme a et $a + rx$ sont dans $B(a; r]$, $\varphi(a) \leq n$ et $\varphi(a + rx) \leq n$. Donc, pour tout $h \in \mathcal{H}$,

$$\|h(x)\|_F = r^{-1}\|h(rx)\|_F \leq r^{-1}\big(\|h(a + rx)\|_F + \|h(a)\|_F\big) \leq 2n/r \, .$$

Donc, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\|h\| \leq 2n/r$ et $\sup_{h\in\mathcal{H}} \|h\| \leq 2n/r < \infty$. □

Corollaire 4.2.2. *Soit E, F deux evns, E étant un Banach. Soit $(f_n)_n$ une suite dans $\mathcal{L}(E;F)$ qui converge simplement vers une certaine application f de E dans F. Alors $f \in \mathcal{L}(E;F)$ et*

$$\|f\| \;\leq\; \liminf \|f_n\| \;\leq \sup_n \|f_n\| \;<\; \infty\,.$$

Démonstration. Par passage à la limite, f est linaire. Soit $\mathcal{H} = \{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Comme $(f_n)_n$ converge simplement, on peut appliquer le théorème de Banach-Steinhaus (cf. théorème 4.2.1) qui donne $\sup_n \|f_n\| < \infty$. En particulier, $0 \leq \ell := \liminf \|f_n\| < \infty$. Il existe une sous-suite $(\|f_{\varphi(n)}\|)_n$ convergeant vers ℓ. Soit $x \in E$ avec $\|x\|_E = 1$, pour tout n, $\|f_{\varphi(n)}(x)\|_F \leq \|f_{\varphi(n)}\|$, donc, en passant à la limite, $\|f(x)\|_F \leq \ell$. D'où $\|f\| \leq \ell$. $\square$

Corollaire 4.2.3. *Soit $\mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ est borné, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Cet espace n'est pas complet.*

Démonstration. Pour tout n, $I_n : \mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par, pour $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$,

$$I_n(g) \;=\; \int_{-n}^{n} g(t)\,dt\,,$$

est linéaire continue. De plus, pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, quand $n \to \infty$,

$$I_n(g) \;\to\; I(g) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt\,.$$

Si $\mathcal{C}_0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ était complet, on aurait, par le théorème de Banach-Steinhaus (cf. théorème 4.2.1), la continuité de I. Or, on a vu qu'elle n'est pas continue (cf. exemple 2.9.6), l'espace n'est donc pas complet. $\square$

4.3 Théorème de l'application ouverte.

Proposition 4.3.1. *Soit E, F deux evns et $f : E \to F$ linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1). f est ouverte.

2). Il existe $r > 0$ tel que $B_F(0;r[\subset f(B_E(0;1]))$.

3). Il existe $k > 0$ tel que

$$\forall y \in F, \exists x \in E;\ f(x) = y \quad et \quad \|x\|_E \leq k\|y\|_F\,.$$

Démonstration.
$(1 \Rightarrow 2)$: Comme $B_E(0;1[$ est ouverte, $f(B_E(0;1[)$ est ouvert. Comme $0 = f(0)$ appartient à ce dernier, il existe $r > 0$ tel que $B_F(0;r[\subset f(B_E(0;1[) \subset \overline{f(B_E(0;1])}$.
$(2 \Rightarrow 1)$: Soit U ouvert de E. Pour $x \in U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_E(x;\varepsilon] \subset B_E(x;2\varepsilon[\subset U$.

$$B_F(f(x);r\varepsilon[= f(x) + \varepsilon B_F(0;r[\subset f(x) + \varepsilon f(B_E(0;1]) = f(B_E(x;\varepsilon]) \subset f(U)\,.$$

Donc $f(U)$ est ouvert.
$(2 \Rightarrow 3)$: Soit $k > 1/r$. Donc $1/k < r$ et

$$(k\|y\|_F)^{-1}y \in B_F(0;r[\subset f(B_E(0;1])\,.$$

Donc il existe $x' \in B_E(0;1]$ tel que $f(x') = (k\|y\|_F)^{-1}y$. Soit $x = k\|y\|_F x'$. On a $f(x) = y$ et $\|x\|_E = k\|y\|_F\|x'\|_E \leq k\|y\|_F$.
$(3 \Rightarrow 2)$: On choisit $r = 1/k$. Soit $y \in B_F(0;r[$. Par hypothèse, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ et $\|x\|_E \leq k\|y\|_F < kr = 1$. Donc $x \in B_E(0;1[$ et $y \in f(B_E(0;1[) \subset f(B_E(0;1])$. □

Théorème 4.3.2. *(***Théorème de l'application ouverte***). Soit E, F deux espaces de Banach (non vides) et $f \in \mathcal{L}(E;F)$.*

1). Si f est surjective, f est ouverte.

2). Si f est bijective, f est un homéomorphisme.

Démonstration.
1). Par la proposition 4.3.1, il suffit de montrer la propriété 2) de cette proposition. Pour $y \in F$, il existe, par surjectivité, $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Comme il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \|x\|_E$, $y \in f(B_E(0;n])$. D'où $F = \cup_n \overline{f(B_E(0;n])}$. Comme F est d'intérieur non vide et complet, il existe, par le théorème de Baire (cf. théorème 4.1.7), un $n > 0$ tel que $\overline{f(B_E(0;n])}$ est d'intérieur non vide. Il existe donc $a \in F$ et $\rho > 0$ tels que $B_F(a;\rho] \subset B_F(a;2\rho[\subset \overline{f(B_E(0;n])}$. On montre que $B_F(0;r] \subset \overline{f(B_E(0;1])}$.
Soit $r = n^{-1}\rho$ et $a' = n^{-1}a$. Comme $\varphi_1 : x \mapsto n^{-1}x$ est un homéomorphisme,

$$\overline{f(B_E(0;1])} = \overline{n^{-1}f(B_E(0;n])} = n^{-1}\overline{f(B_E(0;n])}\,.$$

D'autre part, $B_F(n^{-1}a;r] = n^{-1}B_F(a;\rho]$ donc $B_F(a';r] \subset \overline{f(B_E(0;1])}$.
Soit $y \in B_F(0;r]$. On a $y = (1/2)((y+a') + (y-a'))$ avec $-(y-a'), y+a' \in B_F(a';r]$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $x, x' \in B_E(0;1]$ tels que $\|f(x) - (y+a')\|_F < \varepsilon$ et $\|f(x') + (y-a')\|_F < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire,

$$\big\|y - f\big((x-x')/2\big)\big\|_F = \big\|y - \big(f(x) - f(x')\big)/2\big\|_F < \varepsilon\,.$$

Comme $(x-x')/2 \in B_E(0;1]$, $y \in \overline{f(B_E(0;1])}$ et $B_F(0;r] \subset \overline{f(B_E(0;1])}$.
Il reste à voir que $B_F(0;r[\subset f(B_E(0;1])$. Soit $z \in B_F(0;r[$. On montre que $z \in f(B_E(0;1])$. Comme $0 = f(0)$, on peut supposer $z \neq 0$.
Il existe $\mu \in]0;1[$ tel que $\|z\|_F = r(1-\mu)$. Donc $y = (1-\mu)^{-1}z \in B_F(0;r] \subset \overline{f(B_E(0;1])}$. Il existe donc $y_1 \in f(B_E(0;1])$ tel que $\|y_1 - y\|_F \leq \mu r$. Supposons construits $y_0 = 0, y_1, \cdots, y_n \in F$ tel que, pour $1 \leq p \leq n$, on ait $\mu^{-(p-1)}(y_p - y_{p-1}) \in f(B_E(0;1])$ et $\|y_p - y\|_F \leq \mu^p r$. Par hypothèse de récurrence, $y \in B_F(y_n;\mu^n r]$. Comme l'application $\varphi_n : F \ni t \mapsto y_n + \mu^n t \in F$ est continue,

$$B_F(y_n;\mu^n r] = \varphi_n\big(B_F(0;r]\big) \subset \varphi_n\Big(\overline{f(B_E(0;1])}\Big) \subset \overline{\varphi_n \circ f\big(B_E(0;1]\big)}$$

donc $y \in B_F(y_n;\mu^n r] \subset \overline{y_n + \mu^n f(B_E(0;1])}$. On peut donc trouver $y_{n+1} \in y_n + \mu^n f(B_E(0;1])$ tel que $\|y_{n+1} - y\| \leq \mu^{n+1} r$. On a la propriété souhaitée au rang $n+1$. Par récurrence, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est construite avec la propriété en question, pour tout n.
Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que, pour tout n, $y_{n+1} - y_n = f(x_n)$ avec $\|x_n\|_E \leq \mu^n$. Comme $\mu < 1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge absolument. Comme E est complet, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge vers un $x \in E$ vérifiant

$$\|x\|_E \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E \leq (1-\mu)^{-1}\,.$$

Par continuité de f,

$$f(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} f(x_k) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} (y_{k+1} - y_k) = \lim_n y_n = y\,.$$

Donc $z = (1-\mu)y = f((1-\mu)x)$ avec $(1-\mu)x \in B_E(0;1]$. Donc $z \in f(B_E(0;1])$ et $B_F(0;r[\subset f(B_E(0;1])$.
2). Comme f est surjective, f est ouverte par 1). f étant bijective, c'est un homéomorphisme, d'après la proposition 1.6.6. □

Corollaire 4.3.3. *Soit $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel E telles qu'il est complet pour chacune d'elle et elles sont comparables. Alors elles sont équivalentes.*

Démonstration. Par exemple, il existe $c > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$. L'application id_E de $(E, \|\cdot\|_2)$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ est donc linéaire continue. Comme ces espaces sont complets et que l'application est bijective, le théorème de l'application ouverte (cf. théorème 4.3.2) implique que son inverse est continue. Donc il existe $d > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_2 \leq d\|x\|_1$. Les normes sont donc équivalentes. $\square$

Exemple 4.3.4. *Sur ℓ^2, on peut mettre les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$. En utilisant le corollaire 4.3.3, on peut montrer que $(\ell^2, \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.*

4.4 Théorème du graphe fermé.

Lemme 4.4.1. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach. Soit $\|\cdot\|_{pr} : E \times F \to \mathbb{R}^+$ définie par $\|(x; y)\|_{pr} = \|x\|_E + \|y\|_F$. $(E \times F, \|\cdot\|_{pr})$ est un espace de Banach. De plus, les projections $p_E : E \times F \to E$ et $p_F : E \times F \to F$ définies par $p_E(x; y) = x$ et $p_F(x; y) = y$ sont continues.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Théorème 4.4.2. *(**Théorème du graphe fermé**). Soit E, F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ linéaire. f est continue si et seulement si son graphe $G = \{(x; f(x)), x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$ pour la norme produit $\|\cdot\|_{pr}$.*

Démonstration.
$(\Rightarrow)$: Soit $(x_n, f(x_n))_n$ une suite d'éléments de G qui converge vers un $(x; y)$ dans $E \times F$ pour $\|\cdot\|_{pr}$. Alors $(x_n)_n$ converge vers x dans E. Comme f est continue, $(f(x_n))_n$ converge dans F vers $f(x)$. Par unicité de la limite, $y = f(x)$, $(x; y) \in G$ et G est fermé.
$(\Leftarrow)$: G étant un sous-espace fermé du Banach $E \times F$, il est aussi un espace de Banach (pour $\|\cdot\|_{pr}$). L'application $p : G \to E$ définie par $p(x; f(x)) = x$ est continue et bijective (car f est une application). Par le 2) du théorème de l'application ouverte (cf. théorème 4.3.2), p^{-1} est continue. Comme p_F est continue et comme $f = p_F \circ p^{-1}$, f est continue. $\square$

Corollaire 4.4.3. *Soit E, F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ linéaire. f est continue si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant dans E vers x telle que $(f(x_n))_n$ converge dans F vers y, alors $y = f(x)$.*

Démonstration. G est fermé pour $\|\cdot\|_{pr}$ si et seulement si, pour toute suite d'éléments de G qui converge dans $E \times F$, la limite est dans G. Une suite d'éléments de G qui converge dans $E \times F$ est une suite $(x_n; f(x_n))_n$ où $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de E qui converge vers un certain x et où la suite $(f(x_n))_n$ d'éléments de F converge vers un certain y. Dire que la limite d'une telle suite $(x_n; f(x_n))_n$ est dans G signifie que $y = f(x)$. □

5 Propriétés du dual topologique, topologies faibles.

5.1 Topologies rendant des applications continues.

Exemple 5.1.1. *Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $\delta_a : E \to \mathbb{R}$ qui à f associe $f(a)$ est continue. Peut-on construire la topologie la moins fine (c'est-à-dire avec le minimum d'ouverts) qui rendent les applications δ_a continues ? Oui et on peut le faire de manière trés générale.*

Proposition 5.1.2. *Soit X un ensemble, $(Y_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'espaces topologigues et, pour tout $i \in I$, soit $\varphi_i : X \to Y_i$. Alors*

$$\mathcal{W} = \left\{ \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(O_i); \forall i \in J, O_i \in \mathcal{T}_i, J \subset I, J \text{ fini} \right\}$$

engendre une topologie $\mathcal{T}_\mathcal{W}$ sur X qui est la moins fine des topologies sur X rendant toutes les φ_i continues.

Démonstration. Exercice (utiliser la proposition 1.1.12). □

Proposition 5.1.3. *Dans la cadre de la proposition précédente, on munit X de la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{W}$. Soit Z un espace topologique, $\psi : Z \to X$ et $(x_n)_n \in X^\mathbb{N}$. ψ est continue si et seulement si, pour tout $i \in I$, $\varphi_i \circ \psi : Z \to Y_i$ l'est. De plus,*

$$x = \lim x_n \Leftrightarrow \forall i \in I, \varphi_i(x) = \lim \varphi_i(x_n)\,.$$

Démonstration. Continuité de ψ.
$(\Rightarrow)$: $\varphi_i \circ \psi$ est continue comme composée de fonctions continues.

($\Leftarrow$) : Soit V un voisinage de $\psi(z)$. Donc

$$\psi(z) \in \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(O_i) \subset V ,$$

avec $J \subset I$, J fini et, pour tout $i \in J$, O_i ouvert dans Y_i. Pour $i \in J$, $\varphi_i \circ \psi$ est continue donc $U_i = (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(O_i)$ est un ouvert de Z. Comme J est fini, $\cap_{i\in J} U_i$ est aussi un ouvert de Z. Comme, pour $i \in J$, $\psi(z) \in \varphi_i^{-1}(O_i)$, $z \in U_i$ et $z \in \cap_{i\in J} U_i$. De plus, pour $i \in J$, $\psi(U_i) = \varphi_i^{-1}(O_i) \subset V$ donc $\cap_{i\in J} U_i \subset \psi^{-1}(V)$. ψ est donc continue en z.
Étude de $\lim x_n$.
($\Rightarrow$) : Le résultat découle de la continuité des φ_i.
($\Leftarrow$) : Soit V un voisinage de x. Donc

$$x \in \bigcap_{i\in J} \varphi_i^{-1}(O_i) \subset V ,$$

avec $J \subset I$, J fini et, pour tout $i \in J$, O_i ouvert dans Y_i. Comme J est fini et que, pour tout $i \in J$, $\varphi_i(x) = \lim \varphi_i(x_n) \in O_i$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que,

$$n \geq N \;\Rightarrow\; \forall i \in J, \varphi_i(x_n) \in O_i \,.$$

Donc, pour $n \geq N$, $x_n \in V$. D'où $x = \lim x_n$. $\square$

Remarque 5.1.4. *Dans l'exemple 5.1.1, $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ est en fait la topologie de la convergence simple, comme le montre la proposition 5.1.3. Elle est différente de la topologie engendrée par $\|\cdot\|_\infty$.*

Remarque 5.1.5. *La topologie produit sur un produit $X = \Pi_{i\in I} X_i$ d'espaces topologigues est la topologie la moins fine rendant continues les projections canoniques $p_i : X \to X_i$.*

5.2 Topologie faible sur un Banach.

Définition 5.2.1. *Soit E un evn sur $\mathbb{K}$. La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine rendant toutes les $u \in E'$ continues.*

Proposition 5.2.2. *La topologie $\sigma(E, E')$ sur E est séparée. Pour $x_0 \in E$, tout voisinage V de x_0 pour $\sigma(E, E')$ contient, pour un $\varepsilon > 0$ et une famille finie $(f_i)_{i\in I} \in (E')^I$, un cylindre*

$$\{x \in E; \forall i \in I, |f_i(x - x_0)| \leq \varepsilon\} \,. \tag{3}$$

Démonstration. Soit $x \neq y$ in E. Par la proposition 3.3.2, il existe $f \in E'$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Comme $\mathbb{K}$ est séparé, il existe U et V des ouverts disjoints de $\mathbb{K}$ tels que $f(x) \in U$ et $f(y) \in U$. Comme f est aussi continue pour la topologie $\sigma(E, E')$, $f^{-1}(U)$ est un voisinage ouvert de x et $f^{-1}(V)$ est un voisinage ouvert de y. De plus, $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ car $U \cap V = \emptyset$. $\sigma(E, E')$ est donc séparée.
Par la proposition 5.1.2,

$$x_0 \in \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(O_i) \subset V ,$$

avec I fini et, pour $i \in I$, $f_i \in E'$ et O_i voisinage ouvert de $f_i(x_0)$. Comme I est fini, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $i \in I$, $B_{\mathbb{K}}(f_i(x_0); \varepsilon] \subset O_i$. Comme chaque f_i est linéaire, V contient le cylindre (3). □

Proposition 5.2.3. *Soit E un espace de Banach et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$.*

1). $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$ ssi, pour tout $f \in E'$, $f(x_n) \to f(x)$ (dans $\mathbb{K}$).

2). Si $x_n \to x$ fortement (i.e. pour $\| \cdot \|_E$) alors $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$.

3). Si $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$ alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

4). Si $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E' (i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$) alors $f_n(x_n) \to f(x)$ (dans $\mathbb{K}$).

Démonstration.
1). Cela découle la proposition 5.1.3.
2). Pour tout $f \in E'$ et tout n, $|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|_{E'} \|x_n - x\|_E$ donc $f(x_n) \to f(x)$. Par 1), $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$.
3). La norme de la forme linéaire continue $E' \ni f \mapsto f(x)$ est $\|x\|_E$ d'après une conséquence du théorème d'Hahn-Banach (cf. proposition 3.3.2). De même, pour tout n, $E' \ni f \mapsto f(x_n) \in \mathbb{K}$ est linéaire continue de norme $\|x_n\|_E$. Par hypothèse et par 1), il s'agit d'une suite de formes linéaires continues qui converge simplement vers la première forme. Comme E' est complet, on peut appliquer un corollaire du théorème de Banach-Steinhaus (cf. corollaire 4.2.2) donnant $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E \leq \sup_n \|x_n\|_E < \infty$.
4). Pour tout n,

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \|f_n - f\|_{E'} \|x_n\|_E + |f(x_n) - f(x)| . \end{aligned}$$

Comme $x_n \rightharpoonup x$ dans $\sigma(E, E')$, $f(x_n) \to f(x)$ (cf. 1).) et $(\|x_n\|_E)_n$ est bornée (cf. 3).). De plus, $f_n \to f$ pour $\| \cdot \|_{E'}$, donc $f_n(x_n) \to f(x)$. □

5.3 Topologies sur un dual.

Définition 5.3.1. *Pour un evn E sur un corps $\mathbb{K}$, on note $E' = \mathcal{L}(E;\mathbb{K})$. C'est le* **dual topologique** *de E. Pour tout $u \in E'$ et $x \in E$ on note $(u, x) = u(x) \in \mathbb{K}$. $(\cdot,\cdot)$ est le crochet de dualité entre E' et E. E' muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E;\mathbb{K})}$ est le* **dual fort** *de E. Le bidual de E, noté E'', est le dual fort de $(E', \|\cdot\|_{E'})$.*

Proposition 5.3.2. *Le dual fort E' d'un evn E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un espace de Banach.*

Démonstration. cf. corollaire 2.9.9. □

Remarque 5.3.3. *Pour un Banach E, on a déjà deux topologies sur E' : la topologie forte (associée à $\|\cdot\|_{E'}$) et la topologie faible $\sigma(E', E'')$ vue au paragraphe précédent.*

Définition 5.3.4. *Soit E un espace de Banach. La topologie "$*$ faible" sur E', notée aussi $\sigma(E', E)$, est la topologie la moins fine rendant les applications $E' \ni f \mapsto f(x)$, pour $x \in E$, continues.*

Remarque 5.3.5. *$\sigma(E', E)$ est moins fine que $\sigma(E', E'')$. Elles coïncident si E est réflexif.*

Proposition 5.3.6. *Soit E un espace de Banach et $(f_n)_n \in (E')^{\mathbb{N}}$.*

1). *$\sigma(E', E)$ est séparée.*
2). *Tout voisinage de f_0 pour $\sigma(E', E)$ contient, pour un $\varepsilon > 0$ et une famille finie $(x_i)_{i\in I} \in E^I$, un cylindre*
$$\{f \in E'; \forall i \in I, |(f_0 - f)(x_i)| \le \varepsilon\}.$$
3). *$f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E)$ ssi, pour tout $x \in E$, $f_n(x) \to f(x)$ (dans $\mathbb{K}$).*
4). *Si $f_n \to f$ fortement (i.e. pour $\|\cdot\|_{E'}$) alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E'')$. Si $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E'')$ alors $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E)$.*
5). *Si $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E)$ alors $(\|f_n\|_{E'})_n$ est bornée et $\|f\|_{E'} \le \liminf \|f_n\|_{E'}$.*
6). *Si $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E)$ et si $x_n \to x$ fortement dans E (i.e. $\|x_n - x\|_E \to 0$) alors $f_n(x_n) \to f(x)$ (dans $\mathbb{K}$).*

Démonstration. Elle est similaire à celle des propositions 5.2.2 et 5.2.3. □

Remarque 5.3.7. *Pour un evn E de dimension finie, les topologies forte, $\sigma(E', E'')$ et $\sigma(E', E)$ sur l'espace E' coïncident.*

5.4 Théorème de Banach-Alaoglu.

Théorème 5.4.1. *(***Théorème de Banach-Alaoglu***). Soit E un espace vectoriel normé. La boule unité fermée $B_{E'}(0;1]$ de E' est compacte pour la topologie $*$ faible $\sigma(E',E)$.*

Démonstration. Soit $Y=\mathbb{K}^E$ muni de la topologie produit. Dans la suite, E' est toujours muni de la topologie $*$ faible $\sigma(E',E)$. Soit $\psi : E' \to Y$ définie par $\psi(f)=(f(x))_{x\in E}$. Comme, pour tout $x\in E$, $f\mapsto f(x)$ est continue, ψ est continue par la remarque 5.1.5 et la proposition 5.1.3. Montrons que ψ est un homéomorphisme de E' sur $\psi(E')$.
ψ est injective. Comme, pour tout $x\in E$, $\psi(E')\ni y\mapsto \psi^{-1}(y)(x)\in\mathbb{K}$ coïncide avec $\psi(E')\ni y\mapsto y_x$ qui est continue pour la topologie produit, ψ^{-1} est continue par la proposition 5.1.3.
On a $\psi(B_{E'}(0;1])=K$ avec

$$K=\left\{y\in Y;\forall x,x'\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K};|y_x|\leq\|x\|_E, y_{\lambda x+x'}=\lambda y_x+y_{x'}\right\}.$$

On a $K=K_1\cap K_2$ avec

$$K_1=\left\{y\in Y;\forall x\in E,|y_x|\leq\|x\|_E\right\}=\prod_{x\in E}B_{\mathbb{K}}(0;\|x\|_E],$$

$$K_2=\left\{y\in Y;\forall x,x'\in E,\forall\lambda\in\mathbb{K};y_{\lambda x+x'}=\lambda y_x+y_{x'}\right\}.$$

Par le théorème de Tychonov (cf. théorème 2.2.1), K_1 est compact dans Y (donc fermé). On montre que K_2 est fermé.
Pour $x,x'\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$A_{x,x',\lambda}=\{y\in Y;y_{\lambda x+x'}=\lambda y_x+y_{x'}\}$$

est fermé puisque l'application $Y\ni y\mapsto y_{\lambda x+x'}-\lambda y_x-y_{x'}\in\mathbb{K}$ est continue. Donc

$$K_2=\bigcap_{x,x'\in E,\lambda\in\mathbb{K}}A_{x,x',\lambda}$$

est aussi fermé.
K est donc un fermé dans un compact donc est compact. Comme ψ^{-1} est continue, $B_{E'}(0;1]$ est compacte. □

Remarque 5.4.2. *En général, E' muni de la topologie $*$ faible $\sigma(E',E)$ n'est pas un espace métrique. Il n'est donc pas clair que, d'une suite bornée dans E', on puisse extraire une sous-suite convergente pour $\sigma(E',E)$.*

Corollaire 5.4.3. *Soit E un espace de Banach séparable et $(f_n)_n \in (E')^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui converge pour la topologie $*$ faible $\sigma(E', E)$.*

Démonstration. Admise. □

Proposition 5.4.4. *Soit E un espace de Banach réflexif. La boule unité fermée $B_E(0; 1]$ de E est compacte pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. De plus, si $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite bornée, alors il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge pour la topologie faible $\sigma(E, E')$.*

Démonstration. Admise. □

Remarque 5.4.5. *Dans la preuve des deux résultats précédents, on utilise des espaces métriques compacts et le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 2.3.8). Plus précisément, pour la proposition 5.4.3, on utilise le fait que $B_{E'}(0; 1]$ munie de la topologie $*$ faible $\sigma(E', E)$ est en fait un espace métrique. Pour la seconde partie de la proposition 5.4.4, on note par M la fermeture (pour la topologie de la norme de E) de l'espace vectoriel engendré par les x_n. Cette fois, c'est la boule unité fermée $B_M(0; 1]$ de M munie de la topologie faible $\sigma(M, M')$ qui est un espace métrique.*

5.5 Topologies faibles dans un Hilbert.

Remarque 5.5.1. *Soit H un espace de Hilbert. Par le théorème 11.2.5, on peut identifier H' à H à l'aide du produit scalaire. H est donc réflexif. En particulier, sur H', les topologies faible $\sigma(H', H'')$ et $*$ faible $\sigma(H', H)$ coïncident (cf. remarque 5.3.5). Par l'identification de H' à H, on peut transporter la topologie faible $\sigma(H', H)$ de H' sur H et la comparer à la topologie faible $\sigma(H, H')$ sur H (cf. proposition 5.5.2).*

Proposition 5.5.2. *Soit H un Hilbert sur $\mathbb{K}$. Soit $d : H \to H'$ l'homéomorphisme isométrique qui à $x \in H$ associe $\langle x, \cdot \rangle \in H'$. Alors d est aussi un homéomorphisme de $(H, \sigma(H, H'))$ sur $(H', \sigma(H', H))$. En particulier, pour une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ et $x \in H$, $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(H, H')$ si et seulement si $\langle x_n, \cdot \rangle \rightharpoonup \langle x, \cdot \rangle$ pour $\sigma(H', H)$ si et seulement si, pour tout $y \in H$, $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ dans $\mathbb{K}$. De plus, si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(H, H')$, alors la suite $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \in H$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.*

Démonstration. Pour tout $y \in H$, $H \ni x \mapsto d_x(y) = \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$ est antilinéaire continue donc continue de $(H, \sigma(H, H'))$ dans $\mathbb{K}$. Par la proposition 5.1.3, d est continue de $(H, \sigma(H, H'))$ dans $(H', \sigma(H', H))$. Pour tout $y \in H$, $H' \ni f \mapsto \langle y, d^{-1}(f)\rangle \in \mathbb{K}$ est antilinéaire continue donc continue de $(H', \sigma(H', H))$ dans $\mathbb{K}$. Par la proposition 5.1.3, d^{-1} est continue de $(H', \sigma(H', H))$ dans $(H, \sigma(H, H'))$.
D'après les propositions 5.2.3 et 5.3.6, $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(H, H')$ ssi, pour tout $f \in H'$, $f(x_n) \to f(x)$ ssi, pour tout $y \in H$, $\langle y, x_n\rangle \to \langle y, x\rangle$ ssi, pour tout $y \in H$, $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ ssi $\langle x_n, \cdot\rangle \rightharpoonup \langle x, \cdot\rangle$ pour $\sigma(H', H)$.
D'après l'identification précédente, la dernière assertion est une conséquence du point 5) de la proposition 5.3.6. □

Définition 5.5.3. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace de Hilbert H converge faiblement vers x si, pour tout $y \in H$, $\langle y, x_n\rangle \to \langle y, x\rangle$.*

Théorème 5.5.4. *Soit H un Hilbert et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer les propositions 5.4.4 et 5.5.2. □

6 Topologie sur les espaces de fonctions test, topologie sur les espaces de distributions.

Dans le cours d'ING1, une définition succinte des distributions et des distributions tempérées a été donnée. Des propriétés importantes ont également été présentées en vue d'applications en EDP.

Les distributions sont des formes linéaires continues. L'aspect topologique est resté relativement caché dans le cours d'ING1. On va voir ici que les espaces de fonctions test sont munis d'une topologie faible appropriée. Les espaces duaux seront munis d'une topologie de type $*$ faible.

6.1 Motivation.

Pour expliquer les choix topologiques sur les espaces de fonctions test, on se concentre sur les distributions sur $\mathbb{R}$.

On a vu en ING1 qu'il est important de pouvoir interpréter une fonction $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ comme une distribution en l'identifiant à la forme linéaire

$$T_f \;:\; C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx \;\in\; \mathbb{C}\,. \tag{4}$$

Ici $C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à support compact. Cette condition de support assure que T_f est bien définie. D'autre part, on définit la dérivée de la distribution T_f par

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})\,,\;\; \big(T_f\big)'(\varphi) \;=\; -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx\,. \tag{5}$$

Lorsque f est C^1, on a, par intégration par parties, pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$,

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx \;=\; -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx$$

et, dans ce cas, $T_{(f')} = (T_f)'$. Ceci motive la définition (5). On voit, de plus, que rien n'empêche de continuer à dériver puisque les fonctions test sont de classe C^∞. C'est l'un des intérêts essentiels des distributions.

Comme les espaces de fonctions test sont (presque toujours) de dimension infinie, la continuité des formes linéaires n'est pas automatique. Il est cependant important d'avoir une certaine continuité. Il s'agit donc de choisir une topologie appropriée sur les espaces de fonctions test.

On va voir que des choix naturels s'avèrent inadaptés et qu'il faut recourrir à des topologies relativement compliquées (c'est pourquoi on les a, autant que faire se peut, cachées en ING1).

Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}$. Par exemple, $K = [a;b]$ avec $a < b$. L'espace vectoriel $C^0_K(\mathbb{R};\mathbb{C})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à support dans K est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_\infty \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \;=\; \sup_{x\in K} |f(x)|\,.$$

Dans ce Banach, on trouve le sous-espace $C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ à support dans K. Ce dernier n'est pas fermé donc pas complet (cf. TD).

Pire, on a le défaut suivant. Si T est une forme linéaire continue sur $C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on souhaite qu'il en soit de même pour l'application linéaire

$$T' \;:\; C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto -T(\varphi') \;\in\; \mathbb{C}\,,$$

puisque c'est ainsi que l'on veut définir la dérivée de T. Il existe certes un $c > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $|T(\varphi')| \leq c\|\varphi'\|_\infty$ mais il n'existe aucun $c' > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, $\|\varphi'\|_\infty \leq c'\|\varphi\|_\infty$ (cf. TD). En fait, si $T = T_f$ avec $f(x) = x^{-1/2}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, alors la proposition

$$\exists c' > 0\,;\; \forall \varphi \in C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})\,,\; |T'(\varphi)| \;=\; |T(\varphi')| \;\leq\; c'\|\varphi\|_\infty$$

est fausse (cf. TD). Il n'est donc pas adapté de munir $C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ de la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ce défaut suggère de prendre une norme qui dépend de toutes les dérivées des fonctions test :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi^{(n)}\|_\infty \;?$$

Il n'est pas sûr que le “sup” soit fini. Que dire de :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|\varphi^{(n)}\|_\infty}{1 + \|\varphi^{(n)}\|_\infty} \;?$$

Cette fois, le “sup” est fini mais ce n'est pas une norme !

Conclusion : il semble inadapté de prendre la topologie définie par une norme sur $C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ (et donc aussi sur $C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$).

On choisit de définir une topologie sur $C_K^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ à l'aide de la **famille** d'a priori semi-normes, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n \;:\; \varphi \mapsto \|\varphi^{(n)}\|_\infty\,.$$

Lorsque $K = [a;b]$, on peut montrer qu'il s'agit de normes mais le point essentiel n'est pas là. Ce qui importe est de prendre plusieurs (semi-)normes.

Sur l'espace $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on prend les semi-normes, pour $n \in \mathbb{N}$ et K compact dans $\mathbb{R}$,

$$p_{n,K} \;:\; \varphi \mapsto \|\varphi^{(n)}\|_{\infty,K} \;:=\; \sup_{x\in K} |\varphi^{(n)}(x)|\,.$$

$p_{n,K}$ n'est pas une norme sur $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on utilise les semi-normes, pour $m, n \in \mathbb{N}$,

$$p_{m,n} \;:\; \varphi \mapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m \varphi^{(n)}(x)|\,.$$

On rappelle que $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des fonctions φ de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ pour lesquelles tous les $p_{m,n}(\varphi)$ sont finies.

Remarque 6.1.1. *À partir d'une famille au plus* **dénombrable** *de semi-normes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur un espace vectoriel E, on peut construire, pour $(g;h) \in E^2$,*

$$d(g;h) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(g-h)}{1+p_n(g-h)}\,. \tag{6}$$

Sous certaines conditions sur les p_n, d est une distance. Ce sera le cas sur $C^\infty_K(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et sur $\mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Pour $C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, on peut choisir une famille dénombrable de semi-normes en posant $p_n = p_{n,K_n}$ avec $K_n = [-n;n]$ et définir une distance via (6). *On verra de plus que, dans ces cas-là, l'espace métrique ainsi obtenu est complet (voir aussi les TD).*

6.2 Espaces vectoriels localement convexes.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 6.2.1. *Une semi-norme sur E est une application $p : E \to \mathbb{R}^+$ telle que, pour tous $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$p(\lambda f) \;=\; |\lambda|\, p(f) \quad et \quad p(f+g) \;\leq\; p(f) \,+\, p(g)\,.$$

Remarque 6.2.2. *Soit p une semi-norme sur E. De la propriété d'homogénéité (la première propriété dans la définition 6.2.1) avec $\lambda = 2$ et $f = 0_E$, on déduit que $p(0_E) = 0$. Il est cependant possible qu'il existe $f \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $p(f) = 0$. Quand ce n'est pas le cas, p est en fait une norme sur E.*

Soit P une famille de semi-normes (non toutes nulles) sur E. On considère la topologie $\mathcal{T}_P$ sur E la moins fine rendant toutes ces semi-normes continues. On rappelle qu'une telle topologie est la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$ engendrée par

$$\mathcal{W} \;=\; \left\{ \bigcap_{p\in P_f} p^{-1}(O_p)\,;\; P_f \,\text{partie finie de}\, P\,, O_p \,\text{ouvert de}\,\mathbb{R}, \text{pour}\, p \in P_f \right\}.$$

On a donc

$$\mathcal{T}_P \;=\; \mathcal{T}_{\mathcal{W}} \;=\; \{\text{toutes les réunions possibles d'éléments de } \mathcal{W}\}\,.$$

En fait (cf. TD), $\mathcal{T}_{\mathcal{W}} = \mathcal{T}_{\mathcal{W}'}$ où

$$\mathcal{W}' \;=\; \left\{ \bigcap_{p\in P_f} p^{-1}\big(]a_p - \epsilon_p; a_p + \epsilon_p[\big)\,;\; P_f \,\text{partie finie de}\, P\,, \right.$$
$$\left. a_p \in \mathbb{R}\,, \epsilon_p > 0, \text{pour}\, p \in P_f \right\}.$$

On a aussi $\mathcal{T}_{\mathcal{W}} = \mathcal{T}_{\mathcal{W}''}$ où

$$\mathcal{W}'' = \left\{ \bigcap_{p \in P_f} \left\{ k \in E ; p(k-g) < \epsilon \right\} ; \, P_f \text{ partie finie de } P \, , g \in E \, , \epsilon > 0 \right\} .$$

Exemple 6.2.3. *Soit E un espace vectoriel normé de norme $\| \cdot \|$. Soit $P = \{\| \cdot \|\}$. Dans ce cas, $\mathcal{T}_P$ coïncide avec la topologie définie par la norme $\| \cdot \|$. En effet, tout élément de $\mathcal{W}''$ est une intersection finie de boules ouvertes pour $\| \cdot \|$. C'est donc un ouvert pour la topologie définie par la norme $\| \cdot \|$. Toute boule ouverte pour $\| \cdot \|$ est un élément de $\mathcal{W}''$.*

Remarque 6.2.4. *Lorsque p est une semi-norme sur un espace vectoriel E, les ensembles $\{k \in E; p(k-g) < \epsilon\}$ sont convexes.*

La topologie $\mathcal{T}_P$ est compatible avec la structure d'espace vectoriel sur E dans le sens où les opérations dans E sont continues pour $\mathcal{T}_P$. Pour vérifier ce point, rappelons que, sur le produit de deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$, on met la topologie produit, c'est-à-dire la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{W}_{prod}}$ engendrée par

$$\mathcal{W}_{prod} = \left\{ O_X \times O_Y \, ; \, O_X \in \mathcal{T}_X \, , O_Y \in \mathcal{T}_Y \right\} .$$

Théorème 6.2.5. *Soit E un espace vectoriel équipé d'une famille P de semi-normes sur E. On munit E de la topologie $\mathcal{T}_P$. Alors les applications $\Phi_+ : E \times E \to E$ et $\Phi : \mathbb{K} \times E \to E$ définies par*

$$\Phi_+(f; g) = f + g \quad \text{et} \quad \Phi(\lambda; f) = \lambda f$$

sont continues pour la topologie produit correspondante.
On dit que $(E, \mathcal{T}_P)$ est un espace vectoriel topologique.

Démonstration. Il suffit de montrer que tout

$$V = \bigcap_{p \in P_f} \left\{ k \in E \, ; \, p(k - k_0) < \epsilon \right\} ,$$

avec $k_0 \in E$, $\epsilon > 0$ et P_f une partie finie de P, $\Phi_+^{-1}(V)$ est voisinage de chacun de ses points. Soit $(g_0, h_0) \in \Phi_+^{-1}(V)$. Pour $p \in P_f$, soit $\delta_p > 0$ tel que $p(g_0 + h_0 - k_0) = (1 - 2\delta_p)\epsilon$ (en fait, $\delta_p = (1/2)(1 - \epsilon^{-1} p(g_0 + h_0 - k_0)) > 0$). Pour

$$(g; h) \in \bigcap_{p \in P_f} \left\{ k \in E \, ; \, p(k - g_0) < \delta_p \epsilon \right\} \times \left\{ \ell \in E \, ; \, p(\ell - h_0) < \delta_p \epsilon \right\} ,$$

on a, pour $p \in P_f$,

$$\begin{aligned} p(g+h-k_0) &= p\big(g+h-(g_0+h_0)+g_0+h_0-k_0\big) \\ &\leq p\big(g+h-(g_0+h_0)\big) + p(g_0+h_0-k_0) \\ &\leq p(g-g_0) + p(h-h_0) + (1-2\delta_p)\epsilon \\ &< 2\delta_p\epsilon + (1-2\delta_p)\epsilon = \epsilon\,. \end{aligned}$$

Donc $(g;h) \in \Phi_+^{-1}(V)$. Ce dernier contient donc un voisinage ouvert de (g_0,h_0), pour la topologie produit. Il est donc ouvert.
On montre que $\Phi^{-1}(V)$ est voisinage de chacun de ses points. Soit $(\lambda_0,h_0) \in \Phi^{-1}(V)$. Pour $p \in P_f$, soit $\delta_p > 0$ tel que $p(\lambda_0 h_0 - k_0) = (1-2\delta_p)\epsilon$. Soit $\alpha_p = \min(1;\delta_p\epsilon(p(h_0)+1)^{-1})$ et $\beta_p = \delta_p\epsilon(|\lambda_0|+1)^{-1})$. Pour

$$(\lambda;h) \in \bigcap_{p\in P_f} \big\{\mu\in\mathbb{K}\,;\ |\mu-\lambda_0| < \alpha_p\big\} \times \big\{k\in E\,;\ p(k-h_0) < \beta_p\big\}\,,$$

on a, pour $p \in P_f$,

$$\begin{aligned} p(\lambda h-k_0) &\leq p\big(\lambda(h-h_0)\big) + p((\lambda-\lambda_0)h_0) + p(\lambda_0 h_0 - k_0) \\ &\leq |\lambda|\beta_p + \alpha_p p(h_0) + (1-2\delta_p)\epsilon \\ &\leq \big(|\lambda_0|+1\big)\beta_p + \alpha_p\big(p(h_0)+1\big) + (1-2\delta_p)\epsilon \\ &< 2\delta_p\epsilon + (1-2\delta_p)\epsilon = \epsilon\,. \end{aligned}$$

Donc $(\lambda;h) \in \Phi^{-1}(V)$. Ce dernier contient donc un voisinage ouvert de (λ_0,h_0), pour la topologie produit. Il est donc ouvert. □

Il est utile de savoir quand une semi-norme sur E est continue pour $\mathcal{T}_P$.

Proposition 6.2.6. *Une semi-norme q sur E est continue pour la topologie $\mathcal{T}_P$ si et seulement si il existe $C > 0$ et une partie finie P_f de P tels que*

$$\forall g \in E\,,\ q(g) \leq C \sum_{p\in P_f} p(g)\,. \tag{7}$$

Le résultat est encore vrai si l'on remplace ci-dessus la $\sum_{p\in P_f}$ *par* $\sup_{p\in P_f}$.

Démonstration.
$\Longleftarrow$) : On montre la continuité en $g_0 \in E$. Soit $\epsilon > 0$. En notant par $|P_f|$ le cardinal de P_f, on choisit $\delta = \epsilon C^{-1}(|P_f|+1)^{-1}$. Pour

$$g \in \bigcap_{p\in P_f} \big\{h\in E\,;\ p(h-g_0) < \delta\big\}$$

on a, d'après l'hypothèse,

$$|q(g) - q(g_0)| \le q(g - g_0) \le C \sum_{p \in P_f} p(g - g_0) < C\,|P_f|\,\delta \le \epsilon\,.$$

$\Longrightarrow$) : Par hypothèse, q est continue en 0. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$g \in V := \bigcap_{p \in P_f} \big\{h \in E\,;\; p(h) < \delta\big\} \Longrightarrow q(g) < 1\,.$$

Soit $g \in E$. Si, pour tout $p \in P_f$, $p(g) = 0$ alors, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda g \in V$ et $\lambda q(g) < 1$. Ceci n'est possible que si $q(g) = 0$. Maintenant, si $\sum_{p \in P_f} p(g) > 0$ alors le vecteur $g' = (\delta/2)(\sum_{p \in P_f} p(g))^{-1} g$ appartient à V, donc $q(g') < 1$ ce qui donne

$$q(g) \le (2/\delta) \sum_{p \in P_f} p(g)\,.$$

On a donc (7) avec $C = 2/\delta$. □

Proposition 6.2.7. $(E, \mathcal{T}_P)$ *est un espace séparé si et seulement si, pour tous $g \neq h$ dans E, il existe $p \in P$ telle que $p(g - h) > 0$ si et seulement si, pour tout $k \in E \setminus \{0\}$, il existe $p \in P$ telle que $p(k) > 0$.*

Démonstration. On montre la première équivalence seulement.
$\Longleftarrow$) : Soit $g \neq h$ in E. Par hypothèse, il existe $p \in P$ tel que $p(g - h) > 0$. On a

$$g \in U := \{k \in E\,;\; p(k - g) < (1/2)p(g - h)\}\,,$$
$$h \in V := \{k \in E\,;\; p(k - h) < (1/2)p(g - h)\}\,,$$

$U \in \mathcal{T}_P$ et $V \in \mathcal{T}_P$. Si $k \in U \cap V$ alors

$$p(g - h) \le p(g - k) + p(k - h) < 2 \cdot (1/2)p(g - h) = p(g - h)\,.$$

Contradiction car $p(g - h) > 0$. Donc $U \cap V = \emptyset$.
$\Longrightarrow$) : Soit $g \neq h$ in E. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{T}_P$ et $V \in \mathcal{T}_P$ tels que $U \cap V = \emptyset$. Il existe donc P_f une partie finie de P et $\epsilon > 0$ tels que

$$\bigcap_{p \in P_f} \{k \in E\,;\; p(k - g) < \epsilon\} \subset U\,.$$

Comme $h \notin U$, il existe $p \in P_f$ tel que $p(h - g) \ge \epsilon > 0$. □

Définition 6.2.8. *Un espace vectoriel E muni d'une topologie $\mathcal{T}$ est un espace vectoriel localement convexe si $\mathcal{T}$ est séparée et est engendrée par une famille de semi-normes sur E (i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{T}_P$, pour une famille P de semi-normes sur E).*

Proposition 6.2.9. *Une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(E, \mathcal{T}_P)$ converge vers g si et seulement si, pour toute $p \in P$, la suite réelle $(p(g_n - g))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. On donne deux preuves de ce résultat, la première étant basée sur la proposition 5.1.3.
$\Longleftarrow$) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|p(g_n) - p(g)| \leq p(g_n - g)$. D'après l'hypothèse, on en déduit que $\lim_{n\to\infty} p(g_n) = p(g)$. Par la proposition 5.1.3, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $(E, \mathcal{T}_P)$.
$\Longrightarrow$) : Comme $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge g dans $(E, \mathcal{T}_P)$, $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E dans $(E, \mathcal{T}_P)$ (cf. théorème 6.2.5). Il suffit d'appliquer la proposition 5.1.3 pour avoir le résultat.
Donnons maintenant une preuve "plus concrète".
$\Longleftarrow$) : Soit V un voisinage de g pour $\mathcal{T}_P$. Il existe $\epsilon > 0$ et P_f une partie finie de P tels que

$$\bigcap_{p\in P_f} \{k \in E\,;\; p(k-g) < \epsilon\} \;\subset\; V\,.$$

Comme P_f est fini, il existe, par hypothèse, un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies \forall p \in P_f\,,\, p(g_n - g) \;<\; \epsilon\,.$$

Donc, pour $n \geq N$, $g_n \in V$.
$\Longrightarrow$) : Soit $p \in P$. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\{k \in E\,;\; p(k-g) < \epsilon\}$ est un voisinage ouvert de g, il existe, par hypothèse, un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \implies g_n \;\in\; \{k \in E\,;\; p(k-g) < \epsilon\}\,.$$

Donc

$$n \geq N \implies p(g_n - g) < \epsilon\,.$$

D'où $\lim_{n\to\infty} p(g_n - g) = 0$. □

Théorème 6.2.10. *Soit E (resp. F) un espace vectoriel muni d'une famille P (resp. P') de semi-normes. Une application linéaire L de $(E, \mathcal{T}_P)$ dans $(F, \mathcal{T}_{P'})$ est continue si et seulement si la proposition (C) suivante est vraie.*
(C) : Pour toute $p' \in P'$, il existe une partie finie $P_f(p')$ de P et $C(p') > 0$ tels que

$$\forall g \in E\,,\; p'\big(L(g)\big) \;\leq\; C(p') \sum_{p\in P_f(p')} p(g)\,. \tag{8}$$

Le résultat est encore vrai si l'on remplace dans la proposition (C) *la* $\sum_{p\in P_f(p')}$ *par* $\sup_{p\in P_f(p')}$.

Démonstration. Par la proposition 5.1.3, L est continue si et seulement si, pour toute $p' \in P'$, $p' \circ L$ est continue de $(E, \mathcal{T}_P)$ dans $(\mathbb{R}; |\cdot|)$. Pour $p' \in P'$, $p' \circ L$ est une semi-norme sur E. La proposition 6.2.6 donne l'équivalence cherchée. □

Définition 6.2.11. *Le dual topologique de* $(E, \mathcal{T}_P)$ *est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur* E *pour la topologie* $\mathcal{T}_P$.

Proposition 6.2.12. *Une application linéaire* L *de* E *dans* $\mathbb{K}$ *est continue pour la topologie* $\mathcal{T}_P$ *si et seulement si il existe* $C > 0$ *et un partie finie* P_f *de* P *tels que*

$$\forall g \in E\,,\ \big|L(g)\big| \ \leq\ C \sum_{p\in P_f} p(g)\,.$$

Le résultat est encore vrai si l'on remplace ci-dessus la $\sum_{p\in P_f}$ *par* $\sup_{p\in P_f}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 6.2.10 avec $F = \mathbb{K}$ et $P' = \{|\cdot|\}$, où $|\cdot|$ est le module ou la valeur absolue. □

Définition 6.2.13. *Soit* $(E, \mathcal{T}_P)$ *un espace vectoriel localement convexe. On dit qu'une suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E *est de Cauchy si, pour tout voisinage (ouvert)* V *de* 0_E*, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que, pour tout* $(n; m) \in \mathbb{N}^2$,

$$n\ \geq\ N\ \Longrightarrow g_{n+m} - g_n \in V\,.$$

On dit que $(E, \mathcal{T}_P)$ *est complet si toute suite de Cauchy de* E *est convergente (pour* $\mathcal{T}_P$*).*

Proposition 6.2.14. *Soit* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'un espace vectoriel localement convexe* $(E, \mathcal{T}_P)$*. Elle est de Cauchy si et seulement si, pour tout* $p \in P$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} p\big(g_{n+m} - g_n\big)\ =\ 0\,.$$

En particulier, si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy dans* $(E, \mathcal{T}_P)$ *et* $p \in P$*, la suite* $(p(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration.
$\Longrightarrow$) : Soit $p \in P$ et $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $(n; m) \in \mathbb{N}^2$,

$$n \geq N \implies g_{n+m} - g_n \in \{k \in E\,;\; p(k) < \epsilon\}\,.$$

Donc, pour $n \geq N$, $\sup_{m\in\mathbb{N}} p(g_{n+m} - g_n) \leq \epsilon$.
$\Longleftarrow$) : Soit V un voisinage de 0_E pour $\mathcal{T}_P$. Il existe $\epsilon > 0$ et P_f une partie finie de P tels que

$$\bigcap_{p\in P_f} \{k \in E\,;\; p(k-g) < \epsilon\} \subset V\,.$$

Comme P_f est fini, il existe, par hypothèse, un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geq N \implies \forall p \in P_f\,,\; \sup_{m\in\mathbb{N}} p(g_{n+m} - g_n) < \epsilon\,.$$

Donc, pour $n \geq N$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $g_{n+m} - g_n \in V$.
Soit $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(E, \mathcal{T}_P)$ et $p \in P$. Comme, pour tout $(n; m) \in \mathbb{N}^2$, $|p(g_{n+m}) - p(g_n)| \leq p(g_{n+m} - g_n)$, on en déduit que $(p(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. □

6.3 Métrisabilité.

Dans le cadre du paragraphe précédent, on suppose maintenant que l'on a une famille (au plus) **dénombrable** P de semi-normes sur E. On peut donc écrire $P = \{p_n; n \in \mathbb{N}\}$. Au vu de la remarque 6.1.1, on a la

Proposition 6.3.1. *On suppose que $(E, \mathcal{T}_P)$ est séparé. Alors la formule* (6)

$$\forall (g; h) \in E^2\,,\; d(g; h) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(g-h)}{1 + p_n(g-h)} \tag{9}$$

définit une distance sur E. De plus, la topologie définie par cette distance coïncide avec $\mathcal{T}_P$. L'espace topologique $(E, \mathcal{T}_P)$ coïncide donc avec l'espace métrique (E, d).

Démonstration. Pour $(g; h) \in E^2$, la série dans (9) converge absolument donc d est bien définie. On vérifie que c'est bien une distance sur E (cf. TD ; on utilise en particulier que $(E, \mathcal{T}_P)$ est séparé). Montrons maintenant que la

topologie $\mathcal{T}_d$ associée à cette distance est en fait $\mathcal{T}_P$. Pour ce faire, il suffit de montrer que tout ouvert pour $\mathcal{T}_d$ est un ouvert pour $\mathcal{T}_P$ et que tout ouvert pour $\mathcal{T}_P$ est un ouvert pour $\mathcal{T}_d$.
Soit U un ouvert pour $\mathcal{T}_d$. Pour tout $g \in U$, U contient une boule ouverte $B_d(g; r[$ avec $r > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \ < \ \frac{r}{2}\,.$$

U contient le voisinage ouvert V de g pour $\mathcal{T}_P$ donné par

$$V \ = \ \bigcap_{n\in\{0;1;\cdots;N\}} \{k \in E\,;\ p_n(k-g) < (r/4)\}\,.$$

En effet, si $h \in V$ alors

$$0 \ \le\ d(g;h) \ \le\ \sum_{n=0}^{N} 2^{-n} p_n(h-g) \ + \ \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \ < \ 2\cdot\frac{r}{4} + \frac{r}{2} \ = \ r\,.$$

Soit V un ouvert pour $\mathcal{T}_P$. Pour tout $g \in V$, il existe une partie finie N_f de $\mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$ tels que V contient

$$V_g \ = \ \bigcap_{n\in N_f} \{k \in E\,;\ p_n(k-g) < \epsilon\}\,.$$

Soit $N = \max N_f$. Soit $r \in]0; 2^{-N}\min(1/2;\epsilon/2)[$. V_g (donc V) contient la boule ouverte $B_d(g;r[$. En effet, pour $h \in B_d(g;r[$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} 2^{-n} \frac{p_n(g-h)}{1+p_n(g-h)} \ \le\ d(g;h) \ < \ r\,.$$

Donc, pour tout $n \in N_f$, $n \le N$ et

$$\frac{p_n(g-h)}{1+p_n(g-h)} \ < \ r\cdot 2^n \ \le \ r\cdot 2^N \ \le\ \min(1/2;\epsilon/2)\,.$$

L'application $\varphi\ :]0;+\infty[\ni t \mapsto t/(1+t) \in]0;1[$ est croissante et bijective et sa bijection réciproque est donnée par $\varphi^{-1}(s) = s/(1-s)$. On déduit de l'inégalité précédente que, pour tout $n \in N_f$,

$$p_n(g-h) \ < \ \varphi^{-1}(r\cdot 2^N) \ \le\ 2\cdot r\cdot 2^N \ \le\ \epsilon$$

et donc que $h \in V_g \subset V$. □

Remarque 6.3.2. *Dans le cadre de la proposition 6.3.1, on considère une suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* E*. Comme la notion de suite de Cauchy dans* E *(cf. définition 6.2.13) est purement topologique, on peut l'exprimer au choix avec la famille* P *ou bien avec la distance* d*. Ceci vaut également pour l'éventuelle complétude de* $(E, \mathcal{T}_P)$*.*

On applique maintenant ce que l'on vient de voir aux espaces $\mathcal{S}$, C^∞ et C^∞_K muni de familles de semi-normes similaires à celles que l'on a introduites plus haut.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. Soit K un compact inclu dans Ω. On munit $C^\infty_K(\Omega;\mathbb{C})$ de la famille dénombrable $P_K = \{p_{n,K}; n \in \mathbb{N}\}$ des semi-normes définies par

$$p_{n,K} \;:\; C^\infty_K(\Omega;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d\\ |\alpha|\leq n}} \sup_{x\in K} \big|\big(\partial_x^\alpha \varphi\big)(x)\big| \,. \tag{10}$$

Si l'on remplace la somme précédente par le "sup" pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq n$, cela ne change par la topologie $\mathcal{T}_{P_K}$.

Lorsque $\Omega \neq \mathbb{R}^d$, la frontière $\partial\Omega$ n'est pas vide et, en choisissant un $x_0 \in \Omega$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n \;=\; \big\{x \in \Omega\,;\, \mathrm{dist}(x;\partial\Omega) \geq (n+1)^{-1}\big\} \cap \big\{x \in \Omega\,;\, \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^d} \leq n\big\}\,. \tag{11}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^d$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$K_n \;=\; \big\{x \in \Omega\,;\, \|x\|_{\mathbb{R}^d} \leq n\big\}\,. \tag{12}$$

Dans les deux cas, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de compacts vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$. Pour tout compact K inclu dans Ω et $n \in \mathbb{N}$, on considère les semi-normes

$$q_{n,K} \;:\; C^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d\\ |\alpha|\leq n}} \sup_{x\in K} \big|\big(\partial_x^\alpha \varphi\big)(x)\big|$$

et on pose $q_n = q_{n,K_n}$. On munit $C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ de la famille dénombrable $Q = \{q_n; n \in \mathbb{N}\}$. Si $Q' = \{q_{n,K}; n \in \mathbb{N}, K \subset\subset \Omega\}$, il se trouve que $\mathcal{T}_{Q'} = \mathcal{T}_Q$. Si l'on remplace dans la formule précédente la somme par le "sup" pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq n$, cela ne change pas les topologies $\mathcal{T}_Q$ et $\mathcal{T}_{Q'}$. On note parfois par $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$ l'espace topologique $(C^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_Q)$.

Concernant l'espace de Schwartz, on se limitera au cas $\Omega = \mathbb{R}^d$. On rappelle que l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ sur $\mathbb{R}^d$ est l'espace vectoriel des fonctions φ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ telles que, pour tous multiindices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, la fonction $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto x^\alpha(\partial_x^\beta \varphi)(x)$ est bornée. On munit $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ de la famille dénombrable $S = \{s_{n,m}; n, m \in \mathbb{N}\}$ des semi-normes définies par

$$s_{n,m} \, : \, \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d \\ |\alpha|\leq n}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}^d \\ |\beta|\leq m}} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \left| x^\alpha \big(\partial_x^\beta \varphi\big)(x) \right| .$$

Là encore on peut remplacer l'une des sommes précédentes ou bien même les deux par le "sup" correspondant sans changer la topologie $\mathcal{T}_S$.

Théorème 6.3.3. *Les espaces vectoriels* $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_K})$*,* $(C^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_Q)$ *et* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}), \mathcal{T}_S)$ *sont des espaces vectoriels localement convexes complets dont la topologie est donnée par la distance* d *définie en* (9) *avec la famille appropriée de semi-normes.*

Démonstration. En appliquant la proposition 6.2.7, on montre que les espaces sont bien séparés. Le fait que chaque topologie est donnée par la distance d appropriée découle de la proposition 6.3.1. Pour la complétude, le cas de $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_K})$ est traité dans un exercice des TD. Les autres cas se démontrent de manière similaire. □

6.4 Topologie sur $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$.

Il est naturel d'équiper $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ d'une famille P de semi-normes pour obtenir un espace vectoriel localement convexe. On aimerait de plus qu'il soit complet. On note que

$$C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \;=\; \bigcup_{K\subset\subset\Omega} C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \, .$$

Soit K un compact inclu dans Ω. On souhaite qu'une fonction $\varphi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ soit "proche de 0" pour $\mathcal{T}_P$ si et seulement si elle est "proche de 0" pour $\mathcal{T}_{P_K}$. Il est donc naturel d'exiger que la topologie $\mathcal{T}_{P_K}$ coïncide avec $\mathcal{T}_P(K)$, la topologie induite par $\mathcal{T}_P$ sur $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$.

Peut-on appliquer la construction du paragraphe 6.3 à $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$? Oui mais la complétude fait défaut comme le montre la proposition 6.4.1 ci-dessous.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et K compact dans Ω, notons par $p_{n,K,e}$ la semi-norme définie sur $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ par

$$p_{n,K,e}(\varphi) \;=\; \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^d\\ |\alpha|\leq n}} \sup_{x\in K} \left|\left(\partial_x^\alpha \varphi\right)(x)\right|.$$

C'est une extension de $p_{n,K}$, donnée par (10). Considérons les familles $P_0 = \{p_{n,K,e}; n\in\mathbb{N}, K \subset\subset \Omega\}$ et $P_1 = \{p_{n,K_n,e}; n\in\mathbb{N}\}$, avec K_n défini par (11) ou (12). Il se trouve qu'elles engendrent la même topologie séparée sur $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, i.e. $\mathcal{T}_{P_0} = \mathcal{T}_{P_1}$. De plus, on vérifie que, pour tout $K\subset\subset\Omega$, $\mathcal{T}_{P_K}$ coïncide avec $\mathcal{T}_{P_0}(K) = \mathcal{T}_{P_1}(K)$, le topologie induite sur $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ par $\mathcal{T}_{P_0} = \mathcal{T}_{P_1}$. On peut donc suivre la construction du paragraphe 6.3 mais on a la

Proposition 6.4.1. *On suppose que l'on a muni l'espace $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ d'une famille dénombrable $P = \{p_n; n\in\mathbb{N}\}$ de semi-normes de sorte que $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_P)$ soit séparé et que, pour tout compact K inclu dans Ω, $\mathcal{T}_P(K) = \mathcal{T}_{P_K}$. Alors la formule (9) définit une distance sur $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ mais l'espace métrique $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_P)$* **n'est pas complet**.

Démonstration. Par la proposition 6.3.1, la formule (9) définit une distance sur $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ dont la topologie coïncide avec $\mathcal{T}_P$. Soit $K\subset\subset\Omega$. $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est un sous-espace strict de $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Montrons par l'absurde qu'il est d'intérieur vide pour $\mathcal{T}_P$.
Supposons que $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ contienne un ouvert de $\mathcal{T}_P$. Il existe donc $\epsilon>0$, N_f une partie finie de $\mathbb{N}$ et $g_0\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ tels que

$$\bigcap_{n\in N_f\}} \left\{g\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,;\; p_n(g-g_0)<\epsilon\right\} \;\subset\; C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,.$$

Donc

$$V \;:=\; \bigcap_{n\in N_f} \left\{h\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,;\; p_n(h)<\epsilon\right\} \;\subset\; C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,.$$

Soit $g\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Il existe $M>0$ tel que, pour tout $n\in N_f$, $p_n(g)<\epsilon M$. Donc $M^{-1}g\in V\subset C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ et, comme $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est un espace vectoriel, $g\in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. D'où $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) = C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, contradiction.
Montrons maintenant que $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est un fermé pour $\mathcal{T}_P$.
Comme $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$ est un espace métrique, il suffit de montrer que, si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ qui converge vers $\psi\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ pour $\mathcal{T}_P$, alors $\psi\in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite. Comme elle converge pour $\mathcal{T}_P$, elle est de Cauchy pour $\mathcal{T}_P$ et donc aussi pour $\mathcal{T}_P(K)$. Or $\mathcal{T}_P(K) = \mathcal{T}_{P_K}$ donc $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_{P_K}))$,

qui est complet (cf. théorème 6.3.3). Elle converge donc vers un certain $\varphi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ pour $\mathcal{T}_{P_K}$. Or $\mathcal{T}_P(K) = \mathcal{T}_{P_K}$, elle converge donc aussi vers φ pour $\mathcal{T}_P(K)$ et donc aussi pour $\mathcal{T}_P$. Comme $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$ est séparé, $\psi = \varphi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$.
Il reste à montrer que $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$ n'est pas complet.
Supposons le contraire. $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$ est donc un espace métrique complet. Or,

$$C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \ = \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_{K_n}^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,,$$

où les $C_{K_n}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ sont des sous-espaces fermés d'intérieur vide. Par le théorème de Baire (cf. théorème 4.1.7), $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$ doit être d'intérieur vide, contradiction. □

Remarque 6.4.2. *La proposition 6.4.1 s'applique avec $P = P_1$. Donc $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ n'est pas complet pour $\mathcal{T}_{P_1} = \mathcal{T}_{P_0}$.*

Définition 6.4.3. *On munit $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ de la topologie $\mathcal{T}_P$ définie par la famille P de toutes les semi-normes p sur $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telles que, pour tout compact K inclu dans Ω, la restriction de p à $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ soit continue (pour $\mathcal{T}_{P_K}$). On note par $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ l'espace topologique $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$.*

Proposition 6.4.4. *L'espace vectoriel $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$ est séparé. On a $\mathcal{T}_{P_0} \subset \mathcal{T}_P$. Soit K un compact inclu dans Ω. La topologie $\mathcal{T}_P(K)$ induite sur $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ par $\mathcal{T}_P$ coïncide avec $\mathcal{T}_{P_K}$. En particulier, l'injection $i : (C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_{P_K}) \longrightarrow (C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$, donnée par $i(\varphi) = \varphi$, est linéaire continue.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$, $K \subset\subset \Omega$ et $K' \subset\subset \Omega$. La restriction de la semi-norme $p_{n,K,e}$ à $C_{K'}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ vérifie, pour tout $\varphi \in C_{K'}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, $p_{n,K,e}(\varphi) \leq p_{n,K',e}(\varphi)$. Elle est donc continue pour $\mathcal{T}_{P_{K'}}$ par la proposition 6.2.6. Donc $p_{n,K,e} \in P$ et $\mathcal{T}_{P_0} \subset \mathcal{T}_P$.
Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})\setminus\{0\}$, $p_{0,K,e}(\varphi) > 0$ pour $K = \mathrm{supp}\varphi \subset\subset \Omega$. Comme $p_{0,K,e} \in P$, $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$ est séparé, par la proposition 6.2.7.
Soit $K \subset\subset \Omega$. Soit V un ouvert pour $\mathcal{T}_{P_K}$ et $\varphi \in V$. V contient, pour une certaine partie finie N_f de $\mathbb{N}$ et un certain $\epsilon > 0$,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_f} \bigl\{\psi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,;\ p_{n,K}(\psi-\varphi) \ < \ \epsilon\bigr\}$$

$$= \ C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}) \ \cap \ \bigcap_{n\in\mathbb{N}_f} \bigl\{\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,;\ p_{n,K,e}(\psi-\varphi) \ < \ \epsilon\bigr\}$$

qui est un voisinage ouvert pour $\mathcal{T}_P(K)$ de φ. Donc $\mathcal{T}_{P_K} \subset \mathcal{T}_P(K)$.
Un ouvert U pour $\mathcal{T}_P(K)$ s'écrit $U' \cap C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ pour un ouvert U' de $\mathcal{T}_P$. Pour tout $\varphi \in U$, U' contient, pour une certaine partie finie P_f de P et un certain $\epsilon > 0$,

$$U_\varphi \ := \ \bigcap_{p \in P_f} \big\{\psi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,;\ p(\psi - \varphi) \ < \ \epsilon\big\}\,.$$

Puisque chaque $p \in P_f$ est continue sur $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ et P_f est fini, il existe, par la proposition 6.2.6, un $C > 0$ et une partie finie N_f de $\mathbb{N}$ tels que

$$\forall p \in P_f\,, \forall \kappa \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,,\ p(\kappa) \ \leq \ C \sum_{n \in N_f} p_{n,K}(\kappa)\,.$$

En posant $N = |N_f| + 1$, U contient le voisinage

$$\bigcap_{n \in N_f} \big\{\psi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,;\ p_{n,K}(\psi - \varphi) \ < \ C^{-1}N^{-1}\epsilon\big\}$$

de φ pour $\mathcal{T}_{P_K}$. D'où $\mathcal{T}_P(K) \subset \mathcal{T}_{P_K}$.
Soit U un ouvert de $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ pour $\mathcal{T}_P$. On a $i^{-1}(U) = U \cap C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, qui appartient à $\mathcal{T}_P(K)$. Comme $\mathcal{T}_{P_K} = \mathcal{T}_P(K)$, $i^{-1}(U)$ est ouvert pour $\mathcal{T}_{P_K}$. i est donc continue. □

Remarque 6.4.5. *La preuve précédente a établi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $K \subset\subset \Omega$, $p_{n,K,e} \in P$. La norme $\|\cdot\|_{\infty,\Omega}$ définie sur $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ par*

$$\|\varphi\|_{\infty,\Omega} \ = \ \sup_{x \in \Omega} \big|\varphi(x)\big|$$

appartient à P. Elle est donc continue sur $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_P)$. Elle n'est cependant pas continue sur $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_0})$ (cf. TD). Donc $\mathcal{T}_P \neq \mathcal{T}_{P_0} = \mathcal{T}_{P_1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $K \subset\subset \Omega$, la restriction de $q_{n,K}$ à $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est $p_{n,K,e}$ et cette dernière appartient à P.
Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, la restriction $s_{n,m,r}$ de $s_{n,m}$ à $C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ appartient à P. En effet, la restriction de $s_{n,m,r}$ à $C_K^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est dominée par sup$\{(|x| + 1)^n; x \in K\}p_{m,K}$ donc continue sur $C_K^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ (cf. proposition 6.2.6).

On veut vérifier que $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}) = (C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_P)$ est complet. Pour ce faire, on va utiliser la

Proposition 6.4.6. *Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Alors il existe un compact K inclu dans Ω tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est à support dans K.*

Démonstration. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$. On suppose que, pour tout compact K inclu dans Ω, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\mathrm{supp}\varphi_k\not\subset K$. Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe donc un $k_n\in\mathbb{N}$ et $x_n\notin K_n$ tels que $\varphi_{k_n}(x_n)\neq 0$. De $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(|y_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini ou bien telle que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un $y\in\partial\Omega$, la frontière de Ω. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, soit $a_n=|\varphi_{k_{s_n}}(y_n)|>0$. Pour $\varphi\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, l'expression

$$p(\varphi)\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}a_n^{-1}n|\varphi(y_n)|$$

est bien définie puisque un nombre fini de termes de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient au support de φ. Elle définit une semi-norme sur $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Soit $K\subset\subset\Omega$. Il existe un q tel que, pour $n>q$, $y_n\notin K$. Soit $M=\sup\{a_n^{-1}n;0\leq n\leq q\}$. Donc, pour $\varphi\in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$,

$$0\ \leq\ p(\varphi)\ =\ \sum_{n=0}^{q}a_n^{-1}n|\varphi(y_n)|\ \leq\ M\cdot\|\varphi\|_{\infty,K}\ =\ M\cdot p_{0,K}(\varphi)\,.$$

Ceci implique que la restriction de p à $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est continue (cf. proposition 6.2.6). Donc $p\in P$. Par hypothèse et par la proposition 6.2.14, la suite $(p(\varphi_{k_{s_n}}))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ donc bornée. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p(\varphi_{k_{s_n}})\geq a_n^{-1}n|\varphi_{k_{s_n}}(y_n)|=n$. Contradiction. □

Théorème 6.4.7. *L'espace vectoriel localement convexe $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_P)$, noté $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, est complet.*

Démonstration. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Par la proposition 6.4.6, il existe $K\subset\subset\Omega$ tel que tous les φ_n sont à support dans K. Soit $p\in P$. Par la proposition 6.2.14, on a, pour tout $m\in\mathbb{N}$, $p(\varphi_{n+m}-\varphi_n)\to 0$ quand $n\to\infty$. Ceci étant valable, par la remarque 6.4.5, pour $p=p_{k,K,e}$, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on en déduit que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_{P_K})$. Ce dernier étant complet par le théorème 6.3.3, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_{P_K})$ vers un certain $\varphi\in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Comme toute semi-norme $p\in P$ est continue sur $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_{P_K})$, on en déduit que $p(\varphi_n-\varphi)\to 0$ quand $n\to\infty$. Par la proposition 6.2.9, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. □

Remarque 6.4.8. *Dans la remarque 6.4.2, on a vu que $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}),\mathcal{T}_{P_1})$ n'est pas complet. Par le théorème 6.4.7, on retrouve $\mathcal{T}_{P_0}=\mathcal{T}_{P_1}\neq\mathcal{T}_P$ (cf. Remarque 6.4.5).*

Proposition 6.4.9. *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Elle converge vers $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ si et seulement si il existe un compact K inclu dans Ω tel que φ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n sont à support dans K, et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_K})$.*

Démonstration.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_P)$. Elle est donc de Cauchy dans cet espace. Par la proposition 6.4.6, chaque φ_n est à support dans un compact K, indépendant de n. De plus, par la preuve du théorème 6.4.7, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_K})$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{P_K})$. Par la fin de la preuve du théorème 6.4.7, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers φ dans l'espace $(C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_P)$. $\square$

On peut donner le lien suivant entre les différents espaces de fonctions test que nous avons considérés.

Proposition 6.4.10. *Les applications*

$$\begin{aligned} &i_1 : \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})\,,\; i_2 : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \\ &\textit{et} \qquad i_3 : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \end{aligned}$$

toutes données par $\varphi \mapsto \varphi$, sont linéaires, injectives, continues et d'image dense.

Démonstration. Exercice. Pour la continuité, on pourra utiliser la remarque 6.4.5 et le théorème 6.2.10. Pour les images denses, voir TD. $\square$

6.5 Espaces de distributions.

On définit ici les espaces de distributions. Pour ce faire, on considère les duaux topologiques des espaces de fonctions test introduits précédemment.

Proposition 6.5.1. *Soit K un compact inclu dans Ω. Une application linéaire T de $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est continue (pour $\mathcal{T}_{P_K}$) si et seulement si il existe $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,,\; \big|T(\varphi)\big| \;\leq\; C\, p_{n,K}(\varphi)\,. \tag{13}$$

Démonstration. Soit P_K^f une partie finie de P_K. Soit $n = \max\{m; p_{m;K} \in P_K^f\}$. On a, pour tout $\varphi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$,

$$\sum_{p \in P_K^f} p(\varphi) \ \le\ |P_K^f| \cdot p_{n,K}(\varphi)\,.$$

Le résultat cherché se déduit donc de la proposition 6.2.12. □

Proposition 6.5.2. *Une application linéaire T de $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est continue (pour $\mathcal{T}_P$) si et seulement si, pour tout compact K inclu dans Ω, la restriction de T à $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est continue pour $\mathcal{T}_{P_K}$ si et seulement si, pour tout compact K inclu dans Ω, il existe $C_K > 0$ et $n_K \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall \varphi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,,\ \big|T(\varphi)\big| \ \le\ C_K\, p_{n_K,K}(\varphi)\,. \tag{14}$$

On note par $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. C'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Ses éléments sont les **distributions** *sur Ω.*

Démonstration. On montre la première équivalence.
$\Longrightarrow$) : Soit T continue sur $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ et $K \subset\subset \Omega$. Par la continuité de l'application i de la proposition 6.4.4, $T \circ i$, la restriction de T à $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, est continue pour $\mathcal{T}_{P_K}$.
$\Longleftarrow$) : On suppose T continue sur tous les $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. La semi-norme p sur $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, donnée par $p = |\cdot| \circ T$ est continue sur chaque $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Donc $p \in P$ et p est continue sur $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Par la proposition 5.1.3, T est donc continue sur $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$.
La seconde équivalence découle de la proposition 6.5.1. □

Proposition 6.5.3. *Une application linéaire T de $C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est continue (pour $\mathcal{T}_Q$) si et seulement si il existe un compact K inclu dans Ω, $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,,\ \big|T(\varphi)\big| \ \le\ C\, q_{n,K}(\varphi)\,, \tag{15}$$

si et seulement si il existe $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,,\ \big|T(\varphi)\big| \ \le\ C\, q_n(\varphi) \ =\ C\, q_{n,K_n}(\varphi)\,. \tag{16}$$

On note par $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ le dual topologique de $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C}) = C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. C'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$. On verra que ses éléments s'identifient, sur Ω, à des **distributions à support compact**.

Démonstration. Si Q'_f une partie finie de Q'. Soit

$$n \ = \ \max\big\{m \in \mathbb{N}; \exists K' \subset\subset \Omega; q_{m;K'} \in Q'_f\big\} \ \in \mathbb{N}\,.$$

Soit K la réunion (finie !) de tous les $K' \subset\subset \Omega$ pour lequels il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $q_{m;K'} \in Q'_f$. On a alors $K \subset\subset \Omega$ et, pour tout $\varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$,

$$\sum_{p \in Q'_f} p(\varphi) \ \leq \ |Q'_f| \cdot q_{n,K}(\varphi)\,.$$

Soit Q_f une partie finie de Q. Soit $n = \max\{m \in \mathbb{N}; q_{m;K_m} \in Q_f\}$. On a

$$\forall \varphi \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})\,, \quad \sum_{p \in Q_f} p(\varphi) \ \leq \ |Q_f| \cdot q_{n,K_n}(\varphi)\,.$$

Les résultats cherchés se déduisent donc de la proposition 6.2.12 et du fait que $\mathcal{T}_Q = \mathcal{T}_{Q'}$. □

Proposition 6.5.4. *Une application linéaire T de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ est continue (pour $\mathcal{T}_S$) si et seulement si il existe $C > 0$ et $n, m \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})\,,\ \big|T(\varphi)\big| \ \leq \ C\, s_{n,m}(\varphi)\,. \tag{17}$$

On note par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ le dual topologique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. C'est l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Ses éléments sont les **distributions tempérées** *sur $\mathbb{R}^d$.*

Démonstration. Soit S_f une partie finie de S. Soit $n = \max\{n' \in \mathbb{N}; \exists m' \in \mathbb{N}; s_{n',m'} \in S_f\}$. Soit $m = \max\{m' \in \mathbb{N}; \exists n' \in \mathbb{N}; s_{n',m'} \in S_f\}$. On a

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})\,, \quad \sum_{p \in S_f} p(\varphi) \ \leq \ |S_f| \cdot s_{n,m}(\varphi)\,.$$

Le résultat cherché se déduit donc de la proposition 6.2.12. □

Remarque 6.5.5. *Grâce à la proposition 6.4.10, on a des relations entre les différents types de forme linéaire continue.*
Si $T \in \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ alors $T \circ i_1 \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ et $T \circ i_1$ n'est autre que la restriction de T au sous-espace $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ de $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$.
De même, si $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ alors la restriction de T à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est $T \circ i_2$ qui est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Si $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, $T \circ i_3 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $T \circ i_3 \circ i_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

6.6 Topologie sur les duaux topologiques.

Sur un espace vectoriel localement convexe $(E, \mathcal{T}_P)$, on peut mettre la topologie $*$ faible $\sigma(E', E)$, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications linéaires $\mathcal{L}_g : E' \ni L \mapsto L(g) \in \mathbb{C}$, pour $g \in E$. Par la proposition 5.1.3, une suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge vers $L \in E'$ pour la topologie $*$ faible si et seulement si, pour tout $g \in E$, $(L_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L(g)$ dans $\mathbb{C}$. Lorsque l'espace localement convexe est métrisable et complet, on a le théorème de Banach-Steinhaus suivant.

Théorème 6.6.1. *Soit $(E, \mathcal{T}_P)$ un espace vectoriel localement convexe métrisable et complet. Soit $\mathcal{H} \subset E'$. Si*

$$\forall g \in E, \quad \sup_{L\in\mathcal{H}} |L(g)| \ < \ +\infty$$

alors il existe P_f une partie finie de P et $C > 0$ tels que

$$\forall g \in E\,,\, \forall L \in \mathcal{H}\,, \quad |L(g)| \ \leq \ C \sum_{p\in P_f} p(g)\,.$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme chaque $L \in \mathcal{H}$ est continue, $F_n(L) := \{g \in E; |L(g)| \leq n\}$ est un fermé de E pour $\mathcal{T}_P$. Donc

$$F_n \ := \ \bigcap_{L\in\mathcal{H}} F_n(L)$$

est aussi un fermé de E. D'après l'hypothèse, $E = \cup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Comme $(E, \mathcal{T}_P)$ est un espace métrique complet, il est de Baire (cf. théorème 4.1.7). Les F_n ne peuvent donc pas tous avoir un intérieur vide. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N n'est pas vide. Il existe donc $g_0 \in F_N$, P_f une partie finie de P et $\delta > 0$ tels que

$$V \ := \ \bigcap_{p\in P_f} \big\{h \in E\,;\ p(h) < \delta\big\} \ = \ \bigcap_{p\in P_f} \big\{g \in E\,;\ p(g - g_0) < \delta\big\} \ \subset \ F_N\,.$$

Soit $g \in E$. Si, pour tout $p \in P_f$, $p(g) = 0$ alors, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda g \in V$. Donc, pour tout $L \in \mathcal{H}$, pour tout $\lambda > 0$, $\lambda|L(g)| \leq N$. Ceci impose $L(g) = 0$, pour tout $L \in \mathcal{H}$. Si, maintenant, $\sum_{p\in P_f} p(g) > 0$ alors le vecteur $\delta(2\sum_{p\in P_f} p(g))^{-1} g$ appartient à $V \subset F_N$ donc, pour tout $L \in \mathcal{H}$,

$$|L(g)| \ \leq \ 2N\delta^{-1} \sum_{p\in P_f} p(g)\,.$$

□

Corollaire 6.6.2. *Soit $(E, \mathcal{T}_P)$ un espace vectoriel localement convexe métrisable et complet. Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E' qui converge simplement vers une certaine application L de E dans $\mathbb{C}$. Alors $L \in E'$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L dans E' pour la topologie $*$ faible.*

Démonstration. L est linéaire de E dans $\mathbb{C}$. Soit $\mathcal{H} = \{L_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $g \in E$, $(L_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{C}$, elle est donc bornée. On peut donc appliquer le théorème 6.6.1. Il existe donc P_f une partie finie de P et $C > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $g \in E$,

$$\big|L_n(g)\big| \;\leq\; C \sum_{p\in P_f} p(g)\,.$$

Or $L_n(g) \to L(g)$ donc, par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient

$$\big|L(g)\big| \;\leq\; C \sum_{p\in P_f} p(g)\,.$$

D'après la proposition 6.2.12, $L \in E'$. La convergence simple de $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers L donne la même convergence pour la topologie $*$ faible. □

Définition 6.6.3. *Sur l'espace $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, on choisit de mettre la topologie $*$ faible, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications linéaires $\mathcal{L}_\varphi : \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C}) \ni T \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{C}$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$.*
Soit K un compact inclu dans Ω. Sur le dual topologique $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}))'$ de $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, on choisit de mettre la topologie $*$ faible, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications linéaires $\mathcal{L}_\varphi : (C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}))' \ni T \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{C}$, pour $\varphi \in C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$.
Sur l'espace $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$, on choisit de mettre la topologie $*$ faible, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications linéaires $\mathcal{L}_\varphi : \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C}) \ni T \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{C}$, pour $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$.
Sur l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, on choisit de mettre la topologie $*$ faible, c'est-à-dire la topologie la moins fine rendant continues les applications linéaires $\mathcal{L}_\varphi : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \ni T \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{C}$, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Théorème 6.6.4. *Soit K un compact inclu dans Ω. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans le dual $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}))'$ de $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ qui converge simplement vers une certaine application T de $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Alors $T \in (C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}))'$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}))'$ pour la topologie $*$ faible.*
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ qui converge simplement vers une certaine application T de $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Alors $T \in \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ pour la topologie $*$ faible.

Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions tempérées (i.e. une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$) qui converge simplement vers une certaine application T de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Alors $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ pour la topologie $*$ faible.

Démonstration. Dans chaque cas, le corollaire 6.6.2 s'applique, d'après le théorème 6.3.3, et donne le résultat. □

Bien que la topologie de $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ ne soit pas métrisable, le corollaire 6.6.2 est valable pour $E = \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$.

Théorème 6.6.5. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions (i.e. une suite dans $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$) qui converge simplement vers une certaine application T de $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$. Alors $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ pour la topologie $*$ faible.*

Démonstration. Soit $K \subset\subset \Omega$. $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers T sur $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. Par le théorème 6.6.4, la restriction de T à $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ appartient à $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}))'$. Ceci étant vrai pour tout $K \subset\subset \Omega$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, par la proposition 6.5.2. Comme $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T pour la topologie $*$ faible. □

Soit $(E, \mathcal{T}_P)$ un espace vectoriel localement convexe. On peut vérifier que la topologie $*$ faible sur le dual topologique E' de E est la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{W}$ engendrée par

$$\mathcal{W} = \left\{ \bigcap_{g\in E_f} \left\{ M \in E'; |(M-L)(g)| < \epsilon \right\} ; \, E_f \text{ partie finie de } E \,, L \in E' \,, \epsilon > 0 \right\} .$$

Pour $g \in E$, l'application $p_g : E' \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $p_g(L) = |L(g)|$ est une semi-norme sur E'. Soit $P^* = \{p_g; g \in E\}$. Les éléments de $\mathcal{W}$ constituent une base de voisinages pour $\mathcal{T}_{P^*}$ donc $\mathcal{T}_\mathcal{W} = \mathcal{T}_{P^*}$ et $(E', \mathcal{T}_\mathcal{W})$ est un espace vectoriel localement convexe.
D'après la proposition 6.2.14, pour une suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans E' pour la topologie $*$ faible, on a, pour tout $g \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \left| \big(L_{n+m} - L_n\big)(g) \right| = 0 .$$

En particulier, pour tout $g \in E$, la suite $(L_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc converge vers un certain $L(g) \in \mathbb{C}$. Cela définit une application L de E' dans $\mathbb{C}$. On suppose maintenant que $(E, \mathcal{T}_P)$ est métrisable et complet. Par le corollaire 6.6.2, on en déduit que $L \in E'$ et que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L dans E' pour la topologie $*$ faible. On a montré la

Proposition 6.6.6. *Soit $(E, \mathcal{T}_P)$ un espace vectoriel localement convexe métrisable et complet. Alors son dual topologique E' est complet pour la topologie $*$ faible.*

Corollaire 6.6.7. *Soit K un compact inclu dans Ω. Les espaces $(C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C}))'$, $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ sont complets pour la topologie $*$ faible correspondante.*

Démonstration. Dans chaque cas, la proposition 6.6.6 s'applique. $\square$

Corollaire 6.6.8. *L'espace $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ est complet pour la topologie $*$ faible.*

Démonstration. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ pour la topologie $*$ faible. D'après la proposition 6.2.14, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, $(T_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc converge vers un certain $T(\varphi)$. Par le théorème 6.6.5, $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers T dans $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ pour la topologie $*$ faible. $\square$

6.7 Injections continues.

Dans ce paragraphe, on va satisfaire une importante condition que nous avions requise dans le paragraphe 6.1, à savoir qu'une fonction localement intégrable sur Ω doit définir une distribution sur Ω via la formule (4). On va aussi préciser la nature de $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$.

Définition 6.7.1. *On dit qu'un ouvert ω inclu dans Ω est un ouvert de nullité pour une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ à support inclu dans ω, $T(\varphi) = 0$.*
Le support d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ est le complémentaire du plus grand ouvert de nullité pour T. C'est un fermé de Ω, noté supp T.
On définit de même le support d'un élément $T \in \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ et celui d'un élément $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Proposition 6.7.2. *Si $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$, resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$) et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, supp $\lambda T =$ supp T et supp $(S+T) \subset$ supp $S \cup$ supp T.*

Démonstration. Exercice. □

Proposition 6.7.3. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $T \in \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$) telle que supp T est un compact inclu dans Ω. Il existe $\chi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de supp T.*
Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$), $T(\varphi) = T(\chi\varphi)$.
Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$) est nulle au voisinage de supp T. Alors $T(\varphi) = 0$.

Démonstration. Voir TD. □

Remarque 6.7.4. *Soit $T \in \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$. Par la proposition 6.5.3, il existe un compact K inclu dans Ω et $n \in \mathbb{N}$ tels que* (15) *est valide. En particulier, supp $T \subset K$ et supp T est compact. De plus, pour $K' \subset\subset \Omega$ et pour $\varphi \in C_{K'}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, $|T(\varphi)| \leq Cq_{n,K}(\varphi) \leq Cp_{n,K'}(\varphi)$. Donc la restriction de T à $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ est une distribution à support compact (inclu dans K). Voir aussi la remarque 6.5.5.*

Théorème 6.7.5. *L'application $i : \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ qui, à toute $T \in \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$, associe sa restriction à $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, est bien définie, linéaire, continue et injective. De plus, l'image de i est $i(\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C}); \operatorname{supp} T \subset\subset \Omega\}$. L'application $j : i(\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})) \longrightarrow \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ qui, à $T \in i(\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C}))$ associe, pour $\chi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $\chi = 1$ au voisinage du support de T, $T_\chi : \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $T_\chi(\varphi) = T(\chi\varphi)$, est bien définie, linéaire, continue et c'est la bijection réciproque de $i : \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow i(\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C}))$.*
On identifiera souvent $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$ avec $i(\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C}))$.

Démonstration. Soit $F = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C}); \operatorname{supp} T \subset\subset \Omega\}$. Par la remarque 6.7.4, i est bien définie et $i(\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})) \subset F$. i est linéaire. Si T appartient au noyau de i alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$, on a, par la proposition 6.7.3, $T(\varphi) = T(\chi\varphi) = i(T)(\chi\varphi) = 0$. Donc $T = 0$ et i est injective.
Par la définition 6.6.3, pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$, $\mathcal{L}_\varphi : \mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C}) \ni T \mapsto T(\varphi)$ est continue. Donc, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C}) \ni T \mapsto i(T)(\varphi)$ est continue. Par la proposition 5.1.3, i est continue.
Soit $T \in F$ et $\chi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de supp T. Comme il existe $C > 0$ et $C_\chi > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$,

$$|T(\chi\varphi)| \ \leq\ C \cdot p_{n,\operatorname{supp}\chi}(\chi\varphi) \ \leq\ C_\chi \cdot p_{n,\operatorname{supp}\chi}(\varphi) \ =\ C_\chi \cdot q_{n,\operatorname{supp}\chi}(\varphi)\,,$$

l'application $T_\chi : \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto T(\chi\varphi)$ appartient à $\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})$. De plus, $i(T_\chi) = T$, puisque $\chi = 1$ au voisinage de supp T. Donc $i(\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})) = F$.
Toujours pour $T \in F$, soit $\chi, \chi' \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telles que $\chi = 1$ au voisinage de

supp T et $\chi' = 1$ au voisinage de supp T. Comme $\chi - \chi'$ s'annule au voisinage de supp T, $T_\chi = T_{\chi'}$, par la proposition 6.7.3. Donc j est bien définie. Elle est linéaire et $i \circ j = \mathrm{id}_F$. Pour $T \in \mathcal{E}'(\Omega; \mathbb{C})$, on a, par la proposition 6.7.3, pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega; \mathbb{C})$, $T(\varphi) = T(\chi\varphi) = i(T)(\chi\varphi) = (i(T))_\chi(\varphi)$. Donc $j \circ i = \mathrm{id}_{\mathcal{E}'(\Omega;\mathbb{C})}$. j est donc bien la bijection réciproque de i.
On **admet** que j est continue. □

On se place maintenant sur $\mathbb{R}^d$. Au vu de la remarque 6.5.5, on a le

Théorème 6.7.6. *L'application $j_1 : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ qui, à $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, associe sa restriction à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, est bien définie, linéaire, continue et injective.*
L'application $j_2 : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ qui, à toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, associe sa restriction à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, est bien définie, linéaire, continue et injective.

Démonstration. Par la remarque 6.5.5, j_1 est bien définie et linéaire. Soit T appartenant au noyau de j_1 et $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$. Pour tout $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, $j_1(T)(\psi) = 0$. Comme $(\mathcal{E}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}), \mathcal{T}_Q)$ est un espace métrique, il existe, d'après la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ dans $(\mathcal{E}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}), \mathcal{T}_Q)$ (cf. proposition 6.4.10), une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ qui converge vers φ dans $(\mathcal{E}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}), \mathcal{T}_Q)$. Comme T est continue sur cet espace,

$$T(\varphi) \;=\; \lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} j_1(T)(\varphi_n) \;=\; 0\,.$$

Donc $T = 0$ et j_1 est injective.
Par la définition 6.6.3, pour tout $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, la forme $\mathcal{L}_\varphi : \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \ni T \mapsto T(\varphi)$ est continue. Donc, pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \ni T \mapsto j_1(T)(\varphi)$ est continue. Par la proposition 5.1.3, j_1 est continue.
De manière similaire, on montre les propriétés annoncées de j_2. □

Remarque 6.7.7. *Dans le cadre du théorème 6.7.5, en utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{C})$ dans $\mathcal{E}(\Omega; \mathbb{C})$, on constate, pour $T \in \mathcal{E}'(\Omega; \mathbb{C})$, qu'on a supp $T =$ supp $i(T)$.*
De même, dans le cadre du théorème 6.7.6, on constate, pour $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$, que supp $T =$ supp $j_1(T) =$ supp $j_2 \circ j_1(T)$.

On en vient maintenant aux distributions tempérées associées à une fonction. Pour ce faire, on a besoin de quelques rappels de théorie de l'intégration.

Pour Ω, un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, et $p \in [1; +\infty]$, on munit $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbb{C})$ (pour la mesure de Lebesgue) de sa norme habituelle $\|\cdot\|_p$. On note par $\mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{C})$

l'espace vectoriel des fonctions continues sur Ω qui tendent vers 0 sur le bord $\partial\Omega$ et à l'infini. Plus précisément, une fonction $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{C})$ si elle est continue et si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \notin K_N$, $|\varphi(x)| < \epsilon$. L'espace $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}_b(\Omega;\mathbb{C})$, l'espace des fonctions continues bornées sur Ω. Ce dernier est complet (cf. théorème 10.1.6). Donc $\mathcal{C}_0(\Omega;\mathbb{C})$ est un espace de Banach.
On utilisera les inégalités de Hölder. On identifie le dual de $\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{C})$, pour $1 \leq q < \infty$, (resp. $C_0(\Omega;\mathbb{C})$) à $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C})$ avec $1 < p = q/(q-1) \leq \infty$, (resp. $\mathrm{L}^1(\Omega;\mathbb{C})$) en identifiant toute fonction $f \in \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $f \in \mathrm{L}^1(\Omega;\mathbb{C})$) à la forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $C_0(\Omega;\mathbb{C})$) donnée par

$$R_f : g \mapsto \int_\Omega f(x)g(x)\,dx\,. \tag{18}$$

On utilisera aussi le fait que $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{L}^q(\Omega;\mathbb{C})$, pour $1 \leq q < \infty$, et aussi dans $C_0(\Omega;\mathbb{C})$ (cf. TD).

Théorème 6.7.8. *L'application* $j : \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *qui, à* $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, *associe*

$$T_f^t \;:\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \ni \varphi \;\mapsto\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx \,\in \mathbb{C}\,,$$

est bien définie, linéaire, continue et injective.

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Pour $p = \infty$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\varphi(x)\big|\,dx \;\leq\; \|f\|_\infty \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} \big(|x|+1\big)^{-d-1}\,dx\right) \cdot\; s_{d+1,0}(\varphi)\,.$$

Pour $p = 1$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\varphi(x)\big|\,dx \;\leq\; \|f\|_1 \cdot s_{0,0}(\varphi)\,.$$

Pour $1 < p < \infty$, on a, par l'inégalité de Hölder, en notant par n la partie entière de d/q plus 1 avec $1/q + 1/p = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\varphi(x)\big|\,dx \;\leq\; \|f\|_p \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^d} \big(|x|+1\big)^{-nq}\,dx\right)^{1/q} \cdot\; s_{n,0}(\varphi)\,.$$

Dans les trois cas, $T_f^t(\varphi)$ est définie comme intégrale absolument convergente et $|T_f^t(\varphi)|$ est dominé par le membre de droite de l'inégalité précédente correspondante. Il existe donc $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$

et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, $|T_f^t(\varphi)| \leq C \cdot \|f\|_p \cdot s_{n,0}(\varphi)$. Par la proposition 6.5.4, $T_f^t \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Donc j est bien définie. De plus, comme $|T_f^t(\varphi)| = |j(f)(\varphi)|$, cette dernière inégalité donne l'inégalité (8) du théorème 6.2.10, donc ce dernier donne la continuité de j.
Soit f dans le noyau de j. T_f^t est la restriction de R_f (donnée par (18)). Donc R_f est une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ avec $1 \leq q < \infty$ (resp. $C_0(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$), nulle sur un sous-espace dense, à savoir $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Par un corollaire du théorème d'Hahn-Banach (cf. proposition 3.3.1), R_f et donc f est nulle. j est donc injective. $\square$

On revient maintenant sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Pour $p \in [1;+\infty]$ et $K \subset\subset \Omega$, on note par $\|\cdot\|_{K,p}$ la norme naturelle sur $\mathrm{L}^p(K;\mathbb{C})$.

Définition 6.7.9. *On désigne par* $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ *l'espace vectoriel des fonctions* f*, mesurables sur* Ω *(pour la mesure de Lebesgue), telles que la restriction* $f_{|K}$ *de* f *à* K *appartient à* $\mathrm{L}^p(K;\mathbb{C})$. *Pour* $K \subset\subset \Omega$, $r_{K,p} : \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *définie par* $r_{K,p}(f) = \|f_{|K}\|_{K,p}$ *est une semi-norme. On munit l'espace* $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ *de la famille* $R_p = \{r_{K,p}; K \subset\subset \Omega\}$.

Soit $p \in [1;+\infty]$. Il se trouve que la topologie $\mathcal{T}_{R_p}$ est séparée et coïncide avec la topologie $\mathcal{T}_{R'_p}$ engendrée par la famille dénombrable de semi-normes $R'_p = \{r_{K_n,p}; n \in \mathbb{N}\}$. Donc $(\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}), \mathcal{T}_{R_p})$ est métrisable. De plus, on peut montrer (en utilisant la complétude des $\mathrm{L}^p(K;\mathbb{C})$) qu'il est complet. D'autre part, on constate que $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}) \subset \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ et $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ (puisque, pour $K \subset\subset \Omega$, $\mathrm{L}^p(K;\mathbb{C}) \subset \mathrm{L}^1(K;\mathbb{C})$).
On est en mesure maintenant d'associer à une fonction dans $\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ une distribution, et ce de manière continue.

Théorème 6.7.10. *Soit* $p \in [1;+\infty]$.
L'application $k_1 : \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$, *donnée par* $k_1(f) = f$, *est bien définie, linéaire, continue et injective.*
L'application $k_2 : \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$, *donnée par* $k_2(f) = f$, *est bien définie, linéaire, continue et injective.*
L'application $k_3 : \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ *qui, à* $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$, *associe*

$$T_f \ : \ \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}) \ni \varphi \ \mapsto \ \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x)\,dx \in \mathbb{C}\,,$$

est bien définie, linéaire, continue et injective.

Démonstration. D'après les inclusions $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbb{C}) \subset \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C}) \subset \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$, les applications k_1 et k_2 sont bien définies. Pour tout $K \subset\subset \Omega$, $r_{K,p} \leq \|\cdot\|_p$ et $r_{K,1} \leq r_{K,p}$ (par l'inégalité de Hölder). Donc k_1 et k_2 sont continues, d'après le théorème 6.2.10.
Soit $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{C})$ et $\varphi \in C^\infty_K(\Omega;\mathbb{C})$. On a

$$\int_\Omega \big|f(x)\varphi(x)\big|\,dx \;\leq\; \|f\|_{K,1}\cdot p_{0,K}(\varphi)\,.$$

$T_f(\varphi)$ est définie comme intégrale absolument convergente et $|T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{K,1}\cdot p_{0,K}(\varphi)$. Par la proposition 6.5.1, T_f est continue sur $C^\infty_K(\Omega;\mathbb{C})$, pour tout compact K. Par la proposition 6.5.2, $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$. Donc k_3 est bien définie. De plus, comme $|T_f(\varphi)| = |k_3(f)(\varphi)|$, l'inégalité précédente donne l'inégalité (8) du théorème 6.2.10, donc ce dernier donne la continuité de k_3.
Soit f dans le noyau de k_3. Soit $K \subset\subset \Omega$. On note par g la restriction de f à $\mathring{K}$. On sait que $g \in \mathrm{L}^1(\mathring{K};\mathbb{C})$. Pour $\varphi \in C^\infty_c(\mathring{K};\mathbb{C})$, soit $\psi \in C^\infty_c(\Omega;\mathbb{C})$ définie par $\psi(x) = \varphi(x)$ si $x \in \mathring{K}$ et par $\psi(x) = 0$ sinon. On a

$$\int_{\mathring{K}} g(x)\varphi(x)\,dx \;=\; \int_\Omega f(x)\psi(x)\,dx \;=\; 0\,.$$

La forme linéaire continue R_g (cf. (18) avec Ω remplacé par $\mathring{K}$) sur $C_0(\mathring{K};\mathbb{C})$ est donc nulle sur sur un sous-espace dense dans $C_0(\mathring{K};\mathbb{C})$, à savoir $C^\infty_c(\mathring{K};\mathbb{C})$. Par un corollaire du théorème d'Hahn-Banach (cf. proposition 3.3.1), R_g et donc g est nulle. Donc $r_{K,1}(f) = \|g\|_{K,1} = 0$. Ceci étant vrai pour tout $K \subset\subset \Omega$, f annule toutes les semi-normes de R_1. Comme la topologie $\mathcal{T}_{R_1}$ est séparée, $f = 0$. k_3 est donc injective. □

7 Opérations continues sur les distributions.

On généralise ici aux distributions bon nombre d'opérations sur les fonctions, à l'exception notable du produit.

7.1 Restriction et support singulier d'une distribution.

On considère deux ouverts ω et Ω de $\mathbb{R}^d$ tels que $\omega \subset \Omega$.

Proposition 7.1.1. *L'injection $i : \mathcal{D}(\omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, qui à $\varphi \in \mathcal{D}(\omega;\mathbb{C})$ associe son extension $\tilde{\varphi}$ à Ω par 0, est bien définie, linéaire et continue. L'injection $i' : \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\omega;\mathbb{C})$, qui à T associe sa restriction $T_{|\omega}$ à $\mathcal{D}(\omega;\mathbb{C})$ est bien définie, linéaire et continue.*

Démonstration. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\omega;\mathbb{C})$, $\tilde{\varphi}$ est bien de classe C^∞ et supp $\tilde{\varphi}$ = supp φ. Donc i est bien définie et linéaire. On note par P_ω (resp. P_Ω) la famille de semi-normes sur $\mathcal{D}(\omega;\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$). Soit $p \in P_\Omega$, la restriction $p_{|\omega}$ de p à ω est une semi-norme sur $\mathcal{D}(\omega;\mathbb{C})$ car, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\omega;\mathbb{C})$, $p_{|\omega}(\varphi) = p(\tilde{\varphi})$. De plus, comme tout compact K inclu dans ω est aussi inclu dans Ω, la restriction de $p_{|\omega}$ à $C_K^\infty(\omega;\mathbb{C})$ est continue puisque la restriction de p à $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ l'est. Donc $p \circ i = p_{|\omega} \in P_\omega$. Par le théorème 6.2.10, i est continue. Donc i' est bien définie et linéaire. Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\omega;\mathbb{C})$, en posant $\mathcal{L}_\varphi : \mathcal{D}'(\omega;\mathbb{C}) \ni T \mapsto T(\varphi)$, $\mathcal{L}_\varphi \circ i' = \mathcal{L}_{\tilde{\varphi}} : \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C}) \ni T \mapsto T(\tilde{\varphi})$. Par le théorème 6.2.10, i' est continue. □

Définition 7.1.2. *On dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ est C^∞ sur ω s'il existe $g \in C^\infty(\omega;\mathbb{C})$ telle que $T_{|\omega} = T_g$ dans $\mathcal{D}'(\omega;\mathbb{C})$. Le complémentaire du plus grand ouvert où T est C^∞ est appelé le support singulier, noté suppsing T. C'est un fermé de Ω.*
Pour une distribution tempérée $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, on dit qu'elle est C^∞ sur ω si sa restriction $j_2(T)$ à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ l'est. Son support singulier est par définition celui de $j_2(T)$.

Proposition 7.1.3. *Soit $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a suppsing $T \subset$ supp T, suppsing $(S+T) \subset$ supp $S \cup$ supp T et suppsing λT = suppsing T.*

Démonstration. Exercice. □

7.2 Produit par une fonction C^∞.

Pour $f \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, l'application $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto T(f\varphi)$ est bien définie et linéaire car $f\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$.

Proposition 7.2.1. *L'application précédente est une distribution sur Ω. On note cette dernière par fT.*

Démonstration. Exercice. (Indication : on pourra utiliser la formule de Leibnitz sur les dérivées d'un produit de fonctions C^∞). □

Il se trouve que l'application de $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})\times\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, qui à (f,T) associe fT n'est pas continue. Cependant, on a la

Proposition 7.2.2. *Soit $f \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$.*
L'application linéaire $\mathcal{P}_f : \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, qui à φ associe $f\varphi$, est continue. L'application linéaire $\mathcal{P}'_f : \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, qui à T associe fT, est continue.
Soit $S \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$. L'application linéaire $\mathcal{P}_S : \mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, qui à g associe gS, est continue.
De plus, si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $\mathcal{E}(\Omega;\mathbb{C})$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S dans $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ alors $(g_nS_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers gS dans $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$.

Démonstration. ..... Utiliser le fait que $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ est localement convexe et le théorème 6.2.10 ..... □

Proposition 7.2.3. *Pour $f \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$,*

$$\operatorname{supp} fT \subset \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} T \quad \textit{et} \quad \operatorname{suppsing} fT \subset \operatorname{suppsing} T\,.$$

Démonstration. Exercice. □

Remarque 7.2.4. *Si supp $f \cap$ supp $T = \emptyset$, $fT = 0$. Si $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x$ et $T = \delta_0$, la masse de Dirac en 0, $fT = 0$ donc*

$$\operatorname{supp} fT = \emptyset \neq \{0\} = \operatorname{supp} f \cap \operatorname{supp} T\,.$$

Si suppsing $T \neq \emptyset$ et supp $f \cap$ supp $T = \emptyset$ alors

$$\operatorname{suppsing} fT = \emptyset \neq \operatorname{suppsing} T\,.$$

Si l'on multiplie une distribution tempérée par une fonction C^∞, on n'obtient pas toujours une distribution tempérée. Cela vient du fait que le produit d'une fonction C^∞ par une fonction de l'espace de Schwarz n'est pas toujours dans ce dernier.

Définition 7.2.5. *Soit $m \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction $f \in C^m(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est à croissance lente si, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq m$, il existe $m_\alpha \in \mathbb{N}$ et $C_\alpha > 0$ tels que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d\,,\ \left|(\partial^\alpha f)(x)\right| \leq C_\alpha(|x|+1)^{m_\alpha}\,.$$

On note par $O_M^m(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^m à croissance lente. On note par $O_M(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ à croissance lente.

Proposition 7.2.6. *Soit $f \in O_M(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.*
L'application linéaire $\mathcal{M}_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, qui à φ associe $f\varphi$, est continue. L'application linéaire $\mathcal{M}'_f : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, qui à S associe fS, est continue.

Démonstration. ..... □

7.3 Dérivation des distributions.

Pour $\alpha = (\alpha_1;\cdots;\alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on pose $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. On note par les dérivées partielles dans $\mathbb{R}^d$ par $\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1}\cdots\partial^{\alpha_d}$ avec $\partial^{\alpha_j} = (\partial/\partial x_j)^{\alpha_j}$.

Proposition 7.3.1. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$.*
L'application $\partial^\alpha : \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \partial^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ est linéaire continue. Pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, l'application $\partial^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\varphi)$ définit une distribution sur Ω. L'application $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C}) \ni T \mapsto \partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ est linéaire continue.
L'application $\partial^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto \partial^\alpha\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est linéaire continue. Pour toute $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, l'application $\partial^\alpha T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}T(\partial^\alpha\varphi)$ définit une distribution tempérée sur Ω. L'application $\partial^\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \ni T \mapsto \partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est linéaire continue.

Démonstration. Comme $\partial^{\alpha+\beta}\varphi = \partial^\alpha(\partial^\beta\varphi)$ et $\partial^{\alpha+\beta}T = \partial^\alpha(\partial^\beta T)$, il suffit de montrer le résultat pour $|\alpha| = 1$ puis procéder par récurrence sur $|\alpha|$. On suppose désormais que $|\alpha| = 1$.
Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, $\partial^\alpha\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $K \subset\subset \Omega$, $p_{n,K,e}(\partial^\alpha\varphi) \leq p_{n+1,K,e}(\varphi)$. Par le théorème 6.2.10, ∂^α est continue sur $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Donc, pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, $\partial^\alpha T$ est linéaire continue. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$, on a, pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, $|(\partial^\alpha T)(\varphi)| = |T(\partial^\alpha\varphi)|$, donc, par le théorème 6.2.10, ∂^α est continue sur $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$.
On traite le cas des distributions tempérées de manière similaire puisque l'on a, pour tout $n,m \in \mathbb{N}$ et tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, pour $|\alpha| = 1$, $s_{n,m}(\partial^\alpha\varphi) \leq s_{n,m+1}(\varphi)$. □

Proposition 7.3.2. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$.*
On a supp $(\partial^\alpha T) \subset$ supp T. Pour tout ouvert ω inclu dans Ω, $(\partial^\alpha T)_{|\omega} = \partial^\alpha(T_{|\omega})$. De plus, suppsing $(\partial^\alpha T) \subset$ suppsing T.

Démonstration. Exercice. □

Proposition 7.3.3. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Alors pour $f \in C^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $O_M(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$) et $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$),*

$$\partial^\alpha(fT) \;=\; \sum_{\beta\leq\alpha} C_\alpha^\beta \cdot (\partial^{\alpha-\beta} f)\cdot(\partial^\beta T)\,.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de Leibnitz pour les dérivées d'un produit de fonctions C^∞. □

Définition 7.3.4. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$. L'application $|\cdot|\circ T$ est une semi-norme sur $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Soit $K \subset\subset \Omega$. Par la proposition 6.5.2, il existe un $n \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que la restriction à $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ de $|\cdot|\circ T$ soit dominée par la semi-norme $Cp_{n,K}$. Soit n_K le plus petit entier naturel vérifiant cette propriété. On dit que la restriction de T à $C_K^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est d'ordre n_K.*
La borne supérieure de l'ensemble $\{n_K; K \subset\subset \Omega\}$ est appelée l'ordre (de dérivation) de la distribution T. C'est un entier naturel ou bien $+\infty$.

Proposition 7.3.5. *Une distribution à support compact est d'ordre fini.*
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ d'ordre $m \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| \leq m$, $\partial^\alpha\varphi$ est nulle sur le support de T, alors $T(\varphi) = 0$.

Démonstration. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ à support compact K. Soit $\chi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de K. Soit $K' = \operatorname{supp}\varphi$. Par la proposition 6.5.2, la restriction de $|\cdot|\circ T$ à $C_{K'}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ est dominée par une certaine semi-norme $Cp_{n,K'}$. Soit $K'' \subset\subset \Omega$ et $\varphi \in C_{K''}^\infty(\Omega;\mathbb{C})$. On a $T(\varphi) = T(\chi\varphi)$, par la proposition 6.7.3. Donc $|T(\varphi)| \leq Cp_{n,K',e}(\chi\varphi)$. Par la formule de Leibnitz (pour les fonctions), $|T(\varphi)| \leq C'p_{n,K',e}(\varphi)$. Donc T est d'ordre au plus n.
Le second résultat est démontré en TD. □

Les propositions suivantes donnent un lien entre la dérivation classique et celle des distributions.

Proposition 7.3.6. *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq m$.*
Si $f \in C^m(\Omega;\mathbb{C})$ alors $\partial^\alpha(T_f) = T_{\partial^\alpha f}$.
Si $f \in O_M^m(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ alors $\partial^\alpha(T_f^t) = T_{\partial^\alpha f}^t$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule d'intégration par parties. □

Proposition 7.3.7. Formule des sauts. *On se place en dimension $d = 1$. Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle qu'il existe $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tels que, pour tout $i \in \{1;\cdots;n\}$, $f_{|]x_{i-1};x_i[}$ est continue, et, pour tout $i \in \{1;\cdots;n-1\}$,*

$$f(x_i + 0) \;:=\; \lim_{\substack{x\to x_i\\ x>x_i}} f(x) \quad \textit{et} \quad f(x_i - 0) \;:=\; \lim_{\substack{x\to x_i\\ x<x_i}} f(x)$$

existent dans $\mathbb{C}$. Donc $f \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(]a;b[;\mathbb{C})$. On suppose de plus que f' existe presque partout et que $f' \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(]a;b[;\mathbb{C})$. Alors, dans $\mathcal{D}'(]a;b[;\mathbb{C})$,

$$\big(T_f\big)' \;=\; T_{f'} \;+\; \sum_{i=1}^{n-1}\big(f(x_i+0) \;-\; f(x_i-0)\big)\cdot\delta_{x_i}\,. \tag{19}$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(]a;b[;\mathbb{C})$. Comme f est bornée, on a

$$\begin{aligned}\big(T_f\big)'(\varphi) \;&=\; -T_f\big(\varphi'\big) \;=\; -\int_a^b f(x)\varphi'(x)\,dx \\ &=\; -\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}+\epsilon}^{x_i-\epsilon} f(x)\varphi'(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Par intégration par parties,

$$\big(T_f\big)'(\varphi) \;=\; -\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\left(\big[f(x)\varphi(x)\big]_{x_{i-1}+\epsilon}^{x_i-\epsilon} \;-\; \int_{x_{i-1}+\epsilon}^{x_i-\epsilon} f'(x)\varphi(x)\,dx\right).$$

Comme $f' \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(]a;b[;\mathbb{C})$ et φ est à support compact dans $]a;b[$,

$$\begin{aligned}\big(T_f\big)'(\varphi) \;&=\; -\lim_{\epsilon\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\big[f(x)\varphi(x)\big]_{x_{i-1}+\epsilon}^{x_i-\epsilon} \;+\; \int_a^b f'(x)\varphi(x)\,dx \\ &=\; \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i+0)\varphi(x_i) \;-\; \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i-0)\varphi(x_i) \;+\; T_{f'}(\varphi)\,.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]a;b[;\mathbb{C})$, on a montré (19). □

7.4 Transformation de Fourier.

Dans ce paragraphe, on se place sur $\mathbb{R}^d$. Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, la transformée de Fourier de f est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ qui à $\xi \in \mathbb{R}^d$ associe l'intégrale absolument convergente

$$\hat{f}(\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx\,.$$

Si, de plus, $\hat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, on peut reconstituer f (presque partout) par la formule d'inversion de Fourier

$$f(x) \;=\; (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi)\, d\xi\,.$$

Soit $I_v : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ qui à f associe la fonction $I_v f$ donnée par $(I_v f)(x) = f(-x)$. Elle est continue. L'application $I'_v : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ qui à T associe la distribution tempérée $T \circ I_v$ est bien bien définie et continue.

Proposition 7.4.1. *L'application $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ qui à φ associe $\hat{\varphi}$ est bien définie, linéaire et continue. Elle est bijective et sa bijection réciproque est donnée par $(2\pi)^{-d} I_v \circ \mathcal{F}$, qui est aussi continue.*
L'application $\mathcal{F}' : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ qui à T associe $T \circ \mathcal{F}$ est bien définie, linéaire et continue. Elle est bijective et sa bijection réciproque est donnée par $(2\pi)^{-d} \mathcal{F}' \circ I'_v$, qui est aussi continue.

Démonstration. ..... □

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^d$, soit $f_\alpha : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.

Proposition 7.4.2. *Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, $\mathcal{F}(f_\alpha \varphi) = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha(\mathcal{F}(\varphi))$ et $\mathcal{F}'(f_\alpha T) = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha(\mathcal{F}'(T))$.*

7.5 Produit tensoriel de distribution.

Soit $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*$. Soit Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^{d_1}$ et Ω_2 un ouvert de $\mathbb{R}^{d_2}$. Pour $f_1 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ et $f_2 : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ le produit tensoriel $f_1 \otimes f_2$ de f_1 et f_2 est l'application $\Omega_1 \times \Omega_2 \ni (x_1; x_2) \mapsto f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$. On remarque les choses suivantes :
Si f_1 est C^∞ sur Ω_1 et f_2 est C^∞ sur Ω_2, alors $f_1 \otimes f_2$ est C^∞ sur $\Omega_1 \times \Omega_2$;
Si $f_1 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_1;\mathbb{C})$ et $f_2 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_2;\mathbb{C})$, alors $f_1 \otimes f_2 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$. Si

Proposition 7.5.1. *L'espace vectoriel* $\mathcal{D}(\Omega_1;\mathbb{C})\otimes\mathcal{D}(\Omega_2,\mathbb{C}) = \{\varphi_1\otimes\varphi_2;\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1), \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)\}$ *est dense dans* $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$.

Démonstration. ..... □

Proposition 7.5.2. *Soit* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$.
Pour tout $x_1 \in \Omega_1$*,* $\varphi(x_1;\cdot) : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{C}$*, qui à* x_2 *associe* $\varphi(x_1;x_2)$*, appartient à* $\mathcal{D}(\Omega_2;\mathbb{C})$.
Pour tout $x_2 \in \Omega_2$*,* $\varphi(\cdot;x_2) : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ *qui à* x_1 *associe* $\varphi(x_1;x_2)$*, appartient à* $\mathcal{D}(\Omega_1;\mathbb{C})$.

Démonstration. ..... □

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$ et $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$, on peut appliquer à x_2 fixé, T_1 à $\varphi(\cdot;x_2)$. De même, si $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2;\mathbb{C})$, on peut appliquer, à x_1 fixé, T_2 à $\varphi(x_1;\cdot)$.

Proposition 7.5.3. *Soit* $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$*,* $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2;\mathbb{C})$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$*. La fonction* $T_2(\varphi) : \Omega_1 \ni x_1 \mapsto T_2(\varphi(x_1;\cdot))$ *appartient à* $\mathcal{D}(\Omega_1;\mathbb{C})$*. La fonction* $T_1(\varphi) : \Omega_2 \ni x_2 \mapsto T_1(\varphi(\cdot;x_2))$ *appartient à* $\mathcal{D}(\Omega_2;\mathbb{C})$.
Les applications

$$\mathcal{D}(\Omega_1\times\Omega_2;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto T_1(T_2(\varphi)) \in \mathbb{C} \ \text{ et } \ \mathcal{D}(\Omega_1\times\Omega_2;\mathbb{C}) \ni \varphi \mapsto T_2(T_1(\varphi)) \in \mathbb{C}$$

sont bien définies, coïncident et définissent une distribution sur $\Omega_1 \times \Omega_2$*. On note cette dernière par* $T_1 \otimes T_2$*, c'est le produit tensoriel de* T_1 *et* T_2.

Démonstration. ..... □

Proposition 7.5.4. *Soit* $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$ *et* $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2;\mathbb{C})$.
Alors $\operatorname{supp}(T_1 \otimes T_2) = (\operatorname{supp} T_1) \times (\operatorname{supp} T_2)$.
Pour $\alpha = (\alpha_1;\alpha_2) \in \mathbb{N}^{d_1} \times \mathbb{N}^{d_2}$*,* $\partial^\alpha(T_1 \otimes T_2) = (\partial^{\alpha_1}T_1) \otimes (\partial^{\alpha_2}T_2)$.
Si $f_1 \in C^\infty(\Omega_1;\mathbb{C})$ *et* $f_2 \in C^\infty(\Omega_2;\mathbb{C})$ *alors*

$$(f_1T_1) \otimes (f_2T_2) = (f_1 \otimes f_2)(T_1 \otimes T_2)\,.$$

Si $f_1 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_1;\mathbb{C})$ *et* $f_2 \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega_2;\mathbb{C})$ *alors* $T_{f_1\otimes f_2} = T_{f_1} \otimes T_{f_2}$.

Démonstration. ..... □

Il se trouve que l'application $\mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C}) \times \mathcal{D}'(\Omega_2;\mathbb{C}) \ni (T_1;T_2) \mapsto T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$ n'est pas continue mais on a la

Proposition 7.5.5. *Soit $T_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$. L'application linéaire $\mathcal{D}'(\Omega_2;\mathbb{C}) \ni T_2 \mapsto T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$ est continue. De même, si $T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2;\mathbb{C})$, l'application linéaire $\mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C}) \ni T_1 \mapsto T_1 \otimes T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$ est continue. Soit $(T_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω_1 qui converge vers T_1 dans $\mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$. Soit $(T_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω_2 qui converge vers T_2 dans $\mathcal{D}'(\Omega_2;\mathbb{C})$. Alors la suite $(T_{1,n} \otimes T_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $T_1 \otimes T_2$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$.*

Démonstration. ..... □

Soit $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$. Pour $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2;\mathbb{C})$, $\mathcal{I}_K(\varphi_2) : \mathcal{D}(\Omega_1;\mathbb{C}) \ni \varphi_1 \mapsto K(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \in \mathbb{C}$ est bien définie et linéaire. Il se trouve qu'il s'agit d'une distribution sur Ω_1 (voir le théorème 7.5.6 qui suit). Donc l'application $\mathcal{I}_K : \mathcal{D}(\Omega_2;\mathbb{C}) \ni \varphi_1 \mapsto \mathcal{I}_K(\varphi_2) \in \mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$ est bien définie et linéaire. Est-elle continue ? Non. Mais le théorème 7.5.6 montre qu'elle est séquentiellement continue au sens suivant : Si $(\varphi_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers φ_2 dans $\mathcal{D}(\Omega_2;\mathbb{C})$ alors la suite de distributions $(\mathcal{I}_K(\varphi_{2,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\mathcal{I}_K(\varphi_2)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$.

Théorème 7.5.6. Théorème des noyaux de Schwartz.
Soit $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$. L'application $\mathcal{I}_K : \mathcal{D}(\Omega_2;\mathbb{C}) \ni \varphi_2 \mapsto \mathcal{I}_K(\varphi_2) \in \mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$ est bien définie, linéaire et séquentiellement continue.
Réciproquement, pour toute application $\mathcal{I} : \mathcal{D}(\Omega_2;\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega_1;\mathbb{C})$ linéaire et séquentiellement continue, il existe une unique distribution $K \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2;\mathbb{C})$ telle que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_K$.

Démonstration. Admise. □

Tout ceci est encore valable pour les distributions tempérées. Pour les produits par une fonction C^∞, on prend bien sûr des fonctions dans O_M et, pour les distributions tempérées associées à une fonction, on prend des fonctions dans O_M^m ou L^p.

8 Convolution de distributions.

On se place sur $\mathbb{R}^d$. On rappelle que, pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$,

$$(f * g)(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)\,dt \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(x-t)\,dt$$

est presque partout absolument convergente. La fonction $f * g$ est le produit de convolution des fonctions f et g. On a, de plus, $f * g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.
On remarque que, pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, on a, par le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x)\,\varphi(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(x)g(y)\varphi(x+y)\,dxdy\,. \tag{20}$$

En voulant interpréter cette quantité comme $(T_f \otimes T_g)$ appliqué à $(x;y) \mapsto \varphi(x+y)$, on tombe sur la difficulté suivante. Cette dernière fonction est certes de classe C^∞ mais n'est pas à support compact (sauf si $\varphi = 0$).

8.1 Distributions à supports convolutifs et convolution de distributions.

Définition 8.1.1. *Soit $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. On dit que S et T sont à supports convolutifs si, pour tout $R > 0$, il existe $M > 0$ tel que*

$$\big\{(x;y) \in \operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T\,;\; x+y \in B(0;R]\big\} \;\subset\; B(0;M] \times B(0;M] \;=\; B(0;M]^2\,.$$

Exemple 8.1.2. *Si $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ avec S à support compact, alors S et T sont à supports convolutifs. En dimension $d = 1$, si $S, T \in \{U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R};\mathbb{C}); \exists c \in \mathbb{R}; \operatorname{supp} U \subset [c;+\infty[\}$ alors S et T sont à supports convolutifs.*

Si S et T sont à supports convolutifs et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, on remarque que l'intersection

$$K \;:=\; \operatorname{supp}(S_x \otimes T_y) \;\cap\; \operatorname{supp}\big((x;y) \mapsto \varphi(x+y)\big)$$

est compacte ! En effet, si $(x;y)$ appartient au support de $(x;y) \mapsto \varphi(x+y)$, il existe $R > 0$ tel que $x + y \in B(0;R]$, puisque φ est à support compact. Si, de

plus, $(x;y) \in \operatorname{supp}(S_x \otimes T_y)$ alors, par la propriété de supports convolutifs, $(x;y)$ vit dans le compact $B(0;M]^2$.
Soit $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d};\mathbb{C})$ telle que $\chi = 1$ au voisinage de K. On peut définir l'application de $S * T$ à φ par

$$(S*T)(\varphi) \ = \ (S_x \otimes T_y)\big((x;y) \mapsto \chi(x;y)\varphi(x+y)\big)\,, \tag{21}$$

puisque $(x;y) \mapsto \chi(x;y)\varphi(x+y)$ est à support dans $\operatorname{supp}\chi$, qui est compact. De plus, ce choix semble judicieux car si $S = T_f$ et $T = T_g$ avec $f,g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ sont à supports convolutifs alors, pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, $(S*T)(\varphi) = (T_f * T_g)(\varphi) = T_{f*g}(\varphi)$, d'après (20).

Proposition 8.1.3. *Soit $S,T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ à supports convolutifs. Soit $K' \subset\subset \mathbb{R}^d$ et $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ telle $\chi = 1$ sur le compact*

$$K \ = \ \operatorname{supp}(S_x \otimes T_y) \ \cap \ \big\{(x;y) \in \mathbb{R}^{2d}; x+y \in K'\big\}\,.$$

La forme linéaire $(S*T)_{|K'}$ donnée sur $\mathcal{C}_{K'}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ par (21) est bien définie, linéaire et continue. Soit $S*T$ la forme linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ dont les restrictions à $\mathcal{C}_{K'}^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ sont données par les $(S*T)_{|K'}$ est bien définie (i.e. ne dépend pas du choix des fonctions χ), linéaire continue. On a donc $S*T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, c'est la convolution de S et T.

Démonstration. ..... □

Proposition 8.1.4. *Soit $S,T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ à supports convolutifs.*
Soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Pour tout $(\beta;\gamma) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$ tel que $\beta+\gamma = \alpha$, $\partial^\beta S$ et $\partial^\gamma T$ sont à supports convolutifs et $\partial^\alpha(S*T) \ = \ (\partial^\beta S)*(\partial^\gamma T)$.
L'ensemble $\operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$ *est fermé et* $\operatorname{supp}(S*T) \subset \operatorname{supp} S + \operatorname{supp} T$.
On a aussi $\operatorname{suppsing}(S*T) \subset \operatorname{suppsing} S + \operatorname{suppsing} T$.

Démonstration. ..... □

Proposition 8.1.5. *Soit $R,S,T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. On dit qu'elles sont à supports convolutifs si pour tout $R > 0$, il existe $M > 0$ tel que*

$$\big\{(x;y;z) \in \operatorname{supp} R \times \operatorname{supp} S \times \operatorname{supp} T\,;\, x+y+z \in B(0;R]\big\} \ \subset \ B(0;M]^3\,.$$

Dans ce cas, R et $S*T$ sont à supports convolutifs, $R*S$ et T sont à supports convolutifs et $R*(S*T) = (R*S)*T$.

Démonstration. ..... □

Voyons maintenant un cas particulier important.

Proposition 8.1.6. *Soit* $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *et* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$*. Alors* $\operatorname{supp} f = \operatorname{supp} T_f$*,* S *et* T_f *sont à supports convolutifs et il existe* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *telle que* $S * T_f = T_g$*. De plus, pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$*,* $g(x) = S(f(x-\cdot))$*, où* $f(x-\cdot) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ *associe à* y *le complexe* $f(x-y)$*.*

Démonstration. ..... □

8.2 Continuité de la convolution de distributions.

Les propriétés de continuité de la convolution de distributions sont plutôt pauvres. Par exemple, supposons qu'on ait deux suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de distributions sur $\mathbb{R}^d$ telles que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, S_n et T_n sont à supports convolutifs. On suppose de plus que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers T et que S et T sont à supports convolutifs. La convergence de $(S_n * T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $S * T$ peut être fausse ! Voici un contre-exemple dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \delta_n$ et $T_n = \delta_{-n}$. On a $S_n \to 0$ et $T_n \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n * T_n = \delta_0 \neq 0$.

Définition 8.2.1. *Soit* A, B *deux parties de* $\mathbb{R}^d$*. On dit qu'elles sont convolutives si, pour tout* $R > 0$*, il existe* $M > 0$ *tel que*

$$\big\{(x;y) \in A \times B \,;\, x+y \in B(0;R]\big\} \;\subset\; B(0;M] \times B(0;M] \;=\; B(0;M]^2 \,.$$

On remarque que deux distributions S *et* T *sont à supports convolutifs si leurs supports sont convolutifs.*

Théorème 8.2.2. *Soit* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *qui convergent dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *vers* S *et* T*, respectivement. On suppose, de plus, qu'il existe deux parties* A *et* B *convolutives et* $N \in \mathbb{N}$ *tels que, pour* $n \geq N$*,* $\operatorname{supp} S_n \subset A$ *et* $\operatorname{supp} T_n \subset B$*. Alors* S *et* T *sont à supports convolutifs et* $(S_n * T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* $S * T$ *dans* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$*.*

Démonstration. .... □

8.3 Convolution et transformation de Fourier.

Pour $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, on sait que $f * g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Par le théorème de Fubini, on a, presque partout pour $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi}(f*g)(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{-i(x+y)\cdot\xi} f(x)g(y)\,dxdy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx\right)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot\xi} g(y)\,dy\right)\end{aligned}$$

donc $\widehat{f*g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)$. On va généraliser ce résultat au cas deux cas suivants : $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $T = T_f^t$, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$; $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Pour ce faire, on va utiliser dans chaque cas une définition appropriée de la convolution.

Proposition 8.3.1. *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'application $f(x-\cdot) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, qui associe à y le complexe $f(x-y)$, appartient $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. La fonction $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $g(x) = S(f(x-\cdot))$ est bien définie et appartient à $O_M(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. On note $f * S = g$. De plus, $\mathcal{F}'(T_g^t) = \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}'(S)$.*

Démonstration. .... □

Maintenant considérons $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$. On identifie E avec sa restriction à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, qui est une distribution à support compact. On note par S_r la restriction de S à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, qui est une distribution. E et S_r sont à supports convolutifs.
On note encore par I_v l'application de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ dans lui-même qui à φ associe $x \mapsto \varphi(-x)$. Cette application est continue et on note encore par I_v' l'application de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ dans lui-même qui à T associe $T\circ I_v$, qui est aussi continue.

Lemme 8.3.2. *Pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, $I_v'(E) * T_f = T_{f'}$ où, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $f'(x) = (I_v'(E))(f(x-\cdot))$, et $f' \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, par la proposition 8.1.6. On a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, $(E * S_r)(\varphi) = S_r(\varphi')$.*

Démonstration. .... □

Ensuite, on montre la variante suivante de la proposition 8.1.6.

Lemme 8.3.3. *Pour* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *et* $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$*, il existe* $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *telle que* $T_f * E = T_g$ *et l'application* $f \mapsto g$ *est continue sur* $S(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$*.*

Grâce à ces préliminaires, on peut montrer la

Proposition 8.3.4. *Soit* $E \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *et* $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$*. Alors* $E*S_r$ *s'étend à une distribution tempérée notée* $E * S$*. De plus, il existe* $g \in O_M(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ *telle que* $\mathcal{F}'(E * S) = g\mathcal{F}'(S)$ *et* $T_g^t = \mathcal{F}'(E)$*.*

Démonstration. .... □

9 Applications.

On va voir quelques applications des propriétés des distributions qui ont été vues dans les paragraphes précédents.

9.1 Propriétés de densité.

Proposition 9.1.1. *Soit* E *un espace vectoriel localement convexe. Soit* F *une partie de* E' *telle que, pour tout* $T \in E'$*, il existe une suite d'éléments de* F *qui converge vers* T *dans* E' *(pour la topologie* $*$ *faible). Alors* F *est dense dans* E *(pour la topologie* $*$ *faible).*

Démonstration. .... □

Au moyen de l'application k_3 du théorème 6.7.10, on peut injecter $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ dans son dual $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$.

Proposition 9.1.2. *Pour tout* $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$*, il existe une suite* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ *telle que* $(T_{g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* T *dans* $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$*.*
En particulier, l'espace $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ *(*$= k_3(\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C}))$*) est dense dans son dual* $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$*.*

Démonstration. .... □

De même, on peut utiliser l'application j du théorème 6.7.8 pour injecter $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ dans l'espace $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Proposition 9.1.3. *Pour tout $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ telle que $(T^t_{g_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.*
En particulier, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ $(= j(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})))$ est dense dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Démonstration. .... □

9.2 Opérateurs différentiels et solutions fondamentales.

Définition 9.2.1. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Soit $(a_\alpha)_{|\alpha|\le m}$ une famille de fonction C^∞ sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$. L'opérateur*

$$P(x,\partial_x) \;=\; \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha$$

est un opérateur différentiel sur Ω.

Par la formule de Leibnitz, on voit qu'un opérateur $\sum_{|\alpha|\le m} \partial^\alpha \circ b_\alpha$ peut se mettre sous la forme $\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha$.

Proposition 9.2.2. *Un opérateur différentiel $P(x,\partial_x)$ sur Ω est continu sur $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$. Il est aussi continue sur $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$.*
Si $\Omega = \mathbb{R}^d$ et si ses coefficients a_α appartiennent à $O_M(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$, alors un opérateur différentiel $P(x,\partial_x)$ est continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ et sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.
Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$ alors $\operatorname{suppsing} P(x,\partial_x)T \subset \operatorname{suppsing} T$.

Démonstration. .... □

On remarque que, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega;\mathbb{C})$, on a

$$\big(P(x,\partial_x)T\big)(\varphi) \;=\; T\Bigg(\sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha \circ a_\alpha)(\varphi)\Bigg) \;=\; T\Bigg(\sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha \partial^\alpha \varphi\Bigg),$$

pour des coefficients b_α de classe C^∞. On note par $P^T(x,\partial_x)$ l'opérateur $\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha \circ a_\alpha$.

Définition 9.2.3. *Un opérateur différentiel $P(x, \partial_x)$ est dit hypoelliptique si, pour tout $T \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{C})$,* $\operatorname{suppsing} T = \operatorname{suppsing} P(x, \partial_x)T$.

D'après la proposition 9.2.2, l'hypoellipticité de d'un opérateur différentiel $P(x, \partial_x)$ se caractérise par le fait que, pour toute distribution T, on ait $\operatorname{suppsing} T \subset \operatorname{suppsing} P(x, \partial_x)T$.

Dans ce cours, on se limite à quelques résultats sur les opérateurs différentiels à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$ (i.e. lorsque toutes les fonctions a_α sont constantes).

Définition 9.2.4. *Soit $P(\partial_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$. Une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ est une solution fondamentale de $P(\partial_x)$ si $P(\partial_x)E = \delta_0$. Une distribution $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ est une paramétrice de $P(\partial_x)$ si* $\operatorname{suppsing}(P(\partial_x)E - \delta_0) = \emptyset$.

L'intérêt des solutions fondamentales est donné par le

Théorème 9.2.5. *Soit $P(\partial_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$.*
L'opérateur $P(\partial_x)$ admet une solution fondamentale.
Si E est une solution fondamentale de $P(\partial_x)$ et si $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ alors $E * S$ est une solution de l'équation d'inconnue $U \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ donnée par $P(\partial_x)U = S$.
L'opérateur $P(\partial_x)$ est hypoelliptique si et seulement si toutes ses solutions fondamentales sont C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ si et seulement si une solution fondamentale de $P(\partial_x)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ si et seulement si $P(\partial_x)$ admet une paramétrice qui est C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Dire qu'une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ signifie qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, localement intégrable et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que $T_g = E$. Autrement dit, E est C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ si et seulement si $\operatorname{suppsing} E \subset \{0\}$.

Démonstration. .... □

Remarque 9.2.6. *On peut montrer que, pour $d \geq 3$, la distribution $E = T_f$ où f est la fonction localement intégrable donnée par $f(x) = |x|^{2-d}$ est une* *solution fondamentale du Laplacien*

$$-\Delta \ := \ \sum_{i=1}^{d}(-\partial_{x_i}^2)\,.$$

Comme f est C^∞ sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, le Laplacien est hypoelliptique, par le théorème 9.2.5.

Définition 9.2.7. *Soit $P(\partial_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$. On dit qu'il est elliptique si, pour tout $\xi \neq 0$, $P(\xi)\neq 0$.*

Théorème 9.2.8. *Soit $P(\partial_x)$ un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R}^d$. Si $P(\partial_x)$ est elliptique alors $P(\partial_x)$ est hypoelliptique.*

Démonstration. .... □

9.3 Espaces de Sobolev.

Pour une fonction $u \in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C})$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on notera par $\partial^\alpha u$ la distribution $\partial^\alpha(T_u)$. Lorsque $\partial^\alpha u = T_v$ pour une certaine fonction $v \in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C})$, on identifiera $\partial^\alpha u$ et v. Parfois, $\partial^\alpha u$ désignera la distribution tempérée $\partial^\alpha(T_u^t)$.

Définition 9.3.1. *Soit $m\in\mathbb{N}$. L'espace de Sobolev sur Ω d'indice m est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C})$ donné par*

$$\mathrm{H}^m(\Omega;\mathbb{C}) \ = \ \left\{u\in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C})\,;\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^d \,avec\,|\alpha|\le m\,,\ \partial^\alpha u\in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C})\right\}.$$

Dire que $\partial^\alpha u\in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C})$ signifie qu'il existe $v\in \mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $\partial^\alpha u = T_v$.

Exemple 9.3.2. *Pour tout $\epsilon>0$, la fonction u_ϵ donnée par $u_\epsilon(x) = |x|^{1/2+\epsilon}$ appartient à $\mathrm{H}^1(]-1;1[;\mathbb{C})$. On remarque aussi que, si u est C^1 sur $]-1;1[$ avec u et u' bornées alors $u\in \mathrm{H}^1(]-1;1[;\mathbb{C})$.*

Proposition 9.3.3. *Pour $m\in\mathbb{N}$, $\mathrm{H}^m(\Omega;\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle u\,,v\rangle \ = \ \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \overline{\partial^\alpha u}\cdot\partial^\alpha v\,dx\,.$$

Démonstration. .... □

Proposition 9.3.4. *Soit $m \in \mathbb{N}$.*
Pour tout $u \in \mathrm{H}^m(\Omega;\mathbb{C})$, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ telle que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $\mathrm{H}^m(\Omega;\mathbb{C})$.
En particulier, l'espace $\mathcal{D}(\Omega;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{H}^m(\Omega;\mathbb{C})$.

Démonstration. .... □

On se place maintenant sur $\mathbb{R}^d$ et on définit une famille plus large d'espaces de Sobolev.

Définition 9.3.5. *Soit $s \in \mathbb{R}$. L'espace de Sobolev sur $\mathbb{R}^d$ d'indice s est donné par*

$$\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \;=\; \Big\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})\,;\ \mathcal{F}'(u) \in \mathrm{L}^2\big(\mathbb{R}^d;\mathbb{C};\langle\xi\rangle^{2s}\,d\xi\big)\Big\}\,.$$

On a posé $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$.
Dans le cas $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $s \in \mathbb{N}$, la définition est cohérente avec la définition 9.3.1, comme le montre la proposition 9.3.6 ci-dessous.

Proposition 9.3.6. *Pour $s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$\langle u\,,v\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}'(u)}(\xi)\cdot\mathcal{F}'(v)(\xi)\cdot\langle\xi\rangle^{2s}\,d\xi\,.$$

Si $s = m$ alors $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ coïncide avec l'espace $\mathrm{H}^m(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ donné par la définition 9.3.1. De plus, les deux produits scalaires définissent des normes équivalentes sur $\mathrm{H}^m(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.
Pour $s \in \mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ est dense dans $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$.

Démonstration. .... □

Proposition 9.3.7. *Pour $s \in \mathbb{R}$, on peut identifier le dual de l'espace de Hilbert $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ à $\mathrm{H}^{-s}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ par l'application linéaire bijective et bicontinue $A : \mathrm{H}^{-s}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \longrightarrow (\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}))'$ donnée par*

$$Au\,:\,\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}) \ni v \,\mapsto\, \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}'(u)}(\xi)\cdot\mathcal{F}'(v)(\xi)\,d\xi\,.$$

Démonstration. .... □

10 Appendice 1 : Espaces de fonctions continues.

10.1 Convergence uniforme.

Définition 10.1.1. *Pour des espaces topologiques X et Y, on note par $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions de X dans Y qui sont continues. Lorsque Y est un espace métrique, on note par $\mathcal{B}(X,Y)$ l'ensemble des fonctions de X dans Y qui sont bornées, et on pose $\mathcal{C}_b(X,Y) = \mathcal{C}(X,Y) \cap \mathcal{B}(X,Y)$.*

Remarque 10.1.2. *Lorsque X est compact et Y un espace métrique, $\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{C}_b(X,Y)$.*

Proposition 10.1.3. *Soit X un espace topologique et (Y,d) un espace métrique. L'application*

$$d_\infty : \mathcal{B}(X,Y) \times \mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{R}^+$$

définie par, pour $f, g \in \mathcal{B}(X,Y)$,

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x \in X} d\big(f(x), g(x)\big) ,$$

est une distance sur $\mathcal{B}(X,Y)$.

Démonstration. Exercice. □

Définition 10.1.4. *Soit $(f_n)_n \in (Y^X)^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans (Y,d) (espace métrique) et $f : X \to Y$. $(f_n)_n$ converge vers f uniformément si*

$$\lim_n \sup_{x \in X} d\big(f_n(x), f(x)\big) = 0 .$$

Proposition 10.1.5. *On suppose que $(f_n)_n$ converge vers f uniformément. $f_n \in \mathcal{B}(X,Y)$, pour n assez grand, équivaut à $f \in \mathcal{B}(X,Y)$. $f_n \in \mathcal{C}(X,Y)$, pour n assez grand, implique $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.*

Démonstration. Exercice. □

Théorème 10.1.6. *Soit X un espace topologique et (Y,d) un espace métrique complet. Les ensembles $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$ et $(\mathcal{C}_b(X,Y), d_\infty)$ sont des espaces métriques complets.*

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$. Soit $x \in X$. $(f_n(x))_n$ est donc une suite de Cauchy dans (Y,d) qui est complet. Elle converge vers un certain $f(x)$. Ceci définit $f : X \to Y$. Comme $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$, on voit que $(f_n)_n$ converge uniformément vers f. Par la proposition 10.1.5, $f \in \mathcal{B}(X,Y)$ donc $(f_n)_n$ converge vers f pour d_∞. $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$ est donc complet.
Soit $(f_n)_n \in (\mathcal{C}_b(X,Y))^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $f \in \mathcal{B}(X,Y)$ pour d_∞. Elle converge donc uniformément vers f. Par la proposition 10.1.5, $f \in \mathcal{C}_b(X,Y)$. Donc $\mathcal{C}_b(X,Y)$ est fermé dans le complet $(\mathcal{B}(X,Y), d_\infty)$. Il est donc complet aussi. □

Remarque 10.1.7. *Lorsque X est compact et Y un espace métrique complet, $\mathcal{C}(X,Y)$ est complet pour la distance d_∞.*

10.2 L'espace de Banach $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$, avec X compact et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

D'après la remarque 10.1.7, $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est complet pour d_∞. Mais $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

qui est associée à la distance d_∞, c'est un evn. Comme $(\mathcal{C}(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ a la même topologie que $(\mathcal{C}(X,\mathbb{K}), d_\infty)$, il est complet.

Définition 10.2.1. *Un evn est de Banach s'il est complet.*

Proposition 10.2.2. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K}$. Une série d'éléments de E qui converge absolument converge dans E et la norme de la somme est inférieure ou égale à la somme des normes.*

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 10.2.3. *Soit X un espace topologique compact. Soit $(u_n)_n$ une suite de fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|_\infty < +\infty ,$$

alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément vers une fonction de $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$.

Démonstration. Comme $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est un Banach, il suffit d'appliquer la proposition 10.2.2. $\square$

10.3 Théorème d'Ascoli.

Définition 10.3.1. *Une partie A d'un espace topologique E est relativement compacte si son adhérence $\overline{A}$ est compacte.*

Proposition 10.3.2. *Soit X et Y deux espaces topologiques, Y étant séparé, et $f : X \to Y$ une application continue. Si A est une partie relativement compacte de X alors $f(A)$ est une partie relativement compacte de Y.*

Démonstration. Comme $A \subset \overline{A}$, $f(A) \subset f(\overline{A})$ et $\overline{f(A)} \subset \overline{f(\overline{A})}$. Comme $\overline{A}$ est compacte et f continue, $f(\overline{A})$ est compacte. Comme Y est séparé, $f(\overline{A})$ est aussi fermée. D'où $\overline{f(A)} \subset f(\overline{A})$. $\overline{f(A)}$ est donc un fermé dans un compact donc il est compact. $\square$

Proposition 10.3.3. *Soit (X, d) un espace métrique complet et $A \in \mathcal{P}(X)$. A est relativement compact si et seulement si $\overline{A}$ est précompact.*

Démonstration. Par le théorème 2.4.3, A est relativement compact si et seulement si $\overline{A}$ est précompact et complet. Comme X est complet, $\overline{A}$ est un fermé dans un complet donc complet. $\square$

Définition 10.3.4. *Soit X un espace topologique séparé et (Y, d) un espace métrique. Soit $a \in X$. Une famille $\mathcal{A}$ d'applications définie sur X et à valeurs dans Y est équicontinue en a*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}(a); \forall f \in \mathcal{A}, \forall x \in X,\ x \in V \ \Rightarrow\ d\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon\,.$$

$\mathcal{A}$ est équicontinue sur X si elle est équicontinue en tout a de X.

Proposition 10.3.5. *Soit X un espace topologique séparé et (Y, d) un espace métrique.*

1). *Toute fonction appartenant à une famille $\mathcal{A} \subset Y^X$ équicontinue sur X est continue sur X.*
2). *Toute partie finie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X, Y)$ est équicontinue sur X.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Théorème 10.3.6. *(***Théorème d'Ascoli***) Soit X un espace topologique compact, (Y,d) un espace métrique complet et $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,Y)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1). $\mathcal{A}$ est relativement compacte dans $\mathcal{C}(X,Y)$.

2). $\mathcal{A}$ est équicontinue sur X et, pour tout $a \in X$, $\{f(a); f \in \mathcal{A}\}$ est relativement compact dans Y.

Démonstration.
$(1 \Rightarrow 2)$: L'application $\delta_a : \mathcal{C}(X,Y) \to Y$, définie par $\delta_a(f) = f(a)$, est 1-lipschitzienne donc continue. Par la proposition 10.3.2, $\{f(a); f \in \mathcal{A}\} = \delta_a(\mathcal{A})$ est relativement compact. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, $\overline{\mathcal{A}}$ est précompact donc $\mathcal{A}$ aussi. Il existe donc J fini tel que :

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{j \in J} B_\infty(f_j; \varepsilon/3[\,.$$

Il s'agit de boules de $(\mathcal{C}(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$. Soit $a \in X$. Par la proposition 10.3.5, $\{f_j, j \in J\}$ est equicontinue en a donc, il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que, pour tout $j \in J$,

$$x \in V \;\Rightarrow\; d\big(f_j(x), f_j(a)\big) \;<\; \varepsilon/3\,.$$

Pour $x \in V$ et $f \in \mathcal{A}$, il existe $j \in J$ tel que $\|f - f_j\|_\infty < \varepsilon/3$ donc

$$d\big(f(x), f(a)\big) \le d\big(f(x), f_j(x)\big) + d\big(f_j(x), f_j(a)\big) + d\big(f_j(a), f(a)\big) \;<\; 3\varepsilon/3 = \varepsilon\,.$$

$(2 \Rightarrow 1)$: Par la proposition 10.3.3, il suffit de montrer que $\overline{\mathcal{A}}$ est précompact. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U(x) \in \mathcal{V}(x)$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{A}$,

$$y \in U(x) \Rightarrow d\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon/8\,.$$

Comme X est compact, il existe $x_1, \cdots, x_n$ tel que

$$X \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i)\,.$$

Pour $1 \le i \le n$, $\{f(x_i); f \in \mathcal{A}\}$ est précompact. Donc leur réunion aussi. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ et des points $y_1, \cdots, y_m \in Y$ tels que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{f(x_i); f \in \mathcal{A}\} \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon/8[\,.$$

Pour $\varphi : [1;n] \to [1;m]$, soit

$$\mathcal{A}_\varphi = \big\{f \in \mathcal{A}; \forall i, f(x_i) \in B(y_{\varphi(i)}, \varepsilon/8[\big\}\,.$$

Pour $f \in \mathcal{A}$, il existe φ telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $f(x_i) \in B(y_{\varphi(i)}, \varepsilon/8[$, donc $f \in \mathcal{A}_\varphi$. D'où

$$\mathcal{A} = \bigcup_\varphi \mathcal{A}_\varphi \,,$$

φ décrivant un ensemble fini. Pour $f, f' \in \mathcal{A}_\varphi$ et $x \in X$, il existe i tel que $x \in U(x_i)$ donc

$$\begin{aligned} d\big(f(x), f'(x)\big) \ &\leq \ d\big(f(x), f(x_i)\big) + d\big(f(x_i), y_{\varphi(i)}\big) + d\big(y_{\varphi(i)}, f'(x_i)\big) \\ &\quad + d\big(f'(x_i), f'(x)\big) < \varepsilon/2 \,. \end{aligned}$$

D'où $\|f - f'\|_\infty \leq \varepsilon/2$. En choisissant une fonction f_φ dans $\mathcal{A}_\varphi$, on a $\mathcal{A}_\varphi \subset B_\infty(f_\varphi, \varepsilon/2]$. On montre que

$$\overline{\mathcal{A}} \subset \bigcup_\varphi B_\infty(f_\varphi, \varepsilon[\,.$$

Soit $g \in \overline{\mathcal{A}}$. Il existe φ, $f \in \mathcal{A}_\varphi$ avec $\|g - f\|_\infty < \varepsilon/2$. Donc $\|g - f_\varphi\|_\infty < \varepsilon$. □

10.4 Théorème de Stone-Weierstrass.

Lemme 10.4.1. *Soit $\psi : [0;1] \to \mathbb{R}^+$ définie par $\psi(t) = 1 - \sqrt{1-t}$. ψ est continue, C^∞ sur $[0;1[$, ses dérivées sont positives et ψ est limite uniforme sur $[0;1]$ de sa série de Taylor en 0 :*

$$\lim_n \sup_{t\in[0;1]} |\psi(t) - P_n(t)| \ = \ 0 \quad \textit{avec} \quad P_n(t) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} t^k \,.$$

Démonstration. Exercice. □

Soit X un espace topologique compact et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 10.4.2. *Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ si $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ stable par le produit.*

Proposition 10.4.3. *L'adhérence d'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X,\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$.*

Démonstration. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f, g \in \overline{\mathcal{A}}$. Il existe des suites $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telles que $f_n \to f$ et $g_n \to g$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est l'adhérence de $\mathcal{A}$ et comme

$$\lambda f_n + \mu g_n \to \lambda f + \mu g \quad \text{et} \quad f_n g_n \to fg\,,$$

pour $\|\cdot\|_\infty$, $\overline{\mathcal{A}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$. □

Lemme 10.4.4. *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ vérifiant*

1). La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$.

2). Pour tous $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

Soit $x \neq x' \in X$ et $y, y' \in \mathbb{K}$. Il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$.

Démonstration. Il existe $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(x')$. La fonction

$$f = y + (y' - y)\frac{g - g(x)}{g(x') - g(x)}$$

convient. □

Théorème 10.4.5. *(***Théorème de Stone-Weierstrass, cas réel***). Soit X un espace topologique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que*

1). La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$.

2). Pour tout $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Pour $f \in \overline{\mathcal{A}}$ avec $f \geq 0$ et $f \neq 0$,

$$\sqrt{f} = \sqrt{\|f\|_\infty}\big(1 - \psi(1 - f/\|f\|_\infty)\big)\,,$$

donc $\sqrt{f} \in \overline{\mathcal{A}}$. Pour $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $|f| = \sqrt{f^2} \in \overline{\mathcal{A}}$, $\max(f; 0) = (f + |f|)/2 \in \overline{\mathcal{A}}$, $\min(f; 0) = (f - |f|)/2 \in \overline{\mathcal{A}}$. Si $g \in \overline{\mathcal{A}}$, alors $\max(f; g) = (f + g + |f - g|)/2 \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\min(f; g) = (f + g - |f - g|)/2 \in \overline{\mathcal{A}}$. Par récurrence, on en déduit que, pour tout n, pour tout $g_1, \cdots, g_n \in \overline{\mathcal{A}}$, $\max(g_1; \cdots; g_n) \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\min(g_1; \cdots; g_n) \in \overline{\mathcal{A}}$.
Soit $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer qu'il existe $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$ (car $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$). Par le lemme 10.4.4,

$$\forall x, x' \in X\ , x \neq x' \Rightarrow \big(\exists h \in \mathcal{A};\, h(x) = g(x) \text{ et } h(x') = g(x')\big)\ (*)\,.$$

Soit $x \in X$ fixé. $I_x := \{k \in \overline{\mathcal{A}}; k(x) = g(x)\}$ est non vide. Pour $k \in I_x$,

$$U_k := \{x' \in X; k(x') > g(x') - \varepsilon\} = (k-g)^{-1}(]-\varepsilon; +\infty[)$$

est un voisinage ouvert de x. D'après $(*)$, pour tout $x' \in X \setminus \{x\}$, il existe $h \in I_x$ telle que $y \in U_h$. Donc $X \subset \cup_{h \in I_x} U_h$. Comme X est compact, il existe $h_x^1, \cdots, h_x^n \in I_x$ telles que $X \subset \cup_{1 \le i \le n} U_{h_x^i}$. Donc $h_x = \max(h_x^1, \cdots, h_x^n) \in I_x$ et, pour tout $x' \in X$, $x' \in U_{h_x^i}$ pour un certain i donc $h_x(x') \ge h_x^i(x') > g(x') - \varepsilon$. En particulier h_x appartient à

$$I \;=\; \left\{h \in \overline{\mathcal{A}}; \, \forall x' \in X, h(x') > g(x') - \varepsilon\right\}.$$

Pour $h \in I$, on considère l'ouvert

$$V_h := \{x' \in X; h(x') < g(x') + \varepsilon\} = (h-g)^{-1}(]-\infty; \varepsilon[)\,.$$

Pour tout $x \in X$, $x \in V_{h_x}$. Donc $X \subset \cup_{h \in I} V_h$. Comme X est compact, il existe $h_1, \cdots, h_m \in I$ telles que $X \subset \cup_{1 \le i \le n} V_{h_i}$. Alors $f = \min(h_1, \cdots, h_m) \in I$ et, pour tout $x' \in X$, il existe un i tel que $x' \in V_{h_i}$ donc $f(x') \le h_i(x') < g(x') + \varepsilon$. Conclusion

$$\forall x' \in X, \; g(x') - \varepsilon \;<\; f(x') \;<\; g(x') + \varepsilon\,,$$

c'est-à-dire $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. □

Remarque 10.4.6. *On peut remplacer l'hypothèse 1) du théorème par l'hypothèse plus faible :* $\forall x \in X$, $\exists f \in \mathcal{A}$ *;* $f(x) \neq 0$. *Voir paragraphe 10.5.*

Théorème 10.4.7. *(***Théorème de Stone-Weierstrass, cas complexe***). Soit X un espace topologique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algébre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ telle que*

1). La fonction constante égale à 1 appartient à $\mathcal{A}$.

2). Pour tout $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

3). Pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}_\mathbb{R} = \{f \in \mathcal{A}; f = \overline{f}\}$. C'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ qui contient la fonction 1. Si $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(x')$. Donc, $\Re(f)(x) \neq \Re(f)(x')$ ou $\Im(f)(x) \neq \Im(f)(x')$ avec $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$. Par le théorème Stone-Weierstrass réel (cf. théorème 10.4.5), $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Donc $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{R} + i\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. □

Corollaire 10.4.8. *(***Théorème de Weierstrass***). Pour tout $[a;b] \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $C([a;b],\mathbb{R})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions polynômiales sur $[a;b]$. C'est une sous-algèbre de $C([a;b],\mathbb{R})$ et elle contient la fonction 1. Si $x \neq x'$ dans $[a;b]$, la fonction $f(t) = (t-x)/(x'-x)$ est polynômiale et vérifie $f(x) = 0 \neq 1 = f(x')$. Le théorème de Stone-Weierstrass réel (cf. théorème 10.4.5) donne le résultat. □

Corollaire 10.4.9. *Soit $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. L'ensemble des polynômes en z et $\overline{z}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ la $\mathbb{C}$-algèbre des fonctions polynômiales en z et $\overline{z}$ sur $\mathbb{S}^1$, qui est compact. Elle contient la fonction 1, elle est stable par passage au conjugué. Si $y \neq y'$ dans $\mathbb{S}^1$, $P(z) = (z-y)/(y'-y)$ appartient à $\mathcal{A}$ et vérifie $P(y) = 0 \neq 1 = P(y')$. Par le théorème de Stone-Weierstrass complexe (cf. théorème 10.4.7), $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$. □

Corollaire 10.4.10. *L'ensemble des polynômes trigonométriques $\sum_{n=m}^{N} a_n e^{inx}$ avec $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, est dense dans l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues, 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Pour $z = e^{ix}$, on a $\overline{z} = e^{-ix}$. Donc l'application $\Phi : \mathcal{C}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}) \to \mathcal{C}$ définie par $\Phi(f)(x) = f(e^{ix})$ est un homéomorphisme qui envoie les polynômes en z et $\overline{z}$ sur les polynômes trigonométriques. Comme les premiers sont denses dans $\mathcal{C}(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$ par le corollaire précédant, les derniers sont denses dans $\mathcal{C}$. □

10.5 Complément : Version plus générale du théorème de Stone-Weierstrass.

Théorème 10.5.1. *(***Théorème de Dini***). Soit X un espace métrique compact. Si $(f_n)_n$ est une suite monotone de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue g alors la convergence est uniforme.*

Démonstration. Exercice. □

Lemme 10.5.2. *Il existe une suite $(u_n)_n$ de fonctions polynômes réelles, convergeant uniformément sur $[0;1]$ vers $t \mapsto \sqrt{t}$ et vérifiant, pour tout n, $u_n(0) = 0$.*

Démonstration. On définit $(u_n)_n$ par récurrence en posant $u_0 = 0$ et, pour tout n, pour tout $t \in [0;1]$,

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \big(t - u_n(t)^2\big)/2 \quad (*).$$

Par récurrence, on montre que, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$, $u_n(0) = 0$ et, pour tout $t \in [0;1]$, $u_n(t) \leq \sqrt{t}$. Pour t fixé, la suite $(u_n(t))_n$ est croissante majorée donc converge vers un certain $v(t) \in [0; \sqrt{t}]$. Par passage à la limite dans $(*)$, $v(t) = v(t) + \big(t - v(t)^2\big)/2$ soit $v(t) = \sqrt{t}$. La fonction v est donc continue et, par le théorème de Dini (cf. théorème 10.5.1), $(u_n)_n$ converge uniformément vers v. □

Lemme 10.5.3. *Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ vérifiant*

1). $\forall x \in X$, $\exists f \in \mathcal{A}$; $f(x) \neq 0$.

2). Pour tous $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

Soit $x \neq x' \in X$. Il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$, $f(x') \neq 0$ et $f(x) \neq f(x')$. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, il existe $\tilde{f} \in \mathcal{A}$ telle que $\tilde{f}(x) = a$ et $\tilde{f}(x') = b$.

Démonstration. Soit $x \neq x'$ dans X. Il existe $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) < g(x')$. Si $0 < g(x) < g(x')$ ou $g(x) < g(x') < 0$, g convient. On considère le cas $0 = g(x) < g(x')$ (si $g(x) < g(x') = 0$, on s'y ramène en changeant g en $-g$ et en échangeant x et x'). Il existe $h \in \mathcal{A}$ telle que $h(x) > 0$. Soit $a > 0$ tel que $2a\|h\|_\infty < g(x')$ et posons $f = g + ah \in \mathcal{A}$. $0 < g(x) + ah(x) = f(x) < a\|h\|_\infty$ et $a\|h\|_\infty < g(x') - a\|h\|_\infty \leq g(x') + ah(x') = f(x')$.
On cherche $\tilde{f}$ sous la forme $\alpha f + \beta f^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions $\tilde{f}(x) = a$ et $\tilde{f}(x') = b$ forment un système linéaire dont le déterminant

$$f(x)f(x')(f(x') - f(x)) \neq 0\,.$$

Un choix de α, β convient donc. □

Théorème 10.5.4. *(***Théorème de Stone-Weierstrass, cas réel***). Soit X un espace topologique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ telle que*

1). $\forall x \in X$, $\exists f \in \mathcal{A}$; $f(x) \neq 0$.

2). Pour tout $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Pour $f \in \overline{\mathcal{A}}$ avec $f \geq 0$ et pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, $\sqrt{f} = \lim u_n(f)$, par le lemme 10.5.2. Pour tout n, $u_n(f) \in \mathcal{A}$ car $u_n(0) = 0$. D'où $\sqrt{f} \in \overline{\mathcal{A}}$. Pour $f \in \overline{\mathcal{A}}$, $|f| = \sqrt{f^2} \in \overline{\mathcal{A}}$, $\max(f; 0) = (f + |f|)/2 \in \overline{\mathcal{A}}$, $\min(f; 0) = (f - |f|)/2 \in \overline{\mathcal{A}}$. Si $g \in \overline{\mathcal{A}}$, alors $\max(f; g) = (f + g + |f - g|)/2 \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\min(f; g) = (f + g - |f - g|)/2 \in \overline{\mathcal{A}}$. Par récurrence, on en déduit que, pour tout n, pour tout $g_1, \cdots, g_n \in \overline{\mathcal{A}}$, $\max(g_1; \cdots; g_n) \in \overline{\mathcal{A}}$ et $\min(g_1; \cdots; g_n) \in \overline{\mathcal{A}}$.
Soit $g \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer qu'il existe $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$ (car $\overline{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mathcal{A}}$). Par le lemme 10.5.3,

$$\forall x, x' \in X \;, x \neq x' \Rightarrow \big(\exists h \in \mathcal{A};\, h(x) = g(x) \text{ et } h(x') = g(x')\big)\ (*)\,.$$

Soit $x \in X$ fixé. $I_x := \{k \in \overline{\mathcal{A}}; k(x) = g(x)\}$ est non vide. Pour $k \in I_x$,

$$U_k := \{x' \in X; k(x') > g(x') - \varepsilon\} = (k - g)^{-1}(]-\varepsilon; +\infty[)$$

est un voisinage ouvert de x. D'après $(*)$, pour tout $x' \in X \setminus \{x\}$, il existe $h \in I_x$ telle que $x' \in U_h$. Donc $X \subset \cup_{h \in I_x} U_h$. Comme X est compact, il existe $h_x^1, \cdots, h_x^n \in I_x$ telles que $X \subset \cup_{1 \leq i \leq n} U_{h_x^i}$. Donc $h_x = \max(h_x^1, \cdots, h_x^n) \in I_x$ et, pour tout $x' \in X$, $x' \in U_{h_x^i}$ pour un certain i donc $h_x(x') \geq h_x^i(x') > g(x') - \varepsilon$. En particulier h_x appartient à $I = \{h \in \overline{\mathcal{A}}; \forall x' \in X, h(x') > g(x') - \varepsilon\}$. Pour $h \in I$, on considère l'ouvert

$$V_h := \{x' \in X; h(x') < g(x') + \varepsilon\} = (h - g)^{-1}(]-\infty; \varepsilon[)\,.$$

Pour tout $x \in X$, $x \in V_{h_x}$. Donc $X \subset \cup_{h \in I} V_h$. Comme X est compact, il existe $h_1, \cdots, h_m \in I$ telles que $X \subset \cup_{1 \leq i \leq n} V_{h_i}$. Alors $f = \min(h_1, \cdots, h_m) \in I$ et, pour tout $x' \in X$, il existe un i tel que $x' \in V_{h_i}$ donc $f(x') \leq h_i(x') < g(x') + \varepsilon$.
Conclusion

$$\forall x' \in X,\; g(x') - \varepsilon \,<\, f(x') \,<\, g(x') + \varepsilon\,,$$

c'est-à-dire $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. □

Théorème 10.5.5. *(***Théorème de Stone-Weierstrass, cas complexe***). Soit X un espace topologique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ telle que*

1). $\forall x \in X$, $\exists f \in \mathcal{A}\,;\, f(x) \neq 0$.

2). Pour tout $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(x')$.

3). Pour tout $f \in \mathcal{A}$, $\overline{f} \in \mathcal{A}$.

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{A}; f = \overline{f}\}$. C'est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Pour $x \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$. Donc $\Re(f)(x) \neq 0$ ou $\Im(f)(x) \neq 0$ avec $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Si $x \neq x'$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(x')$. Donc, $\Re(f)(x) \neq \Re(f)(x')$ ou $\Im(f)(x) \neq \Im(f)(x')$ avec $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. Par le théorème Stone-Weierstrass réel (cf. théorème 10.5.4), $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Donc $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est dense dans $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. □

11 Appendice 2 : Espaces de Hilbert.

11.1 Espaces préhilbertiens.

Définition 11.1.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ vérifiant :*

1). $\forall x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \in \mathbb{K}$;

2). $\forall x, z, z' \in E$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\langle z + ax, z' \rangle = \langle z, z' \rangle + \overline{a} \langle x, z' \rangle$;

3). $\forall x, z, z' \in E$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$, $\langle z, z' + ax \rangle = \langle z, z' \rangle + a \langle z, x \rangle$;

4). $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$;

5). $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$.

Un espace préhilbertien E sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposition 11.1.2. *Dans un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $E \ni x \mapsto \langle x, x \rangle^{1/2}$ est une norme $\|\cdot\|$ vérifiant, pour tous $x, y \in E$,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| , \tag{22}$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 . \tag{23}$$

Démonstration. On traite le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On a $\|ax\| = \sqrt{a\overline{a}\langle x, x \rangle} = |a| \|x\|$. Si $\|x\|$ est nul alors $x = 0$ par le 5) de la définition 11.1.1. Si $x = ay$ avec $a \in \mathbb{C}$,

(22) est une égalité. Supposons $x \notin \mathbb{C}y$ et posons $\langle x, y\rangle = re^{is}$ avec $r, s \in \mathbb{R}$. $\mathbb{R} \ni t \mapsto \|x + te^{-is}y\|^2$ est un polynôme réel du second degré sans racine réelle donc son discriminant est strictement négatif : $(2r)^2 < 4\|x\|^2\|y\|^2$, ce qui donne (22) car $|r| = |\langle x, y\rangle|$. Comme

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\big(\langle x, y\rangle\big)\,, \tag{24}$$

(22) donne l'inégalité triangulaire $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$. En utilisant (24), on en déduit (23). □

Proposition 11.1.3. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K}$. Soit $x, y \in E$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,*

$$\langle x, y\rangle = \big(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big)/2\,.$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,

$$\langle x, y\rangle = \Big(\|x + y\|^2 - i\|x + iy\|^2 - (1 - i)\|x\|^2 - (1 - i)\|y\|^2\Big)/2\,.$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 11.1.4. *Si $\langle x, y\rangle = 0$, x et y sont orthogonaux (on note $x \perp y$). Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments non nuls est orthogonale si, pour $i \neq j$, $x_i \perp x_j$. Elle est orthonormale si, de plus, pour tout i, $\|x_i\| = 1$.*

Proposition 11.1.5. *Pour toute famille orthogonale finie $(x_i)_{i\in I}$ de E et tous $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$,*

$$\Big\|\sum_{i\in I} a_i x_i\Big\|^2 = \sum_{i\in I} |a_i|^2\|x_i\|^2\,. \tag{25}$$

En particulier, toute famille orthogonale est libre.

Démonstration. Exercice (utiliser (24) et une récurrence sur le cardinal de l'ensemble I). □

Définition 11.1.6. *Un espace préhilbertien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, complet pour la norme $E \ni x \mapsto \langle x, x\rangle^{1/2}$, est un espace de Hilbert.*

11.2 Théorème de projection.

Définition 11.2.1. *Soit* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espace de Hilbert,* $x \in H$ *et* $F \in \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$*. La distance de* x *à* F *est*

$$d(x, F) := \inf_{y \in F} \|x - y\| \, .$$

L'orthogonal de F *dans* H *est*

$$F^\perp := \{x \in H; \forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0\} \, .$$

Remarque 11.2.2. $F^\perp$ *est toujours un sous-espace vectoriel fermé de* H*,* $F^\perp = (\overline{F})^\perp$ *et* $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$*. Si* F *est un sous-espace de* H *alors la somme* $F + F^\perp$ *est directe.*

Théorème 11.2.3. *Soit* F *un sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert* H*.*

1). Il existe une unique application $P_F : H \to F$*, appelée projection orthogonale sur* F*, telle que*

$$\forall x \in H \, , \ \|x - P_F(x)\| \ = \ d(x, F) \, .$$

2). P_F *est l'unique application* $f : H \to F$ *telle que*

$$\forall x \in H, \forall y \in F, \quad \langle x - P_F(x), y \rangle \ = \ 0 \, .$$

3). $H = F \oplus F^\perp$*. Le projecteur sur* F *associé à cette décomposition est* P_F *(en particulier* $P_F^2 = P_F$*).* P_F *est linéaire continu de norme* ≤ 1 *et, si* $F \neq \{0\}$*,* $\|P_F\| = 1$*.*

Démonstration. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $x \in H$. Il existe $(y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $d(x, F) = \lim \|x - y_n\|$. D'après (23), pour tout n, p,

$$\begin{aligned} \|2x - y_{n+p} - y_n\|^2 + \|y_{n+p} - y_n\|^2 \ &= \ 2\|x - y_{n+p}\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 \, , \\ \|y_{n+p} - y_n\|^2 \ &\leq \ 2\|x - y_{n+p}\|^2 + 2\|x - y_n\|^2 \, . \end{aligned}$$

On en déduit que $(y_n)_n$ est de Cauchy. Comme H est complet, $(y_n)_n$ converge. Comme F est fermé, la limite appartient à F. On la note $P_F(x)$. Comme $d(x, F) = \lim \|x - y_n\|$, $d(x, F) = \|x - P_F(x)\|$, par continuité de la norme. Soit $y \in F \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}^*$. Par la proposition 11.1.3,

$$\Re\big(\langle x - P_F(x), ty \rangle\big) = \Big(\|x - P_F(x) + ty\|^2 - \|x - P_F(x)\|^2 - t^2\|y\|^2\Big)/2$$

$$\geq \Big(d(x,F)^2 - d(x,F)^2 - t^2\|y\|^2\Big)/2 \geq -t^2\|y\|^2/2\,.$$

En divisant par t et en faisant $t \to 0$, on voit que $\Re(\langle x - P_F(x), y\rangle) \geq 0$. Par le même calcul avec $-y$ à la place de y, on obtient $\Re(\langle x - P_F(x), -y\rangle) \geq 0$. D'où $\Re(\langle x - P_F(x), y\rangle) = 0$. De même, on montre que $\Im(\langle x - P_F(x), y\rangle) = 0$. Donc $\langle x - P_F(x), y\rangle = 0$.
Soit $f : H \to F$ telle que

$$\forall x \in H, \forall y \in F, \quad \langle x - f(x), y\rangle \;=\; 0\,.$$

Donc, pour $x \in H$ et $y \in F$,

$$\|x - y\|^2 = \|x - f(x)\|^2 + \|f(x) - y\|^2 \geq \|x - f(x)\|^2.$$

Donc $\|x - f(x)\| = d(x, F)$. f vérifie donc

$$\forall x \in H\,,\ \|x - f(x)\| \;=\; d(x,F)\,.$$

Par (23), pour $x \in H$ et $y \in F$,

$$\|x - (f(x) + P_F(x))/2\|^2 + \|(f(x) - P_F(x))/2\|^2$$
$$= 2\|(x - f(x))/2\|^2 + 2\|(x - P_F(x))/2\|^2 \;=\; d(x,F)^2.$$

Comme $(f(x) + P_F(x))/2 \in F$, $\|x - (f(x) + P_F(x))/2\|^2 \geq d(x,F)^2$, donc $\|(f(x) - P_F(x))/2\|^2 = 0$ et $f(x) = P_F(x)$.
Comme, pour tout $x \in H$, $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ avec $P_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ et comme la somme $F + F^\perp$ est directe (cf. remarque 11.2.2), $H = F \oplus F^\perp$ et P_F est la projection sur le premier terme. P_F est donc linéaire. Par orthogonalité, $\|x\|^2 = \|P_F(x)\|^2 + \|x - P_F(x)\|^2$ donc $\|P_F(x)\| \leq \|x\|$ et $\|P_F\| \leq 1$. Si $y \in F \setminus \{0\}$ alors $y = P_F(y)$ donc $\|P_F\| = 1$. □

Corollaire 11.2.4. *Si F est un sous-espace d'un Hilbert H, alors $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$. En particulier, la somme $H = \overline{F} \oplus F^\perp$ est orthogonale. F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Démonstration. Par la remarque 11.2.2, $\overline{F}^\perp = F^\perp$ donc $H = \overline{F} \oplus F^\perp$ par le théorème 11.2.3.
Montrons que $\overline{F} = (F^\perp)^\perp$. Par la remarque 11.2.2, on sait que $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$. Si $x \in (F^\perp)^\perp$, $x = \overline{x} + x_0$ avec $\overline{x} \in \overline{F}$ et $x_0 \in F^\perp$. Comme $x \in (F^\perp)^\perp$, $0 = \langle x, x_0\rangle = 0 + \|x_0\|^2$, car $x_0 \in F^\perp = \overline{F}^\perp$ et $\overline{x} \in \overline{F}$. D'où $x_0 = 0$ et $x \in \overline{F}$. Donc $(F^\perp)^\perp \subset \overline{F}$.
La somme $H = \overline{F} \oplus F^\perp$ est orthogonale puisque $\overline{F}^\perp = F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.
Comme $H = \overline{F} \oplus F^\perp$, $H = \overline{F}$ ssi $F^\perp = \{0\}$. □

Théorème 11.2.5. *Soit H un Hilbert. L'application $d : H \to H'$ qui, à tout $x \in H$, associe l'application $d_x : H \ni y \mapsto \langle x, y\rangle \in \mathbb{K}$, est bien définie et antilinéaire. C'est une isométrie de H* **sur** *H'.*

Démonstration. L'application d_x est linéaire. Par Cauchy-Schwartz (cf. (22)), elle est continue et $\|d_x\| \leq \|x\|$. d est donc bien définie. Comme $d_x(x) = \|x\|^2$, $\|d_x\| = \|x\|$. De plus, d est antilinéaire d'après les propriétés du produit scalaire. Il reste à montrer que $d(H) = H'$.
$0 = d(0) \in d(H)$. Soit $u \in H' \setminus \{0\}$. $F = u^{-1}(0)$ est un sous-espace strict et fermé de H. Comme $H = F \oplus F^\perp$, $a \in F^\perp \setminus \{0\} \Rightarrow u(a) \neq 0$. Si $a, b \in F^\perp \setminus \{0\}$, $a - (u(a)/u(b))b \in F \cap F^\perp$ donc il est nul et $F^\perp$ est de dimension 1. Soit $a \in F^\perp \setminus \{0\}$, $b = a/u(a)$ est une base de $F^\perp$. Pour $x \in H$, $x = y + \lambda b$ avec $y \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Donc $u(x) = \lambda u(b) = \lambda = \langle b/\|b\|^2, x\rangle$. D'où $u \in d(H)$. □

Remarque 11.2.6. *À cause du résultat précédent, on identifie souvent H et son dual H'.*

11.3 Bases hilbertiennes.

Définition 11.3.1. *Soit E un evn. Un famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est totale si elle engendre un sous-espace vectoriel $F = \mathrm{vect}(e_i)_{i\in I}$ dense dans E. E est séparable s'il admet une famille dénombrable dense.*

Remarque 11.3.2. *On admet qu'un evn E est séparable si et seulement s'il existe une suite libre et totale dans E.*

Définition 11.3.3. *Une famille orthonormale et totale dans un espace de Hilbert est une base hilbertienne.*

Remarque 11.3.4. *On peut montrer que tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne. On peut établir des propriétés générales sur de telles bases et donner une description générale de tous les espaces de Hilbert. Dans ce cours, on se limite aux espaces de Hilbert séparables.*

Proposition 11.3.5. *Soit H un Hilbert séparable. Il admet une base hilbertienne.*

Démonstration. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille libre et totale. On va l'orthogonaliser. Soit $b_0 = a_0$. Supposons construits $b_0, \cdots, b_n$ deux à deux orthogonaux tels que $\mathrm{vect}(b_0, \cdots, b_n) = \mathrm{vect}(a_0, \cdots, a_n) =: F_n$. Soit $b_{n+1} =$

$a_{n+1} - P_{F_n}(a_{n+1})$. Pour tout $p \leq n$, $\langle b_{n+1}, b_p \rangle = 0$ car $b_{n+1} \in F_n^\perp$ (cf. 2) du théorème 11.2.3). De plus, $b_{n+1} \in \text{vect}(a_0, \cdots, a_n, a_{n+1})$ et $a_{n+1} \in \text{vect}(b_0, \cdots, b_n, b_{n+1})$ donc $\text{vect}(b_0, \cdots, b_n, b_{n+1}) = \text{vect}(a_0, \cdots, a_n, a_{n+1})$. Par récurrence, la famille orthogonale $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est construite et $\text{vect}(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \text{vect}(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc elle est aussi totale. Pour tout n, posons $c_n = b_n/\|b_n\|$. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne. □

Remarque 11.3.6. *On a utilisé le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour construire la base hilbertienne $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Proposition 11.3.7. *Soit H un Hilbert séparable.*

1). Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormale, alors, pour tout $x \in H$, $(\langle e_n, x\rangle)_n \in \ell^2$ et on a l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle e_n, x\rangle\right|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{26}$$

2). Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne, alors, pour $x, y \in H$, on a les identités de Parseval

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\langle e_n, x\rangle\right|^2 = \|x\|^2 , \tag{27}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{\langle e_n, x\rangle} \langle e_n, y\rangle = \langle x, y\rangle . \tag{28}$$

De plus, x est la somme de la série $\sum_n \langle e_n, x\rangle e_n$ et il y a unicité de cette écriture de x comme somme de $\sum_n a_n e_n$ ($a_n \in \mathbb{K}$). L'application $c : H \to \ell^2$ définie par $c(x) = (\langle e_n, x\rangle)_n$ est une isométrie linéaire bijective.

Démonstration.
1). Soit $x \in H$. Soit $N \in \mathbb{N}$. D'après (24) et (25),

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| x - \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n \right\|^2 &= \|x\|^2 - 2\Re\Big(\sum_{n=0}^{N} \left|\langle e_n, x\rangle\right|^2\Big) + \sum_{n=0}^{N} \left|\langle e_n, x\rangle\right|^2 , \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{N} \left|\langle e_n, x\rangle\right|^2 , \end{aligned} \tag{29}$$

ce qui donne (26).
2). Soit $x \in H$. Pour tous $k, p \in \mathbb{N}$, d'après (25),

$$\Big\| \sum_{n=k+1}^{k+p} \langle e_n, x\rangle e_n \Big\|^2 = \sum_{n=k+1}^{k+p} \big|\langle e_n, x\rangle\big|^2 . \tag{30}$$

Comme $\sum_n \big|\langle e_n, x\rangle\big|^2$ converge par (26), $\sum_n \langle e_n, x\rangle e_n$ est de Cauchy dans H qui est complet. Elle converge donc vers un $x' \in H$. Pour tout p, $\langle e_p, x - x'\rangle = 0$, par continuité. Donc $x - x'$ appartient à l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par les e_p. Comme $(e_p)_p$ est une base hilbertienne, ce dernier est dense dans H donc son orthogonal est nul (cf. corollaire 11.2.4). D'où $x = x'$. Maintenant (29) donne (27). Si x est la somme d'une série $\sum_n a_n e_n$ alors, pour tout p, par continuité,

$$\langle e_p, x\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \langle e_p, e_n\rangle = a_p . \tag{31}$$

Soit $y \in H$. Pour tout N, par continuité,

$$\begin{aligned} \Big\langle \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n, y\Big\rangle &= \sum_{p=0}^{\infty} \Big\langle \sum_{n=0}^{N} \langle e_n, x\rangle e_n, \langle e_p, y\rangle e_p\Big\rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{N} \overline{\langle e_n, x\rangle} \langle e_p, y\rangle \delta_{n,p} \\ &= \sum_{n=0}^{N} \sum_{p=0}^{\infty} \overline{\langle e_n, x\rangle} \langle e_p, y\rangle \delta_{n,p} = \sum_{n=0}^{N} \overline{\langle e_n, x\rangle} \langle e_n, y\rangle . \end{aligned} \tag{32}$$

Comme $\langle \cdot, y\rangle$ est continue, le membre de gauche de (32) tend vers $\langle x, y\rangle$, quand $N \to \infty$, ce qui donne (28).
Par (26), c est bien définie. Par les propriétés du produit scalaire, c est linéaire. Par (27), c'est une isométrie (donc une injection). Soit $(a_n)_n \in \ell^2$. Par (30), $\sum_n a_n e_n$ est une suite de Cauchy dans H complet donc elle converge vers un certain $x \in H$. Par (31), $a_n = \langle e_n, x\rangle$, pour tout n, c'est-à-dire $(a_n)_n = c(x)$. □

12 Appendice 3 : Dualité d'espaces de suites.

On donne ici une détermination du dual des espaces ℓ^p sous forme d'un problème corrigé. À la fin du problème, deux questions concernent les topologies faibles sur ce type d'espace et une autre aborde leur réflexivité.

Rappels :
- Un espace vectoriel normé est dit séparable s'il existe une partie (au plus) dénombrable dense.
- Une famille d'un espace vectoriel normé est dite totale si le sous-espace qu'elle engendre est dense.

Problème. Pour $p \in [1; +\infty]$, on note par ℓ^p l'espace de Banach des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p \; < \; \infty\,, \quad \text{si } p < \infty\,, \quad \text{et} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \; < \; \infty\,, \quad \text{si } p = \infty\,,$$

muni de la norme

$$|u|_p \;=\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}\,, \quad \text{si } p < \infty\,, \quad \text{et} \quad |u|_\infty \;=\; \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\,, \quad \text{si } p = \infty\,.$$

On note par c_0 le sous-espace vectoriel fermé de ℓ^∞ constitué des suites tendant vers 0. On rappelle les inégalités de Hölder suivantes. Pour $p, q \in [1; +\infty]$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$, pour u et v des suites réelles,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n v_n| \;\le\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^q\right)^{1/q}\,, \quad \text{si } 1 < p < \infty\,, \tag{33}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n v_n| \;\le\; \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|\right) \cdot \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |v_n|\right)\,, \quad \text{si } p = 1\,. \tag{34}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $e^{(k)}$ la suite réelle $(e_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $e_n^{(k)} = 0$ pour $n \neq k$ et par $e_n^{(k)} = 1$ pour $n = k$. Soit $F = \mathrm{vect}(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par la famille libre $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$. Soit sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui, à $t < 0$, associe -1, à 0, associe 0 et, à $t > 0$, associe $+1$.

1. a. Montrer que F est dense dans c_0 et dans ℓ^p, pour $p < \infty$. Que se passe-t-il si $p = \infty$?
   b. En déduire que c_0 et ℓ^p, avec $p < \infty$, sont séparables.
2. Soit $p \in [1; +\infty]$ et q tel que $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Pour $v \in \ell^q$, soit R_v l'application qui, à $u \in \ell^p$ associe

$$R_v(u) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\,. \tag{35}$$

a. Montrer que R_v est bien définie. **On ne justifiera pas qu'elle est linéaire.**
b. Montrer que $R_v \in (\ell^p)'$ et que sa norme dans cet espace $\|R_v\| \leq |v|_q$.
c. Pour $p = 1$, montrer que $\|R_v\| = |v|_\infty$. (Indication : pour tout $\epsilon > 0$, on construira en utilisant la fonction *sgn* une suite $u \in \ell^1$ telle que $R_v(u) > |v|_\infty - \epsilon$.)
d. Pour $p = \infty$, montrer que $\|R_v\| = |v|_1$. (Indication : on construira en utilisant la fonction *sgn* une suite $u \in \ell^\infty$ telle que $R_v(u) = |v|_1$.) Montrer que la norme de R_v dans $(c_0)'$ est aussi $|v|_1$.
e. Pour $1 < p < \infty$, montrer que $\|R_v\| = |v|_q$. (Indication : on construira en utilisant la fonction *sgn* une suite $u \in \ell^p$ telle que $R_v(u) = |v|_q$.)
f. En déduire que, dans tous les cas, l'application $v \mapsto R_v$ est une isométrie linéaire de ℓ^q dans $(\ell^p)'$.

3. Soit $e' \in (\ell^p)'$ si $p < \infty$ et $e' \in (c_0)'$ si $p = \infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $v_k = e'(e^{(k)})$ et $v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
a. Pour $p = 1$, montrer que $v \in \ell^\infty$ et que $|v|_\infty \leq \|e'\|$.
b. On suppose $1 < p < \infty$.
i. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} |v_k|^q \ \leq\ \|e'\| \cdot \left(\sum_{k=0}^{N} |v_k|^{p(q-1)}\right)^{1/p}. \tag{36}$$

(Indication : appliquer e' à un $w^N = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k e^{(k)}$ bien choisi.)
ii. En déduire que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{k=0}^{N} |v_k|^q\right)^{1/q} \ \leq\ \|e'\|\,. \tag{37}$$

iii. Montrer que $v \in \ell^q$ et que $|v|_q \leq \|e'\|$.
c. On suppose $p = \infty$.
i. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{N} |v_k| \ \leq\ \|e'\|\,. \tag{38}$$

(Indication : appliquer e' à un $w^N = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k e^{(k)}$ bien choisi.)
ii. En déduire que $v = (v_k)_k \in \ell^1$ et que $|v|_1 \leq \|e'\|$.

   d. Montrer que, pour tout $x \in F$, $e'(x) = R_v(x)$.
   e. Montrer que $e' = R_v$.
4. En déduire qu'il existe une bijection linéaire isométrique entre $(\ell^p)'$ et ℓ^q, si $p < \infty$, et entre $(c_0)'$ et ℓ^1.
5. Montrer que l'isométrie du 2.f pour $p = \infty$ n'est pas surjective. (Indication : on pourra utiliser le théorème d'Hahn-Banach.)
6. Montrer que, pour $1 < p < \infty$, ℓ^p est réflexif mais que ℓ^1 et c_0 ne le sont pas.
7. Montrer que la suite $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour la topologie faible $\sigma(\ell^p, (\ell^p)')$, si $1 < p < \infty$, et pour la topologie faible $\sigma(c_0, (c_0)')$. Montrer que c'est faux si $p = 1$.
8. Montrer que la suite $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 pour la topologie $*$ faible $\sigma((\ell^p)', \ell^p)$, si $1 \le p < \infty$, et pour la topologie $*$ faible $\sigma((c_0)', c_0)$.

Correction du problème :

1.a. Soit $u \in \ell^p$, avec $p < \infty$. On montre qu'il existe une suite $(u^N)_N$ d'éléments de F qui converge vers u dans ℓ^p. Soit

$$u^N = (u_0, u_1, \cdots, u_N, 0, \cdots) = \sum_{k=0}^{N} u_k e^{(k)} \in F\,.$$

Comme $|u - u^N|_p^p$ est le reste d'ordre N de la série convergente $\sum |u_n|^p$, il tend vers 0 quand $N \to \infty$ donc $|u - u^N|_p$ aussi.
Si $u \in c_0$, on prend la même suite $(u^N)_N$ et on a $|u - u^N|_\infty = \sup_{n>N} |u_n| \to 0$ puisque u tend vers 0. F est donc dense dans c_0 et ℓ^p.
Dans le cas $p = \infty$, le résultat est faux. Soit $u \in F$. Comme u est une combinaison linéaire finie d'éléments de $(e^{(k)})_k$, il existe n tel que $u_n = 0$. Donc, en notant $\mathbb{1}$ la suite constante égale à 1, qui appartient à ℓ^∞, on a $|u - \mathbb{1}|_\infty \ge |u_n - 1| = 1$. Comme u est quelconque dans F, la boule ouverte de centre $\mathbb{1}$ et de rayon 1 dans ℓ^∞ ne rencontre pas F. Donc $\mathbb{1} \notin \overline{F}$ et $\ell^\infty \ne \overline{F}$.
1.b. La suite $(e^{(k)})_k$ est libre (admis) et totale (cf. 1.a) dans c_0 et ℓ^p pour $p < \infty$, donc ces espaces sont séparables, d'après le cours.
2.a. Comme $v \in \ell^q$ et $u \in \ell^p$, la série $\sum u_n v_n$ converge absolument (c'est-à-dire $\sum |u_n v_n|$ converge) d'après (33) et (34). Elle converge donc dans $\mathbb{R}$. $R_v(u)$ est bien défini comme la somme de la série $\sum u_n v_n$.
Ici j'ai souvent vu **l'erreur** suivante :
On a

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\Big| \le \sum_{n=0}^{\infty} |u_n v_n| \le \cdots < \infty$$

Donc $R_v(u)$ est bien défini.
Le terme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ n'a aucun sens donc on ne peut pas faire de calcul avec lui. Ce raisonnement est donc faux. Il n'est valable que pour les séries à termes positifs. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ a toujours un sens dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ puisque c'est la limite d'une suite croissante.
Rappelons que la convergence absolue de $\sum u_n v_n$ entraine que la suite

$$\left(\sum_{n=0}^{N} u_n v_n\right)_N$$

est de Cauchy et, comme $\mathbb{R}$ est complet, on en déduit que sa limite $\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n$ existe.
2.b. Maintenant que l'on sait que la limite $R_v(u)$ existe, on peut écrire

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n v_n| \,,$$

car cela s'obtient en passant à la limite $N \to \infty$ dans les inégalités

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n v_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n v_n| \,.$$

En utilisant (33) et (34), on obtient, pour tout $u \in \ell^p$, $|R_v(u)| \leq |u|_p |v|_q$. Comme R_v est linéaire (il n'était pas demandé de justifier ce point), cela montre, d'après le cours, que R_v est linéaire continue sur ℓ^p soit $R_v \in (\ell^p)'$. De plus, comme on a par définition

$$\|R_v\| \;=\; \sup_{|u|_p \leq 1} |R_v(u)| \,,$$

l'inégalité précédente donne $\|R_v\| \leq |v|_q$.
Dans les questions 2.c, 2.d et 2.e, on calcule $\|R_v\|$ dans 3 cas différents. Comme il s'agit d'un "sup", il n'est pas atteint en général. **On ne peut donc pas toujours** écrire

$$\|R_v\| \;=\; \left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\right|$$

pour un certain u de norme inférieure à 1. Si c'est le cas, il faut donc expliquer pourquoi. D'après les indications données dans l'énoncé, le "sup" est atteint dans 2.d et 2.e mais pas toujours dans 2.c (en fait si, par exemple, $v_n = 1 - 1/(n+1)$ pour tout n dans 2.c, on peut montrer que le "sup" n'est pas

atteint).
2.c. Soit $\epsilon > 0$. On construit $u \in \ell^1$ **avec** $|\mathbf{u}|_\mathbf{1} \leq \mathbf{1}$ tel que $|R_v(u)| > |v|_\infty - \epsilon$. Par définition de $|v|_\infty$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|v_k| > |v|_\infty - \epsilon$. On pose $u = e^{(k)} \in \ell^1$. On a $|u|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| = |u_k| = 1$. De plus, $|R_v(u)| = |u_k v_k| = |v_k| > |v|_\infty - \epsilon$. Par définition d'un "sup" et d'après 2.b, $\|R_v\| = |v|_\infty$.
2.d. On construit $u \in \ell^\infty$ **avec** $|\mathbf{u}|_\infty \leq \mathbf{1}$ tel que $|R_v(u)| = |v|_1$. Soit u définie par $u_n = \mathrm{sgn}(v_n)$. On a $|u|_\infty \leq 1$ (c'est nul si $v = 0$ et c'est 1 sinon). De plus,

$$|R_v(u)| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n\Big| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|\Big| = |v|_1 \,.$$

La seconde question est plus délicate. On montre maintenant que

$$\|R_v\| \ := \ \sup_{u \in c_0, |u|_\infty \leq 1} |R_v(u)| \ = \ |v|_1 \,.$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $v \in \ell^1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{\infty} |v_n| < \epsilon$. Soit u définie par $u_n = \mathrm{sgn}(v_n)$ pour $n \leq N$ et par $u_n = 0$ si $n > N$. On a bien $u \in c_0$ puisqu'elle est nulle à partir d'un certain rang et $|u|_\infty \leq 1$. De plus,

$$|R_v(u)| \ = \ \sum_{n=0}^{N} |v_n| \ = \ |v|_1 - \sum_{n=N+1}^{\infty} |v_n| \ > \ |v|_1 - \epsilon \,.$$

Par définition d'un "sup" et d'après 2.b, $\|R_v\| = |v|_1$.
2.e. On construit $u \in \ell^p$ tel que $|R_v(u)| = |u|_p |v|_q$. Soit u définie par, pour tout n,

$$u_n = \mathrm{sgn}(v_n) |v_n|^{q/p} \,.$$

On a, d'après $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$,

$$|u|_p = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^{p \cdot q/p}\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q\Big)^{1/p} \quad \text{et} \quad |R_v(u)| = \Big|\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^{1+q/p}\Big| = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q \,,$$

donc, toujours grâce à $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$,

$$|u|_p |v|_q = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q\Big)^{1/p+1/q} = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^q = |R_v(u)| \,.$$

Pour deviner cet argument, on cherche u sous la forme $u_n = \mathrm{sgn}(v_n)|v_n|^\alpha$, on calcule $|u|_p$ et $|R_v(u)|$, et on ajuste α pour avoir $|R_v(u)| = |u|_p |v|_q$.
2.f. Le résultat résulte de 2.a et, respectivement, 2.c, 2.d et 2.e.
3.a. Comme $e^{(k)} \in \ell^1$, $|e^{(k)}|_1 = 1$ et $e' \in (\ell^1)'$, on a, $|v_k| = |e'(e^{(k)})| \leq$

$\|e'\| \cdot |e^{(k)}|_1 = \|e'\|$. Ceci étant vrai pour tout k, $v \in \ell^\infty$ et $|v|_\infty \leq \|e'\|$.

3.b.i. Soit

$$w^N = \sum_{k=0}^{N} \mathrm{sgn}(v_k)|v_k|^{q-1} e^{(k)} .$$

On a donc, en utilisant le fait que $e' \in (\ell^p)'$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} |v_k|^q &= |e'(w^N)| \leq \|e'\| \cdot |w^N|_p = \|e'\| \Big(\sum_{k=0}^{N} \big|\mathrm{sgn}(v_k)|v_k|^{q-1}\big|^p \Big)^{1/p} \\ &= \|e'\| \Big(\sum_{k=0}^{N} |v_k|^{p(q-1)} \Big)^{1/p} .\end{aligned}$$

On a montré (36).

3.b.ii. On note que (37) est valide si $v_k = 0$ pour $0 \leq k \leq N$. On suppose maintenant que l'un de ces termes est non nul. Dans (36), on peut donc diviser de part et d'autre par

$$\Big(\sum_{k=0}^{N} |v_k|^{p(q-1)} \Big)^{1/p} = \Big(\sum_{k=0}^{N} |v_k|^q \Big)^{1/p} ,$$

(cf. $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$). On obtient donc

$$\Big(\sum_{k=0}^{N} |v_k|^q \Big)^{1-1/p} \leq \|e'\| ,$$

ce qui est (37) puisque $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

3.b.iii. D'après 3.b.ii., les sommes partielles de la série $\sum |v_k|^q$ sont bornées par $\|e'\|^q$ donc cette série converge et $v \in \ell^q$. De plus, en passant à la limite $N \to \infty$ dans (37), on obtient $|v|_q \leq \|e'\|$.

3.c. Le traitement de la question est similaire à 3.b mais plus facile (prendre $\lambda_k = \mathrm{sgn}(v_k)$).

3.d. Soit $x \in F$. Par définition de F, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$x = \sum_{k=0}^{N} x_k e^{(k)} = \big(x_0, x_1, \cdots, x_N, 0, \cdots \big) .$$

Par linéarité de e', $e'(x) = \sum_{k=0}^{N} x_k e'(e^{(k)}) = \sum_{k=0}^{N} x_k v_k = R_v(x)$.

3.e. Soit $u \in \ell^p$ (resp. c_0). Comme par 1.a, F est dense dans ℓ^p (resp. c_0), u est limite d'une suite $(x^k)_k$ d'éléments de F dans ℓ^p (resp. c_0). Comme e' et

R_v sont (linéaires) continues, $e'(u) = \lim e'(x^k)$ et $R_v(u) = \lim R_v(x^k)$. Par 3.d, $e'(x^k) = R_v(x^k)$, pour tout k, donc $e'(u) = R_v(u)$.

On peut aller un peu plus vite en utilisant un corollaire du théoréme de Hahn-Banach.

D'après 1.b, $e' - R_v$ est linéaire continue sur ℓ^p (resp. c_0). Par 3.d, cette forme est nulle sur un sous-espace dense (à savoir F) dans ℓ^p (resp. c_0). Par une conséquence du théorème de Hahn-Banach, cette forme est nulle. D'où $e' = R_v$.

4. Le caractère isométrique a été montré au 2.f et la surjectivité est établie au 3.

5. D'après 1.a., F n'est pas dense dans ℓ^∞. Par le théorème d'Hahn-Banach, il existe donc une forme linéaire continue non nulle e' sur ℓ^∞ telle que e' s'annule sur F. Si $e' = R_v$, pour un $v \in \ell^1$, on aurait, pour tout k, $e'(e^{(k)}) = v_k$. Or, pour tout k, $e^{(k)} \in F$ donc $v_k = e'(e^{(k)}) = 0$. D'où $v = 0$ et $e' = R_0 = 0$. Contradiction. Donc e' n'appartient pas à l'image de l'isométrie du 2.f. quand $p = \infty$. Cette dernière n'est donc pas surjective.

6. Pour $1 < p < \infty$, il existe, par 4., une isométrie bijective de $(\ell^p)'$ sur ℓ^q et une autre de $(\ell^q)'$ sur ℓ^p (car $1 < q < \infty$). Il existe donc une isométrie bijective entre $(\ell^p)''$ et ℓ^p et ℓ^p est réflexif. Toujours par 4. et par le même argument, il existe une isométrie bijective entre $(c_0)''$ et ℓ^∞. Comme c_0 est strictement inclu dans ℓ^∞, $J(c_0)$ ne peut être égale à $(c_0)''$. Donc c_0 n'est pas réflexif. Par 4. encore et l'argument précédent, il existe une isométrie bijective entre $(\ell^1)''$ et $(\ell^\infty)'$. Comme ℓ^1 est strictement inclu dans $(\ell^\infty)'$ (cf. 5.), $J(\ell^1)$ ne peut être égale à $(\ell^1)''$. Donc ℓ^1 n'est pas réflexif.

7. D'après le cours, la suite $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a dans ℓ^p pour la topologie faible $\sigma(\ell^p, (\ell^p)')$ si et seulement si, pour tout $e' \in (\ell^p)'$, la suite réelle $(e'(e^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $e'(a)$. Soit $e' \in (\ell^p)'$. Par 4., il existe $v \in \ell^q$ tel que $e' = R_v$. Donc, pour tout k, $e'(e^{(k)}) = R_v(e^{(k)}) = v_k$. Comme la série $= \sum_{k\in\mathbb{N}}^N |v_k|^q$ converge, son terme général tend vers 0. Donc $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et $(e'(e^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers $e'(0)$. Ceci étant vrai pour tout $e' \in (\ell^p)'$, la suite $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la suite nulle dans ℓ^p pour la topologie faible $\sigma(\ell^p, (\ell^p)')$.

Le même argument montre que $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans c_0 pour la topologie faible $\sigma(c_0, (c_0)')$.

Soit $\mathbb{1}$ la suite constante égale à 1. Elle appartient à ℓ^∞ donc $R_{\mathbb{1}} \in (\ell^1)'$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $R_{\mathbb{1}}(e^{(k)}) = 1$. Donc $(R_{\mathbb{1}}(e^{(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers la suite nulle dans ℓ^1 pour la topologie faible $\sigma(\ell^1, (\ell^1)')$. En fait, cette suite n'a pas de limite dans ℓ^1 pour la topologie faible $\sigma(\ell^1, (\ell^1)')$.

8. On voit $e^{(k)}$ comme un élément de $(\ell^p)'$. Cela signifie que l'on identifie $e^{(k)}$ avec $R_{e^{(k)}}$. D'après le cours, la suite $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a' dans $(\ell^p)'$ pour la topologie $*$ faible $\sigma((\ell^p)', \ell^p)$ si et seulement si, pour tout $u \in \ell^p$, la suite

réelle $(R_{e^{(k)}}(u))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $a'(u)$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \ell^p$, $R_{e^{(k)}}(u) = u_k$ donc $(R_{e^{(k)}}(u))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $0 = R_0(u)$. Donc la suite $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 dans $(\ell^p)'$ pour la topologie $*$ faible $\sigma((\ell^p)', \ell^p)$.
De même, $(e^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $(c_0)'$ pour la topologie $*$ faible $\sigma((c_0)', c_0)$.