Cours d'Analyse, L1, 2022-2023.

Thierry Jecko
AGM, UMR 8088 du CNRS,
Département de mathématiques, site de Saint Martin,
2 avenue Adolphe Chauvin,
F-95302 Cergy-Pontoise cédex, France.
e-mail : jecko@math.cnrs.fr
page personnelle : http ://jecko.perso.math.cnrs.fr/

16-06-2023

Avertissement.

Le cours qui suit est une introduction élémentaire à la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, considérée comme un cours de mathématiques de niveau L1. Il présente une formulation mathématiquement rigoureuse des notions de limite et de continuité. Cette formulation est basée sur le calcul propositionnel, qui est considéré comme un prérequis à la lecture de ce cours. La construction de $\mathbb{R}$, avec les propriétés qui la caractérisent, est également un prérequis admis. Le cours utilise la notion de voisinage, préparant ainsi l'étude de la topologie des espaces normés (et éventuellement la topologie générale), qui sera faite dans les niveaux supérieurs. La présente version de ce cours comprends des compléments supplémentaires (de niveau L1) par rapport à celles donnée aux étudiants de L1.

À la différence de nombreux livres sur le sujet, ce cours s'efforce de démontrer en détails tous ses résultats, l'objectif étant de donner au lecteur un accès très précis aux arguments des preuves, au prix certes d'une certaine lourdeur dans la rédaction. L'auteur considère que l'effort fait dans ce cours pour décortiquer l'argumentation des résultats est nécessaire à une compréhension durable et profonde du sujet et à une utilisation fructueuse des résultats et des idées de ce cours dans les cours des niveaux supérieurs. Au lieu de laisser cette tâche au lecteur, il s'en est chargé.

Le présent cours sert de base à un cours réellement donné en amphi au niveau L1 en 2022-2023. Ne serait-ce que pour des questions de temps, l'ensemble du présent texte ne sera pas couvert lors des séances en salle. Par ailleurs, on peut légitimement considérer certains résultats du cours comme secondaires. L'auteur a cependant estimé utile de fournir un assez grand nombre de "compléments" à un cours "minimal" sur le sujet pour les raisons suivantes :
- Certains compléments ne sont jamais traités en détails pour des questions de temps mais sont quand même importants. C'est le cas d'une construction de l'exponentielle complexe, par exemple, et de ses conséquences sur l'exponentielle réelle et les logarithmes.
- La partie 8 fournit une contruction et une étude de plusieurs fonctions "usuelles". On peut considérer certaines de ces fonctions comme superflues. L'auteur a jugé utile de les inclure comme illustration de l'application de résultats de la partie 7.
- Certains résultats basiques (sur l'ensemble $\mathbb{N}$ notamment) sont souvent considérés comme admis (ou pire, comme "évidents"). Même si l'on ne prouve pas de tels résultats dans un cours en amphi, l'auteur a estimé utile, pour le lecteur soucieux de bien les comprendre, d'en fournir une preuve (cf. paragraphes 3.2.2 et 9.1, par exemple).
- Outre le fait de donner une introduction rigoureuse à la topologie normée de $\mathbb{R}$, l'objectif de ce texte est aussi de préparer et sensibiliser le lecteur à des notions, idées, méthodes, etc... qui sont employées dans des cours de mathématiques de niveaux supérieurs. Par exemple, la construction de l'exponentielle complexe met en avant le fait que cette application est un morphisme de groupe, sans le dire (cf. paragraphes 8.1 et 9.7). Par exemple, la notion de suite de Cauchy, qui est essentielle dans l'étude des séries, normalement traitée en L2, est introduite au paragraphe 3.8 et exploitée pour définir l'exponentielle complexe (cf. paragraphes 8.1 et 9.7).
- Enfin, l'auteur espère que ce texte s'avère utile aux étudiants préparant le CAPES ou l'Agrégation de mathématiques en leur fournissant une présentation rigoureuse de notions topologiques simples (ou simplifiées) dont ils ont vu ensuite des généralisations.

La matière de ce cours est indispensable à la poursuite d'études en mathématiques en L2, L3 et M1. Les étudiants souhaitant suivre ce parcours ont intérêt à bien comprendre ce cours et, si possible, à profiter des compléments qu'il contient. Les étudiants attirés par les sciences expérimentales pourraient considérer que les notions difficiles de mathématiques de ce cours ne sont pas vitales pour eux. Certes, c'est peut-être vrai mais, en les négligeant, ils renoncent à un entraînement de qualité de gymnastique intellectuelle, de rigueur scientifique et d'appréhension de la complexité, entraînement qui ne peut être que bénéfique à tout scientifique.

Comme les mathématiques sont une espèce de jeu de construction, on ne peut pas se permettre de négliger les bases si l'on veut monter dans les étages. C'est pourquoi l'oubli de connaissances accumulées dans les

cours de mathématiques précédant celui-ci ne peut être que nuisible à la compréhension de ce cours. Plus précisément, on aura surtout besoin des prérequis suivants :
- Calcul ensembliste ;
- Calcul propositionnel ;
- Propriétés des ensembles de nombres et des opérations sur les nombres, notamment sur les nombres réels et sur les nombres complexes ;
- Notion d'espace vectoriel.

Venons-en à l'organisation du cours. De manière quasi systématique, les notions et les résultats de ce cours sont placés dans des environnements textuels spéciaux, écrits en italique, portant en gras les noms de "Définition, Proposition, Corollaire, Théorème" tandis que les preuves (ou démonstrations) sont encadrées par le mot en gras "Preuve" et par le symbole □. Le reste est du commentaire dont la fonction est d'essayer d'expliquer intuitivement les notions et les résultats. Dans chaque partie, on numérote chaque définition, proposition, lemme, théorème, corollaire, remarque, selon son ordre d'apparition dans ladite partie. Une table des matières est disponible à la fin du texte.

Le chapitre 1 est dévolu à la presentation de propriétés de base (pour la plupart déjà vues dans des cours antérieurs) qui seront utiles pour la suite du cours. Le chapitre 2 présente la notion de voisinage qui sera au coeur de la définition des limites de suites et de fonctions. Le chapitre 3 traite de l'étude des suites réelles et complexes et de la notion de limite pour ces objets. Il contient aussi d'utiles résultats sur les sommes et les produits finis qui sont souvent considérés comme connus mais rarement justifiés. Le chapitre 4 est dévolu aux notions de limite et de continuité pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes. Dans le chapitre 5, on donne des propriétés sur les fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle. Le chapitre 6 traite de la dérivabilité des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles ou complexes. Dans le chapitre 7 on traite des bijections continues et on étudie leur bijection réciproque. Le chapitre 8 présente les fonctions usuelles et leurs propriétés. Il contient aussi des constructions de fonctions "plates", qui peuvent sembler exotique à première vue mais sont indispensables à la théorie des distributions (une importante théorie en analyse). Enfin, le chapitre 9 regroupe de nombreux résultats utiles pour les chapitres précédents. Certains sont des résultats basiques directement utilisés dans des preuves des chapitres précédents, d'autres sont des résultats proches des thèmes abordés dans les autres chapitres. En particulier, on y traite de la notion de contruction par récurrence d'une suite et d'une construction rigoureuse de la fonction exponentielle complexe.

Terminons par des conseils aux étudiants de L1 suivant ce cours. Rappelons tout d'abord que l'examen vise à mesurer la compréhension et la maîtrise du cours par des étudiants. Cette mesure se fait en évaluant la résolution d'exercices. Les exercices des examen et des TDs sont constitués de questions ou d'injonctions auxquelles on doit répondre par une démonstration. Il est donc indispensable d'apprendre à faire des démonstrations et, pour ce faire, **rien ne remplace l'expérience personnelle !** Il faut donc apprendre a résoudre **tout seul** des questions d'exercice. Cela se passe toujours comme cela : on analyse le résultat à démontrer et on comprend pourquoi il est vrai (tout ceci est au brouillon), puis on élabore une preuve (éventuellement au brouillon puis au propre). Le plus souvent, le cours s'avère indispensable dans la démarche précédente, pour la phase de recherche comme pour celle de rédaction de la démonstration. Pour bien utiliser cette boîte à outils qu'est le cours, il faut connaître les outils et avoir compris à quoi ils servent. C'est ce qu'on fait pour comprendre le cours. Les exercices basiques des TDs servent justement à tester si l'on a bien compris tel ou tel outil. Ils sont résolus en appliquant directement un outil vu dans le cours. Enfin le cours fournit aussi des exemples de démonstration. Il est utile de les analyser en détail (en commençant par les plus courtes). Cela peut s'avérer être un travail de fourmi mais cela "paye". Les exercices des TDs constituent un entraînement permanent à l'examen. Les étudiants ont donc intérêt à faire le plus possible de résolutions de question par eux-mêmes, puisqu'ils seront seuls à l'examen devant la même situation.

1 Préliminaires et notations.

Dans cette partie, on rappelle des notions et résultats basiques plus ou moins connus. On introduit aussi des notations. En particulier, on utilise les notations "$a := b$" ou "$b =: a$" pour dire que a est défini par b. Au niveau du calcul logique, on utilise les signes $\Longrightarrow$ (resp. $\Longleftrightarrow$) pour désigner une implication (resp. une équivalence). Ces signes n'apparaissent que placés entre deux propositions dans des formules mathématiques. On évitera de les utiliser dans du texte.

1.1 Ensembles et applications.

Dans ce cours, on se base sur une notion intuitive d'ensemble. On dira qu'un élément x d'un ensemble E appartient à E et on notera "$x \in E$". On utilisera les notions d'inclusion, de réunion et d'intersection d'ensembles. Étant donnés deux ensembles E et F, l'intersection $E \cap F$ de E et F est l'ensemble $\{x; x \in E \,\text{et}\, x \in F\}$. La réunion $E \cup F$ de E et F est l'ensemble $\{x; x \in E \,\text{ou}\, x \in F\}$. On note par $\emptyset$ l'ensemble vide c'est-à-dire l'ensemble sans élément. On dit que E est inclu dans F, on note $E \subset F$, si tous les éléments de E sont des éléments de F.
On rappelle que deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments et si et seulement si l'un est inclu dans l'autre et l'autre est inclu dans le premier. On a donc, pour deux ensembles E et F, les équivalences :

$$(E = F) \iff \big(\forall x\,, \quad (x \in E) \iff (x \in F)\big) \iff \big((E \subset F) \quad \text{et} \quad (F \subset E)\big)\,.$$

Si un ensemble A est inclu dans un ensemble E, on dit que A est une partie de E. On note par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
On note par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les ensembles de nombres entiers naturels, de nombres entiers relatifs, de nombres rationnels, de nombres réels et de nombres complexes, respectivement. On rappelle que l'on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Étant donnés deux ensembles E et F, on note par $E \times F$ le produit cartésien de E par F c'est-à-dire l'ensemble des couples $(x; y)$ où $x \in E$ et $y \in F$. Lorsque $E = F$, on note $E \times F$ par E^2. De même, le produit $E \times E \times E$ est noté E^3. Plus généralement, le produit de n copies de E (où n est un entier naturel non nul) est noté E^n (avec la convention $E^1 = E$).
Une application f de E dans F est la donnée pour chaque $x \in E$ d'un unique élément de F que l'on note $f(x)$. On note alors $f : E \longrightarrow F$. Cela revient à se donner une partie G de l'ensemble $E \times F$ qui vérifie la propriété :

$$\forall\, x \in E\,, \quad \forall\, (y; y') \in F^2\,, \quad \Big(\big((x; y) \in G\big) \text{ et } \big((x; y') \in G\big)\Big) \implies \big(y = y'\big)\,.$$

On note par Id_E l'application de E dans E qui, à $x \in E$, associe x.
Soit $f : E \longrightarrow F$. Pour une partie A de E, l'image $f(A)$ de A par f est la partie de F définie par

$$f(A) \;:=\; \{f(x)\,,\, x \in A\}\,.$$

Pour une partie B de F, l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est la partie de E définie par

$$f^{-1}(B) \;:=\; \{x \in E\,;\; f(x) \in B\}\,.$$

Lorsqu'on a une application $f : E \longrightarrow F$ et une application $g : F \longrightarrow G$, on définit la composée de g par f comme étant l'application $(g \circ f) : E \longrightarrow G$ qui, à $x \in E$, associe $g(f(x))$.
On rappelle qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est dite injective si

$$\forall\, (x; x') \in E^2\,, \quad \big((f(x) = f(x')) \implies (x = x')\big)\,.$$

On dit qu'une telle application est surjective si

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists\, x \in E\,; \quad y = f(x)\,.$$

On remarque que cette dernière proposition est équivalente à $(f(E) = F)$.
Une telle application $f : E \longrightarrow F$ est dite bijective si elle est injective et surjective. Cette propriété est équivalente à

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists!\, x \in E\,; \quad y \,=\, f(x)\,.$$

Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est injective, on dit qu'elle est bijective de E sur son image $f(E)$ car l'application $f_1 : E \longrightarrow f(E)$ donnée par $f_1(x) = f(x)$ est bijective.
Prenons une application bijective $f : E \longrightarrow F$. L'application $g : F \longrightarrow E$ qui, à tout $y \in F$, associe l'unique solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, est bijective et on a $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. Si $h : F \longrightarrow E$ vérifie $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors $h = g$. On appelle g la bijection réciproque de f et on la note $f^{\langle -1 \rangle}$.
On rappelle que la composée de deux applications injectives est injective, que la composée de deux applications surjectives est surjective. En particulier, la composée de deux applications bijectives est bijective.
Ces propriétés sont justifiées dans le paragraphe 9.1.1.

Une loi de composition interne sur un ensemble E est une application $* : (E \times E) \longrightarrow E$. Pour $(x; y) \in E^2$, on note l'image $*((x; y))$ de $(x; y)$ par $*$ aussi par $*(x; y)$ et par $x * y$.
On dit qu'une telle loi $*$ est commutative si

$$\forall\, (x; y) \in E^2\,, \quad x * y \;=\; y * x\,.$$

On dit qu'une telle loi $*$ est associative si

$$\forall\, (x; y; z) \in E^3\,, \quad x * (y * z) \;=\; (x * y) * z\,.$$

On dit qu'un élément e de E est un élément neutre pour la loi $*$ si

$$\forall\, x \in E\,, \quad x * e \;=\; e * x \;=\; x\,.$$

Si $*$ admet deux éléments neutres e et e' alors on a $e * e' = e'$, car e est un élément neutre, et $e * e' = e$, car e' est un élément neutre. Donc $e = e'$.
On dit qu'un élément $x \in E$ a un symétrique pour la loi $*$ d'élément neutre e s'il existe $y \in E$ tel que $x * y = e = \; y * x$.

L'ensemble $\mathbb{N}$ est muni d'une loi de composition interne + (l'addition), qui est commutative et associative et qui a 0 pour élément neutre. 0 est le seul élément ayant un symétrique pour l'addition. L'ensemble $\mathbb{N}$ est aussi muni d'une loi de composition interne x (la multiplication), qui est commutative et associative et qui a 1 pour élément neutre. 1 est le seul élément ayant un symétrique pour la multiplication.

On définit la relation d'ordre "$\leq$" sur $\mathbb{N}$.

Définition 1.1. *Soit $(m; n) \in \mathbb{N}^2$. On dit que m est inférieur à n, on note $m \leq n$, s'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $n = m + d$. On dit que m est strictement inférieur à n, on note $m < n$, s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = m + d$.*

On remarque que l'on utilise les mêmes symboles "$\leq$" et "$<$" que pour la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, ce qui ne pose pas de problème puisque l'on peut voir la relation d'ordre sur $\mathbb{N}$ comme la restriction à $\mathbb{N}$ de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On introduit une notation pour les intervalles de $\mathbb{N}$.

Définition 1.2. *Soit $(a; b) \in \mathbb{N}^2$. On définit les notations suivantes :*

$$[\![a; b]\!] \;:=\; \{n \in \mathbb{N}\,;\; a \leq n \;\textit{et}\; n \leq b\}\,, \quad [\![a; b[\![\;:=\; \{n \in \mathbb{N}\,;\; a \leq n \;\textit{et}\; n < b\}\,,$$

$$]\!]a; b]\!] \;:=\; \{n \in \mathbb{N}\,;\; a < n \;\textit{et}\; n \leq b\} \quad \textit{et} \quad]\!]a; b[\![\;:=\; \{n \in \mathbb{N}\,;\; a < n \;\textit{et}\; n < b\}\,.$$

On définit aussi

$$[\![a;+\infty[\![:= \ \{n \in \mathbb{N}\,;\ a \leq n\}\,, \quad]a;+\infty[\![\ := \ \{n \in \mathbb{N}\,;\ a < n\}\,.$$

Toute ces parties de $\mathbb{N}$ *sont les intervalles de* $\mathbb{N}$.

On précise les notions d'ensemble fini et de cardinal.

Définition 1.3. *Soit E un ensemble. On dit que E est un ensemble fini s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des éléments $a_1; \cdots; a_p$ de E, deux à deux distincts, tels que $E = \{a_j; j \in [\![1;p]\!]\}$. Dans ce cas, p est unique et s'appelle le cardinal de E. Si E n'est pas fini, on dit qu'il est infini.*
On décide que l'ensemble vide, noté $\emptyset$, est fini de cardinal 0.

On **admet** maintenant le théorème de récurrence suivant.

Théorème 1.4. Théorème de récurrence.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}\big) \quad et \quad \Big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\ \big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big)\,.$$

Voyons un exemple d'application de ce théorème. On veut montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,, \quad 2^n \ \geq \ n \ + \ 1\,.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soir $\mathcal{P}(n) = (2^n \geq n+1)$. Comme $2^0 = 1 \geq 0+1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc $2^n \geq n+1$. Donc $2 \cdot 2^n \geq 2n+2$ soit $2^{n+1} \geq 2(n+1) \geq n+2 = (n+1)+1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc montré que le membre de gauche de l'implication dans le théorème 1.4 est vrai pour $n_0 = 0$. Donc, le théorème nous donne la validité du membre de droite de cette implication et c'est exactement ce que l'on voulait démontrer.

A-t-on, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 2n+1$? C'est vrai pour $n = 0$, faux pour $n = 1$ et $n = 2$. Cela semble vrai pour $n \geq 3$. Montrons-le par récurrence.
Pour $n \geq 3$ soit $\mathcal{Q}(n) = (2^n \geq 2n+1)$. On a $2^3 = 8 \geq 7 = 2 \cdot 3 + 1$. Donc $\mathcal{Q}(3)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \geq 3$, $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie. On a donc $2^n \geq 2n+1$. Donc $2 \cdot 2^n \geq 2(2n+1)$. Comme, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$2(2p+1) \ \geq \ 2(p+1)+1 \iff 2p \geq 1 \iff p > 0\,,$$

on a, $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(2n+1) \geq 2(n+1)+1$, car $n \geq 3$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie. Par le théorème 1.4, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$.

On termine ce paragraphe en rappelant des propriétés basiques des ensembles de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. Ces ensembles sont munis d'une loi de composition interne $+$ (l'addition), qui est commutative et associative et qui a 0 pour élément neutre. En fait, chaque ensemble a sa propre addition et on devrait les noter différemment pour les différentier. Pour chaque ensemble, tout élément admet un symétrique pour la loi $+$, que l'on nomme "opposé". En particulier, pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z};\mathbb{Q};\mathbb{R};\mathbb{C}\}$, on a

$$\forall (a;b;c) \in \mathbb{K}^3\,,\ \big(a+c = b+c \iff a = b\big)\,.$$

Ces ensembles sont aussi munis d'une loi de composition interne x (la multiplication, aussi notée $\cdot$), qui est commutative et associative et qui a 1 pour élément neutre. Un symétrique pour la multiplication est appelé un "inverse". -1 et 1 sont les seuls éléments de $\mathbb{Z}$ qui ont un inverse pour la multiplication dans

$\mathbb{Z}$. Dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, tout élément non nul a un inverse. Dans tous les cas, 0 n'a pas d'inverse. On a les propriétés suivantes. Pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{C}\}$,

$$\forall (a;b;c) \in \mathbb{K}^3 \, , \; a \cdot (b+c) \; = \; (a \cdot b) \; + \; (a \cdot c) \, .$$

Pour $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}; \mathbb{R}; \mathbb{C}\}$, en posant $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$,

$$\forall (a;b;c) \in (\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^*) \, , \; \big(a \cdot c = b \cdot c \iff a = b\big) \, .$$

1.2 Intervalles, bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$.

On donne ici des propriétés supplémentaires de $\mathbb{R}$. Celles qui sont **admises** sont liées à la construction (compliquée) de $\mathbb{R}$, qui est hors programme.

On admet que $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre total notée $\leq$. Pour tout $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, l'une (au moins) des deux propositions suivantes

$$\big(a \leq b\big) \quad \text{et} \quad \big(b \leq a\big)$$

est vraie. Si elles sont toutes deux vraies alors, nécessairement, $a = b$. Lorsque $(a \leq b)$ est vraie, on dit que "a est inférieur à b" (ou bien "a est inférieur ou égal à b"). Lorsque $(a \leq b)$ est vraie et a est différent de b, on dit que "a est strictement inférieur à b" et on note "$a < b$". Autrement dit, la proposition $(a < b)$ est, par définition, la proposition

$$\big((a \leq b) \quad \text{et} \quad (a \neq b) \big) \, .$$

On rappelle que la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall \, (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \, , \quad \Big(\big(a + c \leq b + c\big) \iff \big(a \leq b\big) \Big) \, , \tag{1.1}$$

$$\forall \, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \, , \forall \, c > 0 \, , \quad \Big(\big(a \cdot c \leq b \cdot c\big) \iff \big(a \leq b\big) \Big) \, , \tag{1.2}$$

$$\forall \, (a;b) \in \mathbb{R}^2 \, , \quad \Big(\big(-a \leq -b\big) \iff \big(b \leq a\big) \Big) \, . \tag{1.3}$$

Remarque 1.5. *Soit $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$. On a les implications suivantes :*

$$\big(a \leq b \leq c \leq d \implies 0 \leq c-b \leq d-a\big) \, , \quad \big(a < b \leq c \leq d \implies 0 \leq c-b < d-a\big) \, ,$$

$$\big(a \leq b < c \leq d \implies 0 < c-b \leq d-a\big) \, , \quad \big(a \leq b \leq c < d \implies 0 \leq c-b < d-a\big) \, .$$

On **admet** la propriété suivante, dite propriété d'Archimède : pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier naturel n plus grand que x, i.e.

$$\forall \, x \in \mathbb{R} \, , \quad \exists \, n \in \mathbb{N} \, ; \quad n \geq x \, . \tag{1.4}$$

On introduit maintenant les intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.6. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$. On définit les notations suivantes :*

$$[a;b] \; := \; \{x \in \mathbb{R} \, ; \; a \leq x \; et \; x \leq b\} \, , \quad [a;b[\, := \; \{x \in \mathbb{R} \, ; \; a \leq x \; et \; x < b\} \, ,$$

$$]a;b] \; := \; \{x \in \mathbb{R} \, ; \; a < x \; et \; x \leq b\} \quad et \quad]a;b[\, := \; \{x \in \mathbb{R} \, ; \; a < x \; et \; x < b\} \, .$$

On introduit les symboles $+\infty$ (dit "plus infini") et $-\infty$ (dit "moins infini") et on définit

$$[a;+\infty[\, := \; \{x \in \mathbb{R} \, ; \; a \leq x\} \, , \quad]a;+\infty[\, := \; \{x \in \mathbb{R} \, ; \; a < x\} \, ,$$

$$]-\infty;a] \; := \; \{x \in \mathbb{R} \, ; \; x \leq a\} \quad et \quad]-\infty;a[\, := \; \{x \in \mathbb{R} \, ; \; x < a\} \, .$$

Les intervalles $]a;b[$, $]a;+\infty[$ et $]-\infty;a[$ sont dits ouverts, les intervalles $[a;b]$, $[a;+\infty[$ et $]-\infty;a]$ sont dits fermés. Les autres sont dits semi-ouverts.

Les symboles $+\infty$ et $-\infty$ ne sont que des notations commodes pour décrire certains intervalles. Plus loin, on les utilisera aussi pour les notions de bornes supérieure et inférieure et de limite infinie. En tout cas, ils ne représentent pas des nombres réels. On ne peut donc pas les considérer comme des éléments de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.7. *Lorsque $b \leq a$, $]a;b[$ est vide. Lorsque $b < a$, $[a;b]$ est aussi vide. En particulier, $]a;a[$ est vide. L'intervalle $[a;a]$ a un unique élément. On dit que cet ensemble est un singleton.*

Remarque 1.8. *Si x appartient à un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ alors il existe $(x_1;x_2) \in I^2$ avec $x_1 < x < x_2$. En particulier, on a $x \in]x_1;x_2[$ et $]x_1;x_2[\subset [x_1;x_2] \subset I$. On peut vérifier ce point en considérant séparément les trois cas d'intervalle ouvert.*

Définition 1.9. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$. Soit $m \in \mathbb{R}$.*
On dit que m majore A (m est un majorant de A) si

$$\forall a \in A\,, \quad a \leq m\,.$$

On dit que A est majorée si A admet un majorant dans $\mathbb{R}$, i.e. s'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que M majore A.
On dit que m minore A (m est un minorant de A) si

$$\forall a \in A\,, \quad a \geq m\,.$$

On dit que A est minorée si A admet un minorant dans $\mathbb{R}$, i.e. s'il existe un $M \in \mathbb{R}$ tel que M minore A.
On dit que m est un (le) plus grand élément (un (le) maximum) de A si $m \in A$ et m majore A. Dans ce cas, on note $m = \max A$.
On dit que m est un (le) plus petit élément (un (le) maximum) de A si $m \in A$ et m minore A. Dans ce cas, on note $m = \min A$.

On peut vérifier que, lorsqu'une partie A a un plus grand élément alors celui-ci est unique. Ainsi les propositions (m est un plus grand élément de A) et (m est le plus grand élément de A) sont équivalentes. C'est pourquoi on a inséré "(le)" dans la définition de plus grand élément. On a bien sûr la même chose avec les plus petits éléments.
Considérons quelques exemples. La partie $A := [0;1]$ de $\mathbb{R}$ est majorée. En effet 2 est un majorant de A. 3 aussi. 1 aussi. Comme 1 appartient à A, c'est le plus grand élément de A.
La partie $B := [0;1[$ est aussi majorée. Elle est majorée par 2, 3 et 7. Mais elle n'admet pas de plus grand élément. On peut vérifier ce fait en raisonnant par l'absurde.
Supposons que b soit le plus grand élément de B. Alors $b \in B$ et b majore B. Comme $b \in B$, $0 \leq b < 1$. Il existe $c \in]b;1[$ (par exemple $c = (1+b)/2$). On a $c \in B$ et $b < c$. Comme b majore B, b est plus grand que chaque élément de B, donc, en particulier, $b \geq c$. On a donc une contradiction avec $b < c$.
La partie $C = [3;+\infty[$ n'est pas majorée. Vérifions ce point.
Supposons qu'un réel m majore C. On a, en particulier, $m \geq 3$. Donc $m+1 \geq 3$ et $(m+1) \in C$. Comme m majore C, m est, en particulier, plus grand que $m+1$. Contradiction.
De manière similaire, on vérifie que A est minorée et que 0 est son minimum, que $]0;7[$ est minorée mais n'a pas de minimum, que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré.

Proposition 1.10. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et B une partie non vide de $\mathbb{N}$.*

1. *Si A est finie alors A admet un maximum et un minimum.*
2. *B admet un minimum.*
3. *On a l'équivalence suivante : B est finie si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset [\![0;q]\!]$.*
4. *On peut reformuler l'équivalence précédente sous la forme :*

$$\Big(\big(B \text{ est infinie}\big) \iff \big(\forall\, q \in \mathbb{N}\,,\, \exists\, n \in B\,;\; n > q\big)\Big)\,.$$

5. *Une partie infinie de $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.*

Preuve : Voir la preuve de la proposition 9.4. □

Les intervalles $[\![a;b]\!]$ avec $a \leq b$ et $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ sont finis. Les intervalles $]\!]a;+\infty[\![$ avec $a \in \mathbb{N}$, sont infinis. Les ensembles

$$2\mathbb{N} \;:=\; \big\{2n\,;\; n \in \mathbb{N}\big\} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N}+1 \;:=\; \big\{2n+1\,;\; n \in \mathbb{N}\big\}$$

sont infinis.
Vérifions tout cela.
L'intervalle $[\![a;b]\!]$ est inclu dans $[\![0;b]\!]$, car $a \geq 0$. Par le 3 de la proposition 9.4, il est fini.
Soit $q \in \mathbb{N}$. On a $q+a+1 \in \mathbb{N}$, $q+a+1 > q$ et $q+a+1 > a$ donc $n := q+a+1$ est un élément de $]\!]a;+\infty[\![$ qui vérifie $n > q$. Par le 4 de la proposition 9.4, on a montré que $]\!]a;+\infty[\![$ est infini.
Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour $n := q+1$, on a $2n \geq n > q$. L'élément $2n$ de $2\mathbb{N}$ vérifie $2n > q$. Par le 4 de la proposition 9.4, on a montré que $2\mathbb{N}$ est infini.
Soit $q \in \mathbb{N}$. Pour $n := q$, on a $2n+1 > n = q$. L'élément $2n+1$ de $2\mathbb{N}+1$ vérifie $2n+1 > q$. Par le 4 de la proposition 9.4, on a montré que $2\mathbb{N}+1$ est infini.

Soit A un partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. On **admet** que l'ensemble non vide des majorants réels de A a un plus petit élément. Autrement dit, on **admet** que l'ensemble non vide $\mathcal{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\; m \text{ majore } A\}$ a un minimum.
De même, pour une partie non vide et minorée A de $\mathbb{R}$, on **admet** que l'ensemble non vide des minorants réels de A a un plus grand élément. Autrement dit, on **admet** que l'ensemble non vide $\mathrm{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\; m \text{ minore } A\}$ a un maximum.
Ces deux propriétés ne sont pas valables pour les parties de $\mathbb{Q}$. On peut trouver une partie non vide et majorée A de $\mathbb{Q}$ telle que l'ensemble $\mathcal{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\; m \text{ majore } A\}$ n'a pas de minimum dans $\mathbb{Q}$. On peut aussi trouver une partie non vide et minorée A de $\mathbb{Q}$ telle que l'ensemble $\mathrm{M}_A := \{m \in \mathbb{R}\,;\; m \text{ minore } A\}$ n'a pas de maximum dans $\mathbb{Q}$.
L'absence de ces propriétés dans $\mathbb{Q}$ et leur importance pour les limites est l'une des raisons pour lesquelles on va travailler dans $\mathbb{R}$, dont la construction compliquée est admise.

Définition 1.11. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$.*
Lorsque A est majorée, on appelle borne supérieure de A le plus petit majorant réel de A. C'est un nombre réel.
Lorsque A n'est pas majorée, on décide que la borne supérieure de A est $+\infty$.
Dans tous les cas, on note par $\sup A$ *la borne supérieure de A. C'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.*
Lorsque A est minorée, on appelle borne inférieure de A le plus grand minorant réel de A. C'est un nombre réel.
Lorsque A n'est pas minorée, on décide que la borne inférieure de A est $-\infty$.
Dans tous les cas, on note par $\inf A$ *la borne inférieure de A. C'est un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.*

Il est commode d'utiliser la **convention** suivante : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel. Pour une partie non vide A de $\mathbb{R}$, $+\infty$ en est un majorant et $-\infty$ en est un minorant. **Attention :** $+\infty$ est un majorant non réel de A et $-\infty$ est un minorant non réel de A, puisque $+\infty$ et $-\infty$ n'appartiennent pas à $\mathbb{R}$.

Proposition 1.12. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, i.e. $A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\})$.*
On a $\inf A \leq \sup A$.
On a

$$\big((\sup A) \in A\big) \iff \big(A \textit{ admet un maximum}\big)$$

et, dans le cas où l'une des propositions est vraie, on a $\sup A = \max A$.
On a

$$\big((\inf A) \in A\big) \iff \big(A \textit{ admet un minimum}\big)$$

et, dans le cas où l'une des propositions est vraie, on a $\inf A = \min A$.

Preuve :

a). Soit $a \in A$. Par définition de $\inf A$, $\inf A$ minore A donc $\inf A \leq a$. Par définition de $\sup A$, $\sup A$ majore A donc $a \leq \sup A$. D'où $\inf A \leq a \leq \sup A$.

b). Preuve de la première équivalence :
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\sup A \in A$. Donc $\sup A$ est un réel et un majorant de A. Comme il appartient à A, c'est le maximum de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que A admet un maximum m. m est un nombre réel qui majore A et qui appartient à A. A est donc majorée. Soit m' un majorant de A. m' majore tous les éléments de A, donc, en particulier, l'élément m. Donc $m' \geq m$. m est donc le plus petit majorant de A, i.e. $m = \sup A$.

c). Preuve de la deuxième équivalence :
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\inf A \in A$. Donc $\inf A$ est un réel et un minorant de A. Comme il appartient à A, c'est le minimum de A.
$\Longleftarrow$) : On suppose que A admet un minimum m. m est un nombre réel qui minore A et qui appartient à A. A est donc minorée. Soit m' un minorant de A. m' minore tous les éléments de A, donc, en particulier, l'élément m. Donc $m' \leq m$. m est donc le plus grand majorant de A, i.e. $m = \inf A$. □

On a vu plus haut que 1 est le maximum de $[0;1]$. La proposition nous permet d'affirmer que $1 = \sup[0;1]$. De même, 0 est le minimum de $[0;1]$ et la proposition nous donne que $0 = \inf[0;1]$.
On a aussi vu que l'ensemble $[0;1[$ n'a pas de maximum. Mais il a forcément une borne supérieure. Quelle est-elle ? Comme cet ensemble est majorée par 5, $\sup[0;1[\in \mathbb{R}$. On devine que $\sup[0;1[= 1$. Vérifions-le. Pour simplifier l'écriture, on pose $A := [0;1[$.
Tout d'abord, 1 est bien un majorant de A. Montrons que c'est le plus petit majorant de A. Supposons le contraire. Il existe donc un majorant m de A tel que $m < 1$. Comme $(1+m)/2 \in]m;1[$ et $m \geq 0$, $(1+m)/2 \in [0;1[= A$. Comme m majore A, $m \geq (m+1)/2$ soit, par (1.2), $2m \geq m+1$ et, par (1.1), $m \geq 1$. Contradiction avec $m < 1$.
On a donc montré que 1 est le plus petit majorant de $[0;1[$, soit $\sup[0;1[= 1$.

2 Voisinages dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

On introduit plusieurs notions de voisinage dans $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$. Celles-ci seront utiles pour la définition des limites de suite et de fonction.

2.1 Voisinages d'un point dans $\mathbb{C}$.

Dans le paragraphe 9.1.3, on donne une construction de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$ ainsi que quelques propriétés de cette fonction. On rappelle que la fonction module est la fonction $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$|z| \ := \ \sqrt{x^2 + y^2} \ = \ \sqrt{z \cdot \overline{z}}\,, \tag{2.1}$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z. Elle possède les propriétés suivantes : le module du zéro de $\mathbb{C}$ est nul, le module d'un nombre complexe non nul est strictement positif, le module d'un produit est le produit des modules, le module d'une somme est inférieur ou égal à la somme de modules. Autrement dit, on a :

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \big(|z| = 0 \iff z = 0\big)\,, \tag{2.2}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad |\overline{z}| = |z|\,, \tag{2.3}$$

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |zz'| \ = \ |z| \cdot |z'| \tag{2.4}$$

et

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |z+z'| \ \leq \ |z| + |z'|\,. \tag{2.5}$$

La propriété (2.5) s'appelle l'inégalité triangulaire. Une formulation équivalente de cette proposition est

$$\forall\,(z;z')\in\mathbb{C}^2\,,\quad \big||z|\,-\,|z'|\big|\;\leq\;|z\,-\,z'|\,. \tag{2.6}$$

En désignant, pour $z\in\mathbb{C}$, par $\Re(z)$ sa partie réelle et par $\Im(z)$ sa partie imaginaire, on a

$$\forall\,z\in\mathbb{C}\,,\quad \Big(\big(|\Re(z)|\;\leq\;|z|\big)\quad\text{et}\quad\big(|\Im(z)|\;\leq\;|z|\big)\Big)\,. \tag{2.7}$$

On note que, pour $z\in\mathbb{C}$, $|-z|=|z|$, d'après (2.4).
Les propriétés précédentes sont démontrées dans le paragraphe 9.1.3 (cf. proposition 9.13).

Définition 2.1. *Pour $z_0\in\mathbb{C}$ et $r\in\mathbb{R}^+$, on pose*

$$D(z_0;r[\;:=\;\big\{z\in\mathbb{C}\,;\;|z\,-\,z_0|\,<\,r\big\}\quad\textit{et}\quad D(z_0;r]\;:=\;\big\{z\in\mathbb{C}\,;\;|z\,-\,z_0|\,\leq\,r\big\}\,.$$

Le premier ensemble est appelé le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r tandis que le second est appelé le disque fermé de centre z_0 et de rayon r.

On remarque que, pour tout $z_0\in\mathbb{C}$, $D(z_0;0[$ est vide et $D(z_0;0]$ est le singleton $\{z_0\}$. Lorsque $r>0$, on peut vérifier que, pour tout $z_0\in\mathbb{C}$, $D(z_0;r[$ et $D(z_0;r]$ sont des ensembles infinis. En effet, ils contiennent tous les deux l'ensemble infini

$$\Big\{z_0\,+\,\frac{r}{2n}\,;\;n\in\mathbb{N}^*\Big\}\,.$$

On remarque aussi que la restriction à $D(z_0;r]$ de la fonction module est majorée par $|z_0|+r$. On pourra vérifier ce point en utilisant (2.6).

Considérons deux disques ouverts (resp. fermés), l'un de centre $z_0\in\mathbb{C}$ et de rayon $r_0\in\mathbb{R}^+$ et l'autre de centre $z_1\in\mathbb{C}$ et de rayon $r_1\in\mathbb{R}^+$. À quelle condition les deux disques s'intersectent-ils ? À quelle condition l'un des disques est inclu dans l'autre ? La proposition suivante répond à ces questions.

Proposition 2.2. *Soit $(z_0;z_1)\in\mathbb{C}^2$ et $(r_0;r_1)\in(\mathbb{R}^+)^2$.*

1. *On suppose $r_0>0$ et $r_1>0$. On a l'équivalence*

$$D(z_0;r_0[\cap D(z_1;r_1[\;\neq\;\emptyset\quad\Longleftrightarrow\quad|z_0-z_1|\,<\,r_0+r_1\,. \tag{2.8}$$

2. *On a l'équivalence*

$$D(z_0;r_0]\;\cap\;D(z_1;r_1]\;\neq\;\emptyset\quad\Longleftrightarrow\quad|z_0-z_1|\,\leq\,r_0+r_1\,.$$

3. *On suppose $r_0>0$. On a l'équivalence*

$$D(z_0;r_0[\subset\;D(z_1;r_1[\quad\Longleftrightarrow\quad|z_0-z_1|\,+\,r_0\,\leq\,r_1\,.$$

4. *On a l'équivalence*

$$D(z_0;r_0]\;\subset\;D(z_1;r_1]\quad\Longleftrightarrow\quad|z_0-z_1|\,+\,r_0\,\leq\,r_1\,.$$

Preuve : À faire en td. □

Définition 2.3. *Soit $z_0\in\mathbb{C}$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est un voisinage (complexe) de z_0 s'il existe $r>0$ tel que le disque ouvert de centre z_0 et de rayon r soit inclu dans A, i.e. tel que $D(z_0;r[\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{z_0}$ l'ensemble des voisinages (complexes) de z_0.*

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Les disques ouverts $D(z_0; r_0[$, pour $r_0 > 0$, sont tous des voisinages de z_0. Les disques fermés $D(z_0; r_0]$, pour $r_0 > 0$, sont tous aussi des voisinages de z_0. Mais z_0 admet des voisinages qui ne sont pas des disques. Par exemple, les ensembles

$$\big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Re(z - z_0) \in [-1; 1]\big\} \quad \text{et} \quad \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_0) \in]-1; 2]\big\}$$

sont des voisinages de z_0. En effet, on peut vérifier qu'ils contiennent tous les deux le disque ouvert $D(z_0; 1/2[$. En revanche, l'ensemble

$$B \ := \ \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \Im(z - z_0) \geq 0\big\}$$

n'est pas un voisinage de z_0. Vérifions ce point en raisonnant par l'absurde. Supposons que B soit un voisinage de z_0. Alors, par définition, il existe un $r > 0$ tel que $D(z_0; r[\subset B$. Le nombre complexe $z_0 - ir/2$ appartient au disque $D(z_0; r[$ car $|(z_0 - ir/2) - z_0| = |-ir/2| = r/2 < r$. Donc, par l'inclusion précédente, il appartient aussi à B. On doit donc avoir $\Im((z_0 - ir/2) - z_0) \geq 0$. Or $\Im((z_0 - ir/2) - z_0) = \Im(-ir/2) = -r/2 < 0$. Contradiction. On a donc montré par l'absurde que B n'est pas un voisinage de z_0.

2.2 Voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$.

On rappelle que la fonction valeur absolue est la fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $|x| = \max\{-x; x\}$ (où l'existence du maximum est assuré par la proposition 1.10). C'est la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction module (cf. paragraphe 9.1.3). C'est pourquoi on utilise la même notation pour ces deux fonctions. Les propriétés du module se transmette à la valeur absolue. On a donc

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \big(|x| = 0 \iff x = 0\big)\,, \tag{2.9}$$

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad |xx'| \ = \ |x| \cdot |x'|\,, \tag{2.10}$$

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad |x + x'| \ \leq \ |x| \ + \ |x'| \tag{2.11}$$

et

$$\forall\, (x; x') \in \mathbb{R}^2\,, \quad \big||x| \ - \ |x'|\big| \ \leq \ |x \ - \ x'|\,. \tag{2.12}$$

La propriété (2.11) est l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et la proposition (2.12) en est une utile reformulation équivalente.

On introduit maintenant dans $\mathbb{R}$ une notion similaire à la notion de disque dans $\mathbb{C}$.

Définition 2.4. *Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on pose*

$$I(x_0; r[\ := \ \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x \ - \ x_0| \ < \ r\big\} \quad \textit{et} \quad I(x_0; r] \ := \ \big\{x \in \mathbb{R}\,;\ |x \ - \ x_0| \ \leq \ r\big\}\,.$$

On appelle ces ensembles l'intervalle ouvert centré en x_0 de rayon r et l'intervalle fermé centré en x_0 de rayon r, respectivement.

Le nom "intervalle" dans cette définition est justifié par la

Proposition 2.5. *Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, $I(x_0; r[=]x_0 - r; x_0 + r[$ et $I(x_0; r] \ = \ [x_0 - r; x_0 + r]$. Autrement dit, pour $x \in \mathbb{R}$, les deux équivalences suivantes sont vraies :*

$$\big(|x \ - \ x_0| \ < \ r\big) \iff \big(x_0 - r \ < \ x \ < \ x_0 + r\big)\,,$$

$$\big(|x \ - \ x_0| \ \leq \ r\big) \iff \big(x_0 - r \ \leq \ x \ \leq \ x_0 + r\big)\,.$$

Preuve : Notons que la première équivalence est aussi $(x \in I(x_0;r[\iff x \in]x_0-r;x_0+r[)$, la seconde est aussi $(x \in I(x_0;r] \iff x \in [x_0-r;x_0+r])$. La validité de ces équivalences donnent donc les égalités d'ensembles annoncées.
En utilisant (1.1) puis (1.3), on a

$$\big(x_0-r<x<x_0+r\big) \iff \big(-r<x-x_0<r\big) \iff \Big(\big(x-x_0<r\big) \text{ et } \big(-(x-x_0)<r\big)\Big)$$

et, en utilisant le fait que, pour $a \in \mathbb{R}$, $|a| = \max(-a;a)$, on a

$$\Big(\big(x-x_0<r\big) \text{ et } \big(-(x-x_0)<r\big)\Big) \iff \big(|x-x_0|<r\big)\,.$$

On a montré la première équivalence. Pour montrer l'autre, on peut suivre les mêmes arguments en remplaçant partout les "$<$" par des "$\leq$". □

On remarque que, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$,

$$I(x_0;r[\,=\, D(x_0;r[\cap\mathbb{R} \quad \text{et} \quad I(x_0;r] \,=\, D(x_0;r]\cap\mathbb{R}\,. \tag{2.13}$$

On peut déterminer à quelle condition deux tels intervalles du même type s'intersectent et à quelle condition l'un est inclu dans l'autre.

Proposition 2.6. *Soit $(x_0;x_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(r_0;r_1) \in (\mathbb{R}^+)^2$.*

1. *On suppose $r_0>0$ et $r_1>0$. On a l'équivalence*

$$I(x_0;r_0[\cap I(x_1;r_1[\neq \emptyset \quad\iff\quad |x_0-x_1|<r_0+r_1\,.$$

2. *On a l'équivalence*

$$I(x_0;r_0]\cap I(x_1;r_1] \neq \emptyset \quad\iff\quad |x_0-x_1|\leq r_0+r_1\,.$$

3. *On suppose $r_0>0$. On a l'équivalence*

$$I(x_0;r_0[\subset I(x_1;r_1[\quad\iff\quad |x_0-x_1|+r_0\leq r_1\,.$$

4. *On a l'équivalence*

$$I(x_0;r_0]\subset I(x_1;r_1] \quad\iff\quad |x_0-x_1|+r_0\leq r_1\,.$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la proposition 2.2 et d'utiliser (2.13). □

Définition 2.7. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage (réel) de x_0 s'il existe $r>0$ tel que l'intervalle ouvert centré en x_0 et de rayon r soit inclu dans A, i.e. tel que $I(x_0;r[\subset A$. On note par $\mathcal{V}_{x_0}$ l'ensemble des voisinages (réels) de x_0.*

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, les intervalles ouverts (resp. fermés) centrés en x_0 et de rayon $r>0$ sont des voisinages de x_0 et sont des ensembles infinis. Le singleton $\{x_0\}$, en revanche, n'est pas un voisinage de x_0. En effet, il ne peut contenir un $I(x_0;r[$ avec $r>0$, qui est infini, puisqu'il est un ensemble fini.

Attention : Pour alléger les notations, on a noté, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, de la même façon $\mathcal{V}_{x_0}$ deux ensembles différents : l'ensemble des voisinages réels de x_0 et l'ensemble des voisinages complexes du complexe x_0. L'ensemble $\{z\in\mathbb{C};\, \Re(z) \in]-1;1[\,, \Im(z)=0\}$ peut être vu comme une partie de $\mathbb{R}$ et, en tant que telle, c'est un voisinage réel de 0. Comme partie de $\mathbb{C}$, ce n'est pas un voisinage complexe de 0.
Quand on utilise le mot "voisinage" ou la notation $\mathcal{V}_{x_0}$, il y a donc un risque de confusion et, dans ce cas, on précisera "voisinage réel" ou "voisinage complexe", "$\mathcal{V}_{x_0}$" dans $\mathbb{R}$ ou "$\mathcal{V}_{x_0}$" dans $\mathbb{C}$.

La notion suivante sera aussi importante pour l'étude des limites.

Définition 2.8. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que x_0 est un point adhérent à A si, pour tout $r > 0$, $I(x_0; r[$ rencontre A, i.e. $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$.*

4 est un point adhérent à $[1; 7[$ puisque tout voisinage de 4 rencontre $[1; 7[$ en, au moins, 4. On peut vérifier que 7 est aussi un point adhérent à $[1; 7[$. Mais 0 n'est pas adhérent à $[1; 7[$ car l'intervalle ouvert $]-1; 1[$ centré en 0 ne rencontre pas $[1; 7[$.

Voici une caractérisation importante de la propriété d'adhérence.

Proposition 2.9. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et A une partie de $\mathbb{R}$. Le point x_0 est adhérent à A si et seulement si, pour tout voisinage U de x_0, U rencontre A, i.e. $U \cap A \neq \emptyset$.*

Preuve : Montrons les deux implications.
$\Longrightarrow$) : Soit x_0 est un point adhérent à A. Prenons un voisinage U de x_0. Par la définition 2.7, il existe $r > 0$ tel que $I(x_0; r[\subset U$. L'ensemble $U \cap A$ contient l'ensemble $I(x_0; r[\cap A$, qui est non vide par hypothèse (cf. définition 2.8). Donc $U \cap A$ est non vide.
$\Longleftarrow$) : On suppose que tout voisinage de x_0 rencontre a. Soit $r > 0$. Comme $I(x_0; r[$ est un voisinage de A, il rencontre A donc $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour tout $r > 0$, x_0 est un point adhérent à A par la définition 2.8. □

Pour l'étude des limites de fonctions, il est utile d'introduire la notion de voisinage réel dans une partie non vide $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

Définition 2.10. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ adhérent à $\mathcal{D}$. On dit qu'une partie A de $\mathcal{D}$ est un voisinage dans D de a si c'est la trace sur $\mathcal{D}$ d'un voisinage réel de a, i.e. s'il existe $B \in \mathcal{V}_a$ tel que $A = \mathcal{D} \cap B$. On note par $\mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des voisinages dans $\mathcal{D}$ de a.*

Dans la définition précédente, le fait que a soit adhérent à $\mathcal{D}$ assure que les voisinages dans $\mathcal{D}$ de a sont non vides.

2.3 Voisinages, dans $\mathbb{R}$, de $+\infty$ et de $-\infty$.

Pour l'étude des limites, il sera commode de disposer d'une notion de voisinage réel pour les symboles $+\infty$ et $-\infty$.

Définition 2.11. *Soit A un partie de $\mathbb{R}$.*
On dit que A est un voisinage de $+\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a; +\infty[\subset A$.
On dit que A est un voisinage de $-\infty$ s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty; a[\subset A$.
On note par $\mathcal{V}_{+\infty}$ (resp. $\mathcal{V}_{-\infty}$) l'ensemble des voisinages de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Contrairement aux voisinages d'un point, qui contiennent le point en question, un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) ne contient pas $+\infty$ (resp. $-\infty$) puisqu'il est une partie de $\mathbb{R}$ et $+\infty \notin \mathbb{R}$ (resp. $-\infty \notin \mathbb{R}$). Pour $a \in \mathbb{R}$, les intervalles $]a; +\infty[$ et $[a; +\infty[$ sont des voisinages de $+\infty$. L'ensemble $\{0\} \cup [1; +\infty[$ n'est pas un intervalle mais est un voisinage de $+\infty$. En revanche, $\mathbb{N}$ n'est pas un voisinage de $+\infty$.

Définition 2.12. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$.*
On dit que $+\infty$ est adhérent à A si tout voisinage de $+\infty$ rencontre A, i.e.

$$\forall\, B \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad A \cap B \neq \emptyset\,.$$

On dit que $-\infty$ est adhérent à A si tout voisinage de $-\infty$ rencontre A, i.e.

$$\forall\, B \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad A \cap B \neq \emptyset\,.$$

On remarque que $+\infty$ est adhérent à $[1;+\infty[$. En utilisant la propriété d'Archimède (1.4), on peut vérifier que $+\infty$ est adhérent à $\mathbb{N}$.

Pour l'étude des limites de suites, il est utile d'introduire la notion de voisinage de $+\infty$ dans une partie infinie de $\mathbb{N}$.
Remarquons tout d'abord que, d'après la proposition 1.10, $+\infty$ n'est pas adhérent à une partie finie de $\mathbb{N}$ mais est adhérent à une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Définition 2.13. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. On dit qu'une partie A de D est un voisinage dans D de $+\infty$ si c'est la trace sur D d'un voisinage dans $\mathbb{R}$ de $+\infty$, i.e. s'il existe $B \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $A = D \cap B$. On note par $\mathcal{V}_{+\infty}^{D}$ l'ensemble des voisinages dans D de $+\infty$.*

Pour une partie infinie D de $\mathbb{N}$, les voisinages dans D de $+\infty$ ne sont pas vides, puisque $+\infty$ est adhérent à D (cf. proposition 1.10).

Pour l'étude des limites de fonctions, il est utile d'introduire la notion de voisinage réel de $-\infty$ (resp. de $+\infty$) dans une partie non vide $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.

Définition 2.14. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \{-\infty;+\infty\}$ adhérent à $\mathcal{D}$. On dit qu'une partie A de $\mathcal{D}$ est un voisinage dans D de a si c'est la trace sur $\mathcal{D}$ d'un voisinage réel de a, i.e. s'il existe $B \in \mathcal{V}_a$ tel que $A = \mathcal{D} \cap B$. On note par $\mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des voisinages dans $\mathcal{D}$ de a.*

Dans la définition précédente, le fait que a soit adhérent à $\mathcal{D}$ assure que les voisinages dans $\mathcal{D}$ de a sont non vides.

2.4 Propriétés des voisinages.

On établit ici des propriétés des différents types de voisinages vus précédemment. On donne aussi des propriétés sur la notion d'adhérence. On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Proposition 2.15. *Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $\ell \in \mathbb{C}$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})$.*

1. *Si $\ell \in \mathbb{K}$, un voisinage de ℓ contient forcément ℓ comme élément, i.e.*

$$\forall\, A \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \ell \in A\,.$$

2. *L'intersection de deux voisinages de ℓ est un voisinage de ℓ, i.e.*

$$\forall\, (A;B) \in (\mathcal{V}_\ell)^2\,, \quad A \cap B \ \in\ \mathcal{V}_\ell\,.$$

3. *Une partie de $\mathbb{K}$ contenant un voisinage de ℓ est elle-même un voisinage de ℓ, i.e.*

$$\forall\, A \in \mathcal{P}(\mathbb{K})\,, \left(\left(\exists\, B \in \mathcal{V}_\ell\,;\ B \subset A\right) \implies A \in \mathcal{V}_\ell\right).$$

Preuve :

1. On sépare le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ du cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$: Pour $A \in \mathcal{V}_\ell$, il existe $r > 0$ tel que $D(\ell;r[\subset A$. Comme $\ell \in D(\ell;r[$, $\ell \in A$.
   Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$: Pour $A \in \mathcal{V}_\ell$, il existe $r > 0$ tel que $I(\ell;r[\subset A$. Comme $\ell \in I(\ell;r[$, $\ell \in A$.
2. On sépare en quatre cas.
   Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$: Soit $(A;B) \in (\mathcal{V}_\ell)^2$. Par définition, il existe $r_A > 0$ et $r_B > 0$ tels que $D(\ell;r_A[\subset A$ et $D(\ell;r_B[\subset B$. Soit $r = \min(r_A;r_B) > 0$. On a $D(\ell;r[\subset D(\ell;r_A[\subset A$ et $D(\ell;r[\subset$

$D(\ell; r_B[\subset B$ donc $D(\ell; r[\subset (A \cap B)$. $A \cap B$ est bien un voisinage de ℓ.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$: Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_\ell)^2$. Par définition, il existe $r_A > 0$ et $r_B > 0$ tels que $I(\ell; r_A[\subset A$ et $I(\ell; r_B[\subset B$. Soit $r = \min(r_A; r_B) > 0$. On a $I(\ell; r[\subset I(\ell; r_A[\subset A$ et $I(\ell; r[\subset I(\ell; r_B[\subset B$ donc $I(\ell; r[\subset (A \cap B)$. $A \cap B$ est bien un voisinage de ℓ.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$: Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_{+\infty})^2$. Par définition, il existe des réels $b_A > 0$ et $b_B > 0$ tels que $]b_A; +\infty[\subset A$ et $]b_B; +\infty[\subset B$. Soit $b = \max(b_A; b_B)$. On a $]b; +\infty[\subset]b_A; +\infty[\subset A$ et $]b; +\infty[\subset]b_B; +\infty[\subset B$ donc $]b; +\infty[\subset (A \cap B)$. $A \cap B$ est bien un voisinage de $+\infty$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$: Soit $(A; B) \in (\mathcal{V}_{+\infty})^2$. Par définition, il existe des réels $b_A > 0$ et $b_B > 0$ tels que $]-\infty; -b_A[\subset A$ et $]-\infty; -b_B[\subset B$. Soit $b = \max(b_A; b_B)$. On a $]-\infty; -b[\subset]-\infty; -b_A[\subset A$ et $]-\infty; -b[\subset]-\infty; -b_B[\subset B$ donc $]-\infty; -b[\subset (A \cap B)$. $A \cap B$ est bien un voisinage de $-\infty$.

3. On sépare en quatre cas.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$: Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de ℓ. Il existe donc $r > 0$ tel que $D(\ell; r[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $D(\ell; r[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_\ell$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$: Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de ℓ. Il existe donc $r > 0$ tel que $I(\ell; r[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $I(\ell; r[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_\ell$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = +\infty$: Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de $+\infty$. Il existe donc $b > 0$ tel que $]b; +\infty[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $]b; +\infty[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_{+\infty}$.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell = -\infty$: Soit A une partie de $\mathbb{C}$ contenant un voisinage B de $-\infty$. Il existe donc $b > 0$ tel que $]-\infty; b[\subset B$. Comme $B \subset A$, on a $]-\infty; b[\subset A$, donc $A \in \mathcal{V}_{-\infty}$. □

La propriété de séparation suivante sera importante dans la suite du cours.

Proposition 2.16. *Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$ avec $\ell \neq \ell'$. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$ avec $\ell \neq \ell'$. Alors il existe un voisinage de ℓ et un voisinage de ℓ' qui ne se rencontrent pas, i.e.*

$$\exists\, (A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}\,; \quad A \cap B = \emptyset\,.$$

Preuve : On sépare en deux cas.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: Prenons $z_1 \neq z_0$ dans $\mathbb{C}$. Donc $|z_1 - z_0| > 0$. Soit $r = |z_1 - z_0|/2 > 0$. Pour $r_1 = r$ et $r_2 = r$, le membre de droite de l'équivalence (2.8) est faux donc celui de gauche aussi. Les disques $D(z_0; r[$ et $D(z_0; r_1[$ sont donc disjoints. Comme $r > 0$, le premier est un voisinage de z_0 et le deuxième un voisinage de z_1.
Cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Il suffit de montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on peut trouver un voisinage de $-\infty$, un voisinage de a et un voisinage de $+\infty$ qui ne se rencontrent pas, deux à deux, i.e.

$$\exists\, (A; B; C) \in \mathcal{V}_{-\infty} \times \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \big((A \cap B = \emptyset) \text{ et } (A \cap C = \emptyset) \text{ et } (B \cap C = \emptyset)\big)\,.$$

Soit $\delta > 0$, $A :=]-\infty; a - \delta[$, $B := I(a; \delta[=]a - \delta; a + \delta[$ et $C :=]a + \delta; +\infty[$. On a $A \in \mathcal{V}_{-\infty}$, $B \in \mathcal{V}_a$ et $C \in \mathcal{V}_{+\infty}$. De plus, $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$. □

Remarque 2.17. *On peut vérifier que les résultats des propositions 2.15 et 2.16 sont encore valables pour des voisinages dans une partie infinie de $\mathbb{N}$ et pour des voisinages dans une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

On dispose de la caractérisation suivante des voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.18. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Une partie A de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x_0 si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I qui contient x_0 et qui est inclu dans A. Autrement dit : $A \in \mathcal{V}_{x_0}$ si et seulement s'il existe un intervalle ouvert I tel que*

$$I \subset A \quad \text{et} \quad x_0 \in I\,.$$

Preuve :
$\Longrightarrow$) : On suppose que A est un voisinage de x_0. Il existe donc $r > 0$ tel que $I(x_0; r[\subset A$. On a $x_0 \in I(x_0; r[$ et $I(x_0; r[$ est un intervalle ouvert par la proposition 2.5.

$\Longleftarrow$) : On suppose qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et inclu dans A. On sait qu'il existe $(x_1; x_2) \in I^2$ tel que $x_0 \in]x_1; x_2[$ et $]x_1; x_2[\subset I$ (cf. remarque 1.8). Soit $r = \min(|x_0 - x_1|; |x_0 - x_2|) > 0$. On va montrer que $I(x_0; r[\subset]x_1; x_2[$. Si $x \in I(x_0; r[$, on a, par la proposition 2.5,

$$x_1 \;=\; x_0 \,-\, |x_0 - x_1| \;\leq\; x_0 \,-\, r \;<\; x \;<\; x_0 + r \;\leq\; x_0 + |x_0 - x_2| \;=\; x_2\,.$$

Donc $x \in]x_1; x_2[$. On a montré que $I(x_0; r[\subset]x_1; x_2[$. Or $]x_1; x_2[\subset I$ et $I \subset A$ donc $I(x_0; r[\subset A$. A est donc un voisinage de x_0. □.

On dispose aussi d'une caractérisation d'un point adhérent à une partie.

Proposition 2.19. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Tout élément de A est un point adhérent à A. De plus, pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence :*

$$(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) \iff (\mathbb{R} \setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0}\,.$$

Preuve : Prenons un $x_0 \in A$. Pour tout $r > 0$, $x_0 \in I(x_0; r[$ donc $x_0 \in I(x_0; r[\cap A$ et $I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset$. On a montré que a est adhérent à A.
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $r > 0$. Dire que $I(x_0; r[$ rencontre A équivaut à dire que $I(x_0; r[$ n'est pas inclu dans le complémentaire de A, c'est-à-dire :

$$I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset \iff I(x_0; r[\not\subset (\mathbb{R} \setminus A)\,.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(x_0 \text{ est un point adhérent à } A) &\iff \big(\forall\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\cap A \neq \emptyset\big) \\
&\iff \big(\forall\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\not\subset (\mathbb{R} \setminus A)\big) \\
&\iff \text{non } \big(\exists\, r > 0\,, \quad I(x_0; r[\subset (\mathbb{R} \setminus A)\big) \\
&\iff (\mathbb{R} \setminus A) \notin \mathcal{V}_{x_0}\,.
\end{aligned}$$

On obtient donc l'équivalence cherchée. □

3 Suites réelles et complexes.

L'objet de cette partie est d'introduire la notion de suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et définir une notion de limite pour de telles suites.

3.1 Définitions et premiers exemples.

On introduit ici les notions de suite réelle et de suite complexe simultanément. Pour ce faire, le symbole $\mathbb{K}$ désignera soit $\mathbb{R}$, pour les suites réelles, soit $\mathbb{C}$, pour les suites complexes.

Définition 3.1. *Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, où D est une partie non vide de $\mathbb{N}$. D est le domaine de définition de la suite u. Pour $n \in D$, la valeur de u en n, à savoir $u(n)$, est aussi notée par u_n. C'est un élément de $\mathbb{K}$. On désigne parfois u par $(u_n)_{n \in D}$. Lorsque D est finie, on dit que u est une suite finie. Lorsque D est infinie, on dit que u est une suite infinie.*
L'ensemble des suites définies sur une partie non vide D de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^D$.
Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ est appelée suite réelle. Une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$ est appelée suite complexe.

On va surtout s'intéresser aux suites infinies car, pour celles-ci seulement, on aura une notion de limite.

Considérons quelques exemples de suites réelles.
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$. Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1/(n+1)$. Soit $D = [\![3; +\infty[\![$ et $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1/n$. Bien que ces trois suites se ressemblent, elles sont différentes.
Soit $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1$ si n est pair, et $x_n = -1$, si n est impair. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a une formule pour x_n à savoir $x_n = (-1)^n$. Donc $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $y : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = n$, si $n \leq 7$, et $y_n = -1$, si $n > 7$. On remarque que y n'est pas une suite constante mais elle est constante égale à -1 à partir du rang 8, c'est-à-dire si l'on oublie les 7 premiers termes.
Pour un entier naturel n, la formule

$$\frac{7n+5}{n(n-3)}$$

a un sens exactement quand $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 3\}$ et le résultat est un nombre réel. On peut donc définir une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ par $D = \mathbb{N} \setminus \{0; 3\}$ et, pour $n \in D$,

$$u_n \;=\; \frac{7n+5}{n(n-3)}\,.$$

On peut aussi considérer la suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ par $D' = [\![4; +\infty[\![$ et, pour $n \in D'$,

$$v_n \;=\; \frac{7n+5}{n(n-3)}\,.$$

C'est en fait la restriction de u à D'.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la formule

$$\frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$

n'a de sens que si $n \notin \{4k;\, k \in \mathbb{N}\} := 4\mathbb{N}$. En posant $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$, qui est bien une partie infinie de $\mathbb{N}$, la suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,

$$u_n \;=\; \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}$$

est bien définie.
Considérons maintenant des exemples de suites complexes.
Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = i^n$. En notant par exp l'exponentielle complexe, soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $v \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(in\pi/6)$. Soit $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = (1/n) + (i/n^2)$.

3.2 Suites récurrentes.

Une importante classe de suites est formée par les suites récurrentes que l'on va définir ici. On va voir deux types de suite récurrente : les suites récurrentes associées à une fonction, d'une part, et les séries (et produits), d'autre part. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.2.1 Suites récurrentes associées à une fonction.

On se donne une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, où le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f est une partie non vide de $\mathbb{K}$. On veut construire de proche en proche une suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ en choisissant $u_0 \in \mathcal{D}$, en posant $u_1 = f(u_0)$, puis $u_2 = f(u_1)$, et ainsi de suite. Est-on sûr de définir ainsi une suite ? Est-on sûr d'en définir qu'une, une fois que u_0 a été choisi ?
Un premier problème est le suivant : il se pourrait que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $u_n \notin \mathcal{D}$. Dans ce cas, nous

serions dans l'incapacité de définir u_{n+1} puisque l'on ne peut appliquer f à u_n. C'est précisément ce qui se passe dans l'exemple suivant : on prend $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \sqrt{x-1}$ et $u_0 = 2$. On a bien $u_0 \in [1;+\infty[$ donc $u_1 = f(u_0) = f(2) = 1$. On a bien $u_1 \in [1;+\infty[$ donc $u_2 = f(u_1) = f(1) = 0$. Mais $u_2 \notin [1;+\infty[$.
On va voir que l'on peut éviter ce problème en imposant que l'image de la fonction f soit incluse dans son domaine de définition.
Le second problème est lié au fait que l'on doit définir u_n pour **tout** $n \in \mathbb{N}$. Pour un n explicite, par exemple $n = 10$, on peut le faire en calculant successivement les termes $u_1, \cdots, u_9$ puis définir u_{10} par $f(u_9)$. Comme on doit faire cela pour **tout** $n \in \mathbb{N}$, on est confronté à une procédure infinie, sans savoir si elle est justifiée. Par bonheur, le théorème de récurrence va nous permettre vérifier que l'on construit bien ainsi une suite (et une seule, une fois le premier terme choisi).

Proposition 3.2. *Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dont le domaine de définition $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}$. On suppose que l'image par f de $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que*

$$f(\mathcal{D}) \ := \ \big\{ f(x) ; \ x \in \mathcal{D} \big\} \ \subset \ \mathcal{D} \, .$$

Pour tout $d \in \mathcal{D}$, il existe une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $u_0 = d$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \quad u_{n+1} \ = \ f(u_n) \, . \tag{3.1}$$

Remarque 3.3. *Pour montrer cette proposition 3.2, on se trouve confronté à une difficulté subtile et tenace. On renvoie au paragraphe 9.2.2 pour un éclaircissement à ce sujet.*

Preuve de la proposition 3.2 : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Définition 3.4. *On se place dans le cadre de la proposition 3.2. Pour $d \in \mathcal{D}$, la suite u est appelée suite récurrente associée à f de premier terme d. La proposition* (3.1) *s'appelle la relation de récurrence satisfaite par u.*

On définit maintenant la classe des suites arithmético-géométriques, qui constituent des exemples de suites récurrentes associées à une fonction. Soit $(a;b) \in \mathbb{K}^2$ et $f : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par $f(x) = a \cdot x + b$. Comme l'image du domaine de f est incluse dans $\mathbb{K}$, le domaine de f, on peut appliquer la proposition 3.2 à cette fonction f. Pour $d \in \mathbb{K}$, il existe donc une unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $u_0 = d$ et (3.1). Cette dernière s'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N} \, , \quad u_{n+1} \ = \ a \cdot u_n \ + \ b \, . \tag{3.2}$$

Définition 3.5. *Soit $(a;b) \in \mathbb{K}^2$. Soit $d \in \mathbb{K}$. L'unique suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ de premier terme $u_0 = d$ vérifiant* (3.2) *est la suite arithmético-géométrique associée à $(a;b)$ et de premier terme d.*
Lorsque $b = 0$, on dit que u est la suite géométrique de raison a et de premier terme d.
Lorsque $a = 1$, on dit que u est la suite arithmétique de raison b et de premier terme d.

3.2.2 Sommes et séries.

Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. On souhaite effectuer la somme des termes de la suite u du premier terme au $n$ième, pour un $n \in \mathbb{N}$. Lorsque $n = 0$, une telle somme est $s_0 = u_0$. Lorsque $n = 1$, une telle somme est $s_1 = u_0 + u_1$. Lorsque $n = 2$, une telle somme est $s_2 = u_0 + u_1 + u_2$. Pour n arbitraire, on a envie d'écrire

$$s_n \ = \ u_0 \ + \ u_1 \ + \ \cdots \ + \ u_{n-1} \ + \ u_n \, . \tag{3.3}$$

On rencontre de nouveau une procédure essentiellement infinie puisque n n'est pas limité. Grâce au théorème de récurrence, on va pouvoir donner un sens précis à toutes ces sommes.

Proposition 3.6. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty [\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Alors il existe une unique suite $s : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $s_{n_0} = u_{n_0}$ et*

$$\forall n \in D \, , \quad s_{n+1} \ = \ s_n \ + \ u_{n+1} \, . \tag{3.4}$$

Remarque 3.7. *Ici aussi, on fait face à la difficulté subtile mentionnée dans la remarque 3.3.*

Preuve de la proposition 3.6 : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Définition 3.8. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. La suite s construite dans la proposition 3.6 est appelée suite des sommes partielles de la suite u. On dit aussi que c'est la série de terme général u_n. On définit plusieurs notations pour les termes de la suite s, qui sont des sommes finies. Pour $n \in D$, on pose :*

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; \sum_{k\in[\![n_0;n]\!]} u_k \;:=\; \sum_{n_0\leq k\leq n} u_k \;:=\; s_n\,. \tag{3.5}$$

Le signe $\sum$ se dit "somme" ou bien "sigma" (c'est en fait la majuscule de la lettre grecque "sigma"). Le paramètre k dans ces notations est appelé indice de la somme. Lorsque $n < n_0$, on pose par **convention**

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; 0\,.$$

Attention, dans la dernière notation de (3.5), il est sous-entendu que l'indice k de la somme est un entier. On peut changer le symbole désignant l'indice de ces sommes sans changer les sommes en question. Il n'a pas d'existence extérieure, il ne sert qu'à décrire la somme. Il joue un rôle similaire à l'indice utilisé dans une boucle en informatique. En particulier, il ne peut pas apparaître en dehors de la somme.

Alors que les séries seront étudiées de manière systématique en L2, on se limitera, dans ce cours, à quelques exemples. En revanche, on se servira souvent des symboles introduits dans (3.5) qui permettent de décrire des sommes finies.

Voyons maintenant quelques propriétés de ces sommes. Prenons une suite $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$. Considérons le troisième terme s_3 de la suite s des sommes partielles de u. Par définition, $s_3 = s_2 + u_3$, $s_2 = s_1 + u_2$ et $s_1 = u_1$. Donc $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$. On peut aussi écrire $s_3 = u_3 + u_2 + u_1$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} u_{3-\ell}\,.$$

Si $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par $v_p = u_{p+1}$ alors $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ est aussi $v_0 + v_1 + v_2$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} v_\ell \;=\; \sum_{\ell=0}^{2} u_{\ell+1}\,.$$

On peut aussi écrire $s_3 = (u_1 + u_2) + u_3$ et $s_3 = u_1 + (u_2 + u_3)$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \left(\sum_{k=1}^{2} u_k\right) + \left(\sum_{k=3}^{3} u_k\right) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{1} u_k\right) + \left(\sum_{k=2}^{3} u_k\right)\,.$$

Soit $(w_1; w_2; w_3) \in \mathbb{K}^3$ tel que $u_1 = 2w_1$, $u_2 = 2w_2$ et $u_3 = 2w_3$. On peut écrire $s_3 = u_1 + (2w_1 + 2w_3) = 2w_1 + 2(w_2 + w_3) = 2(w_1 + (w_2 + w_3)) = 2(w_1 + w_2 + w_3)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{3} u_k \;=\; \sum_{k=1}^{3} 2w_k \;=\; 2\cdot\sum_{k=1}^{3} w_k\,.$$

Si $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$ est une autre suite, on peut considérer la somme $(u_1 + x_1) + (u_2 + x_2) + (u_3 + x_3)$ et l'écrire $(u_1 + u_2 + u_3) + (x_1 + x_2 + x_3)$ donc

$$\sum_{k=1}^{3} (u_k + x_k) \;=\; \left(\sum_{k=1}^{3} u_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{3} x_k\right)\,.$$

On sent que ces propriétés sont générales, elles ne dépendent pas du nombre de termes dans la somme. On s'attend donc à ce qu'elles soient vraies quelque soit le nombre de termes. Comme ce dernier n'est pas majoré, on va avoir besoin du théorème de récurrence pour les établir dans le cas général. C'est ce que l'on fait dans la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $u : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour $n \geq n_0$,*

$$\forall q \in [\![n_0; n]\!] \,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{k=n_0}^{q} u_k \;+\; \sum_{k=q+1}^{n} u_k \,, \tag{3.6}$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{\ell=n_0+m}^{n+m} u_{\ell-m} \,, \tag{3.7}$$

$$\forall m \in [\![0; n_0]\!] \,, \quad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} u_{\ell+m} \,, \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-n_0} u_{n-\ell} \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; \sum_{p=n_0}^{n} u_{n+n_0-p} \,, \tag{3.10}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} \lambda u_k \;=\; \lambda \cdot \sum_{k=n_0}^{n} u_k \,, \tag{3.11}$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_k \,+\, v_k) \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) \,+\, \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k \right) \,. \tag{3.12}$$

$$\overline{\sum_{k=n_0}^{n} u_k} \;=\; \sum_{k=n_0}^{n} \overline{u_k} \,, \tag{3.13}$$

$$\left| \sum_{k=n_0}^{n} u_k \right| \;\leq\; \sum_{k=n_0}^{n} |u_k| \,. \tag{3.14}$$

Si u est constante égale à $c \in \mathbb{K}$ alors, pour tout $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k \;=\; c \cdot (n \,-\, n_0 \,+\, 1) \,, \tag{3.15}$$

c'est-à-dire c fois le nombre d'éléments dans $[\![n_0; n]\!]$.

Preuve :

1. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n) = ((3.6) \text{ est vraie})$. Pour $n = n_0$, on a (3.6) est vraie d'après la convention adoptée dans la définition 3.8. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. On a, par la définition 3.8,
$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) \;+\; u_{n+1} \,,$$
ce qui est précisément la formule dans (3.6) pour n remplacé par $n+1$ et $q = n+1$. Maintenant, soit $q \in [\![n_0; n]\!]$. On a, par la définition 3.8 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k \right) + u_{n+1} \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{q} u_k \right) + \left(\sum_{k=q+1}^{n} u_k \right) + u_{n+1} \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{q} u_k \right) + \left(\sum_{k=q+1}^{n+1} u_k \right) .$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.6).

2. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{Q}(n) = ((3.7) \text{ est vraie})$. Pour $n = n_0$, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n_0} u_k \;=\; u_{n_0} \;=\; u_{(n_0+m)-m} \;=\; \sum_{\ell=n_0+m}^{n_0+m} u_{\ell-m}$$

donc $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On a, par la définition 3.8 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) \;+\; u_{n+1} \;=\; \left(\sum_{\ell=n_0+m}^{n+m} u_{\ell-m}\right) \;+\; u_{(n+1+m)-m} \;=\; \sum_{\ell=n_0+m}^{(n+1)+m} u_{\ell-m}\,.$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ soit vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.7).
Soit $m \in [\![n_0; n]\!]$. On applique (3.7) avec n_0 remplacé par $n_0 - m$, u remplacée par $w = (u_{\ell+m})_{\ell \in [\![n_0-m;+\infty[\![}$, n remplacé par $n - m$:

$$\sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} u_{\ell+m} \;=\; \sum_{\ell=n_0-m}^{n-m} w_\ell \;=\; \sum_{\ell'=(n_0-m)+m}^{(n-m)+m} w_{\ell'-m} \;=\; \sum_{\ell'=(n_0-m)+m}^{(n-m)+m} u_{(\ell'-m)+m} \;=\; \sum_{k=n_0}^{n} u_k\,,$$

ce qui donne (3.8).

3. Pour $n \geq n_0$, soit

$$\mathcal{R}(n) \;=\; \left(\forall x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}\,,\quad \sum_{k=n_0}^{n} x_k \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-n_0} x_{n-\ell}\right).$$

$\mathcal{R}(n_0)$ est vraie car, pour tout $x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$ et $n = n_0$, $x_{n_0} = x_{n-0}$. Supposons que $\mathcal{R}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Soit $x \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$. Pour $p \geq n_0$, soit $w_p = x_{p+1}$. On a $w \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$. On a, par (3.6) avec n remplacé par $n+1$, u remplacé par x et $q = n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} x_k \;=\; \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} x_k\right) \;+\; x_{n_0} \;=\; \left(\sum_{k=n_0+1}^{n+1} w_{k-1}\right) \;+\; x_{n_0} \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} w_k\right) \;+\; x_{n_0}\,,$$

d'après (3.8) pour u remplacée par w et $m = 1$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à w, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} x_k \;=\; \left(\sum_{\ell=0}^{n-n_0} w_{n-\ell}\right) \;+\; x_{n_0} \;=\; \left(\sum_{\ell=0}^{n-n_0} x_{n+1-\ell}\right) \;+\; x_{n+1-(n+1-n_0)} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n+1-n_0} x_{n+1-\ell}\,.$$

Donc $\mathcal{R}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{R}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.9) puisque $u \in \mathbb{K}^{[\![n_0;+\infty[\![}$.

4. Pour $p \in [\![n_0; n]\!]$, soit $y_p = u_{n+n_0-p}$ et, pour $p > n$, $y_p = 0$. On a donc, par (3.9) appliquée à y,

$$\sum_{p=n_0}^{n} u_{n+n_0-p} \;=\; \sum_{p=n_0}^{n} y_p \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-n_0} y_{n-\ell} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n-n_0} u_{\ell+n_0} \;=\; \sum_{k=n_0}^{n} u_k\,,$$

par (3.8) avec $m = n_0$. On a montré (3.10).

5. Pour $n \geq n_0$, soit

$$\mathcal{S}(n) \;=\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k \;+\; v_k) \;=\; \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) \;+\; \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right)\right).$$

Comme $(\lambda u_{n_0} + v_{n_0}) = \lambda(u_{n_0}) + (v_{n_0})$, $\mathcal{S}(n_0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. On a, par la définition 3.8 et par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n+1} (\lambda u_k + v_k) &= \left(\sum_{k=n_0}^{n} (\lambda u_k + v_k)\right) + (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n} v_k\right) + \lambda u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= \lambda \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k\right) + \left(\sum_{k=n_0}^{n+1} v_k\right),\end{aligned}$$

par la définition 3.8. Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. D'après $\mathcal{S}(n)$ avec $v = 0$, on obtient (3.11). D'après $\mathcal{S}(n)$ avec $\lambda = 1$, on obtient (3.12).

6. On a, en utilisant $\mathcal{S}(n)$ avec $\lambda = i$ et, pour tout $k \in [\![n_0; n]\!]$, u_k remplacé par $\Im(u_k)$ et v_k remplacé par $\Re(u_k)$,

$$\begin{aligned}\overline{\sum_{k=n_0}^{n} u_k} &= \overline{\sum_{k=n_0}^{n} \big(\Re(u_k) + i \cdot \Im(u_k)\big)} = \overline{\left(\sum_{k=n_0}^{n} \Re(u_k)\right) + i \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Im(u_k)\right)} \\ &= \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Re(u_k)\right) - i \cdot \left(\sum_{k=n_0}^{n} \Im(u_k)\right) = \sum_{k=n_0}^{n} \Big(\Re(u_k) - i \cdot \Im(u_k)\Big) \\ &= \sum_{k=n_0}^{n} \overline{u_k},\end{aligned}$$

en utilisant encore $\mathcal{S}(n)$ mais avec $\lambda = -i$. On a montré (3.13).

7. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{T}(n) = ((3.14) \text{ est vraie})$. $\mathcal{T}(n_0)$ est vraie car

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n_0} u_k\right| = |u_{n_0}| \leq |u_{n_0}| = \sum_{k=n_0}^{n_0} |u_k|.$$

Supposons que $\mathcal{T}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Par la définition 3.8, l'inégalité triangulaire et l'hypothèse de récurrence, on a

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k\right| = \left|\left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right| + |u_{n+1}| \leq \left(\sum_{k=n_0}^{n} |u_k|\right) + |u_{n+1}| = \sum_{k=n_0}^{n+1} |u_k|.$$

Donc $\mathcal{T}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{T}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.14).

8. Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{U}(n) = ((3.15) \text{ est vraie})$. $\mathcal{U}(n_0)$ est vraie car $u_{n_0} = c(n_0 - n_0 + 1)$. Supposons que $\mathcal{U}(n)$ soit vraie pour un $n \geq n_0$. Par la définition 3.8 et par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \left(\sum_{k=n_0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} = c \cdot (n - n_0 + 1) + c = c \cdot (n + 1 - n_0 + 1).$$

Donc $\mathcal{U}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{U}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. On a donc montré (3.15). □

Dans le cadre de l'étude des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, on rencontre des "sommes doubles" (cf. cours d'algèbre 2). Étant donnés $(n_0; n_1) \in \mathbb{N}^2$, soit $u : [\![n_0; +\infty[\![\times [\![n_1; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$ une application. Pour

$(i;j) \in [\![n_0;+\infty[\![\times [\![n_1;+\infty[\![$, on note $u_{i;j} = u((i;j))$. En fixant i dans $[\![n_0;+\infty[\![$, on peut considérer la suite $s^{i;*}$ des sommes partielles de la suite $(u_{i;j})_{j\in[\![n_1;+\infty[\![}$, c'est-à-dire

$$s^{i;*} \;=\; \left(\sum_{j=n_1}^{p} u_{i;j}\right)_{p\in[\![n_1;+\infty[\!}\quad .$$

Pour $p \in [\![n_1;+\infty[\![$, les sommes partielles de la suite $(s^{i;*}(p))_{i\in[\![n_0;+\infty[\![}$, à savoir, pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$,

$$\sum_{i=n_0}^{n} s^{i;*}(p) \;=\; \sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=n_1}^{p} u_{i;j}\right)\ ,$$

sont des "sommes doubles" de u.
De même, pour un j fixé dans $[\![n_1;+\infty[\![$, on peut considérer la suite $s^{*;j}$ des sommes partielles de la suite $(u_{i;j})_{i\in[\![n_0;+\infty[\![}$, c'est-à-dire

$$s^{*;j} \;=\; \left(\sum_{i=n_0}^{n} u_{i;j}\right)_{n\in[\![n_0;+\infty[\!}\quad .$$

Pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, les sommes partielles de la suite $(s^{*;j}(n))_{j\in[\![n_1;+\infty[\![}$, à savoir, pour $p \in [\![n_1;+\infty[\![$,

$$\sum_{j=n_1}^{p} s^{*;j}(n) \;=\; \sum_{j=n_1}^{p}\left(\sum_{i=n_0}^{n} u_{i;j}\right)\ ,$$

sont aussi des "sommes doubles" de u.
Il se trouve que les deux constructions précédentes donnent les même sommes doubles comme l'atteste la

Proposition 3.10. *Soit $u : [\![n_0;+\infty[\![\times[\![n_1;+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{K}$ une application qui, à $(i;j) \in [\![n_0;+\infty[\![\times[\![n_1;+\infty[\![$, associe $u_{i;j}$. Pour tout $(n;p) \in [\![n_0;+\infty[\![\times [\![n_1;+\infty[\![$, on a*

$$\sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=n_1}^{p} u_{i;j}\right) \;=\; \sum_{j=n_1}^{p}\left(\sum_{i=n_0}^{n} u_{i;j}\right)\ . \tag{3.16}$$

Preuve : Pour $p \in [\![n_1;+\infty[\![$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition : (pour tout $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, (3.16) est vraie).
Comme, pour tout $n \in [\![n_0;+\infty[\![$,

$$\sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=n_1}^{n_1} u_{i;j}\right) \;=\; \sum_{i=n_0}^{n} u_{i;n_1} \;=\; \sum_{j=n_1}^{n_1}\left(\sum_{i=n_0}^{n} u_{i;j}\right)\ ,$$

$\mathcal{P}(n_1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie pour un $p \in [\![n_1;+\infty[\![$. Soit $n \in [\![n_0;+\infty[\![$. En utilisant la définition 3.8 et la proposition 3.9, on a

$$\sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=n_1}^{p+1} u_{i;j}\right) \;=\; \sum_{i=n_0}^{n}\left(\left(\sum_{j=n_1}^{p} u_{i;j}\right) + u_{i;p+1}\right) \;=\; \sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=n_1}^{p} u_{i;j}\right) + \sum_{i=n_0}^{n} u_{i;p+1}\ .$$

D'après l'hypothèse de récurrence et la définition 3.8, on en déduit que

$$\sum_{i=n_0}^{n}\left(\sum_{j=n_1}^{p+1} u_{i;j}\right) \;=\; \sum_{j=n_1}^{p}\left(\sum_{i=n_0}^{n} u_{i;j}\right) + \sum_{i=n_0}^{n} u_{i;p+1} \;=\; \sum_{j=n_1}^{p+1}\left(\sum_{i=n_0}^{n} u_{i;j}\right)\ .$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, on a montré que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec n_0 remplacé par n_1), la proposition $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in [\![n_1;+\infty[\![$. □

3.2.3 Produits, puissances, factorielles.

Dans le paragraphe 3.2.2, on a donné des propriétés sur les sommes finies dans $\mathbb{K}$. De manière similaire, on peut traiter les produits finis dans $\mathbb{K}$. On pourrait obtenir un pendant pour chaque propriété sur les sommes. On se contente ici de donner une notation pour les produits finis, de justifier proprement la suite des puissances d'un nombre et d'introduire la suite des factorielles.

Proposition 3.11. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Il existe une unique suite $\pi : D \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\pi_{n_0} = u_{n_0}$ et*

$$\forall n \in D\,, \quad \pi_{n+1} \;=\; \pi_n \cdot u_{n+1}\,. \tag{3.17}$$

Preuve : Il suffit de remplacer la somme $+$ de $\mathbb{K}$ par le produit $\cdot$ de $\mathbb{K}$ dans la preuve de la proposition 3.6 pour obtenir une preuve de la proposition 3.11. Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Comme au paragraphe 3.2.2, on pourrait donner un nom à cette suite π. On se contente de définir une notation pour les produits finis :

Définition 3.12. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0; +\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. On considère la suite π construite dans la proposition 3.11. On définit plusieurs notations pour les termes de la suite π, qui sont des produits : pour $n \in D$, on pose :*

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; \prod_{k\in[\![n_0;n]\!]} u_k \;:=\; \prod_{n_0\leq k\leq n} u_k \;:=\; \pi_n\,. \tag{3.18}$$

Le signe $\prod$ se dit "produit" ou bien "pi" (c'est en fait la majuscule de la lettre grecque "pi"). Le paramètre k dans ces notations est appelé indice du produit. Lorsque $n < n_0$, on pose par **convention**

$$\prod_{k=n_0}^{n} u_k \;:=\; 1\,.$$

Comme au paragraphe 3.2.2, on peut montrer des propriétés de ces produits finis qui sont similaires à celle des sommes finies que l'on a vues dans la proposition 3.9. On se contente de donner la définition des notions de "puissance" et de "factorielle".

Définition 3.13. *Puissances et factorielles.*
Soit $a \in \mathbb{K}$ et $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite constante égale à a. On considère l'unique suite $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par la proposition 3.11 pour cette suite u. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a^n := \pi_n$ et on prononce "a puissance n". On a donc, pour $n \geq 1$,

$$a^n \;=\; \prod_{k=1}^{n} a\,.$$

Par **convention**, *on pose $a^0 = 1$.*
Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite réelle donnée par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = n$. On considère l'unique suite $\pi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par la proposition 3.11 avec u remplacée par v. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! := \pi_n$ et on prononce "factorielle n". On a donc, pour $n \geq 1$,

$$n! \;=\; \prod_{k=1}^{n} k\,.$$

Par **convention**, *on pose $0! = 1$.*

On remarque, par récurrence, que la suite $(1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1 et que la suite $(0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 à partir du rang 1. Si $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors on vérifie par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x_{2p} = 1$ et $x_{2p+1} = -1$. On peut aussi montrer par récurrence que la suite réelle $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On donne deux propriétés utiles des suites géométriques.

Proposition 3.14. *Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Pour $(m;n) \in \mathbb{N}^2$, $(a^n)\cdot(a^m) = a^{n+m}$, $(a^n)^m = a^{nm}$ et $(ab)^m = a^m b^m$. De plus, si $a \neq 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \neq 0$ et, si $a \in \mathbb{R}^{+*}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Preuve : Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(m) = (\forall\, n \in \mathbb{N}, (a^n)\cdot(a^m) = a^{n+m})$, $\mathcal{Q}(m) = (\forall\, n \in \mathbb{N}, (a^n)^m = a^{nm})$ et $\mathcal{R}(m) = ((ab)^m = a^m b^m)$.
Par la première convention dans la définition 3.13, $\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{Q}(0)$ et $\mathcal{R}(0)$ sont vraies.
Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la définition 3.13, on a $a^{m+1} = a^m \cdot a$ donc $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = (a^n)\cdot(a^m)\cdot a$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = a^{n+m}\cdot a$. Donc, en utilisant encore la définition 3.13, $(a^n)\cdot(a^{m+1}) = a^{n+m+1}$. Donc $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{Q}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, par la définition 3.13, $(a^n)^{m+1} = (a^n)^m \cdot a^n$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(a^n)^{m+1} = a^{nm}\cdot a^n$. Donc, par $\mathcal{P}(n)$, $(a^n)^{m+1} = a^{nm+n} = a^{n(m+1)}$. Donc $\mathcal{Q}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{R}(m)$ vraie pour un $m \in \mathbb{N}$. Par la définition 3.13, $(ab)^{m+1} = (ab)^m \cdot (ab)$ et, par l'hypothèse de récurrence, $(ab)^{m+1} = a^m \cdot b^m \cdot a \cdot b = a^{m+1}\cdot b^{m+1}$, par la définition 3.13. Donc $\mathcal{R}(m+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{R}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{S}(n) = (a^n \neq 0)$. Comme $a^0 = 1 \neq 0$, $\mathcal{S}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Si l'on avait $0 = a^{n+1}$ alors on aurait $0 = a\cdot a^n$ donc $a = 0$ ou $a^n = 0$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse sur a et l'hypothèse de récurrence. Donc $a^{n+1} \neq 0$ et $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{T}(n) = (a^n \in \mathbb{R}^{+*})$. Comme $a^0 = 1 \in \mathbb{R}^{+*}$, $\mathcal{T}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{T}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Donc $a^n \in \mathbb{R}^{+*}$ et, comme $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $a^{n+1} = a\cdot a^n \in \mathbb{R}^{+*}$. Donc $\mathcal{T}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{T}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

En application, on peut montrer le résultat suivant sur les suites arithmético-géométrique.

Proposition 3.15. *Soit $(a;b) \in \mathbb{C}^2$. Soit $d \in \mathbb{C}$. Soit $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ la suite arithmético-géométrique de premier terme d et associée à $(a;b)$ (cf. Definition 3.5). On a*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n \;=\; d\cdot a^n \;+\; b\cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k\,. \tag{3.19}$$

Lorsque $b = 0$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d\cdot a^n$.
Lorsque $a = 1$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = d + nb$.
De plus, si $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k \;=\; \frac{1-a^n}{1-a} \;=\; \frac{a^n-1}{a-1}\,. \tag{3.20}$$

Preuve : À faire en td. □

3.3 Propriétés des suites.

Dans cette partie, on donne des propriétés générales des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Des propriétés spécifiques aux suites réelles seront aussi mentionnées. On introduit enfin la notion de sous-suite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

3.3.1 Propriétés générales.

Une première propriété importante des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) réside dans le fait que l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour des lois de compositions appropriées que l'on donne maintenant.

Définition 3.16. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une nouvelle suite $w : D \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $n \in D$, $w_n = u_n + v_n$. La suite w est la somme des suites u et v et est notée $w = u + v$.
On définit une nouvelle suite $x : D \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $n \in D$, $x_n = \lambda \cdot u_n$. La suite x est le produit de la suite u par le scalaire λ et est notée λu ou $\lambda \cdot u$.
Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur D) s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in D$, $u_n = c$.
La suite nulle sur D est la suite constante égale à 0 sur D.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur D) à partir du rang N s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n = c$.
Une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, pour laquelle il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit constante (sur D) à partir du rang N, est dite stationnaire.

Par exemple $2((1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}) = (2/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. La somme des suites $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, données par $u_n = \ln(n)$ et $v_n = \ln(1/n)$, est la suite nulle sur $\mathbb{N}^*$ puisque, pour tout $n > 0$,

$$u_n \,+\, v_n \;=\; \ln(n) \,+\, \ln(1/n) \;=\; \ln(n) \,-\, \ln(n) \;=\; 0\,.$$

Attention : pour des raisons de clarté, on note de la même manière l'addition dans $\mathbb{K}$ et celle dans $\mathbb{K}^D$, alors qu'elles sont différentes.

Proposition 3.17. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$. L'ensemble $\mathbb{K}^D$ des suites définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans la définition 3.16, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve : Grâce aux propriétés d'associativité et de commutativité de la loi $+$ dans $\mathbb{K}$, on en déduit ces même propriétés pour la loi $+$ de $\mathbb{K}^D$. On voit que la suite nulle sur D est l'élement neutre de la loi $+$ de $\mathbb{K}^D$. Toute suite $u \in \mathbb{K}^D$ admet comme suite opposée la suite $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par, pour $n \in D$, $v_n = -u_n$. Comme on a, pour tout $(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(a;b) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\lambda\mu)a \;=\; \lambda\,(\mu a)\,,\; (\lambda \,+\, \mu)\,a \;=\; \lambda a \,+\, \mu a\,,\; \lambda\,(a \,+\, b) \;=\; \lambda a \,+\, \lambda b\,,\; 1 \cdot a \;=\; a\,,$$

on obtient, pour tout $(\lambda;\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(u;v) \in (\mathbb{K}^D)^2$,

$$(\lambda\mu)u \;=\; \lambda\,(\mu u)\,,\; (\lambda \,+\, \mu)\,u \;=\; \lambda u \,+\, \mu u\,,\; \lambda\,(u \,+\, v) \;=\; \lambda u \,+\, \lambda v\,,\; 1 \cdot u \;=\; u\,.$$

On a montré que $\mathbb{K}^D$ muni des lois de la définition 3.16 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$. Pour $m \in D$, on considère la suite $e^{(m)} : D \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $e^{(m)}_n = 1$ si $n = m$ et $e^{(m)}_n = 0$ si $n \neq m$.

Proposition 3.18. *La famille $(e^{(m)})_{m\in D}$ est une famille libre du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^D$. En particulier, la dimension de l'espace est infinie si D est une partie infinie de $\mathbb{N}$.*

Preuve : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1;\cdots;i_p) \in D^p$ avec $i_1 < \cdots < i_p$ et $(\lambda_1;\cdots;\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)} \;=\; 0$$

dans $\mathbb{K}^D$. Donc, pour $j \in [\![1;p]\!]$, on a, en prenant la valeur en i_j de la suite nulle,

$$0 \;=\; \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e^{(i_k)}\right)_{i_j} \;=\; \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot e_{i_j}^{(i_k)} \;=\; \lambda_j \,.$$

On a montré que la famille est libre. □

Remarque 3.19. *Les polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ (vus dans le cours d'Algèbre 2) forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (pour les lois de la définition 3.16).*

On introduit d'autres opérations sur les suites. On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, $\Re(z)$ désigne la partie réelle de z et $\Im(z)$ sa partie imaginaire.

Définition 3.20. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$.*
Le produit de u par v est la suite $w : D \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour tout $n \in D$, $w_n = u_n \cdot v_n$. On note w par uv ou $u \cdot v$.
On note par $|u|$ la suite réelle $(|u_n|)_{n\in D}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $|u|$ est la suite "module de u" et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $|u|$ est la suite "valeur absolue de u".
Les suites réelles $\Re(u) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im(u) : D \longrightarrow \mathbb{R}$, définies par, pour $n \in D$, $(\Re(u))_n = \Re(u_n)$ et $(\Im(u))_n = \Im(u_n)$, sont appelées respectivement partie réelle de u et partie imaginaire de u.

Remarque 3.21. *On remarque que, si $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $c \in \mathbb{K}$, cu peut être vu comme le produit de u par le scalaire c ou bien comme le produit de la suite u avec la suite constante égale à c.*
Si $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle alors $\Re(u) = u$ et $\Im(u)$ est la suite nulle.

3.3.2 Propriétés propres aux suites réelles.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur les suites réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et on donne des propriétés reliées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 3.22. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle.*
On dit que u est croissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 \,,\; \Big((n \leq m) \implies (u_n \leq u_m)\Big) \,.$$

On dit que u est strictement croissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 \,,\; \Big((n < m) \implies (u_n < u_m)\Big) \,.$$

On dit que u est décroissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 \,,\; \Big((n \leq m) \implies (u_n \geq u_m)\Big) \,.$$

On dit que u est strictement décroissante si

$$\forall (n;m) \in D^2 \,,\; \Big((n < m) \implies (u_n > u_m)\Big) \,.$$

On dit que u est monotone si elle est croissante ou bien si elle est décroissante.
On dit que u est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante.

Soit $N \in \mathbb{N}$.
On dit que u est croissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est croissante.

On dit que u est strictement croissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est strictement croissante.
On dit que u est décroissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est décroissante.
On dit que u est strictement décroissante à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est strictement décroissante.
On dit que u est monotone à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est monotone.
On dit que u est strictement monotone à partir du rang N si la restriction de u à $D \cap [\![N;+\infty[\![$ est strictement monotone.

On dit que u est croissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit croissante à partir du rang N.
On dit que u est strictement croissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement croissante à partir du rang N.
On dit que u est décroissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit décroissante à partir du rang N.
On dit que u est strictement décroissante à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement décroissante à partir du rang N.
On dit que u est monotone à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit monotone à partir du rang N.
On dit que u est strictement monotone à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que u soit strictement monotone à partir du rang N.

Voyons quelques exemples. La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est aussi strictement croissante. La suite constante égale à 1 est croissante, mais aussi décroissante. Elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et aussi strictement décroissante.

On peut vérifier que la suite $(n^2-4n+4)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 2023. Elle l'est aussi à partir du rang 2. Elle ne l'est pas à partir du rang 1. Cette suite est donc croissante à partir d'un certain rang. En fait, on peut vérifier qu'elle est strictement croissante à partir du rang 2. Elle est donc strictement croissante à partir d'un certain rang.

Contrairement aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dispose, pour repérer les suites monotones, de la proposition suivante.

Proposition 3.23. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $u : [\![n_0;+\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned}
\big(u \text{ est croissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{n+1} \geq u_n\big)\,.\\
\big(u \text{ est strictement croissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{n+1} > u_n\big)\,.\\
\big(u \text{ est décroissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{n+1} \leq u_n\big)\,.\\
\big(u \text{ est strictement décroissante}\big) &\iff \big(\forall n \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \quad u_{n+1} < u_n\big)\,.
\end{aligned}$$

Preuve : Montrons d'abord les quatres implications $\Longrightarrow$.

a). On suppose que u est croissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n+1 \geq n$, on a, d'après la croissance de u, $u_{n+1} \geq u_n$.

b). On suppose que u est strictement croissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n+1 \geq n$, on a, d'après la stricte croissance de u, $u_{n+1} > u_n$.

c). On suppose que u est décroissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n+1 \geq n$, on a, d'après la décroissance de u, $u_{n+1} \leq u_n$.

d). On suppose que u est strictement décroissante. Soit $n \geq n_0$. Comme $n+1 \geq n$, on a, d'après la stricte décroissance de u, $u_{n+1} < u_n$.

Passons maintenant aux implications $\Longleftarrow$.
On suppose vraie la proposition de droite de la première équivalence de l'énoncé. On montre que u est

croissante. Pour ce faire, on montre par récurrence la proposition $\mathcal{P}(q)$ donnée, pour $q \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{P}(q) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} \geq u_p\right).$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie, car, pour tout $p \geq n_0$, on a $u_{p+0} = u_p \geq u_p$. Supposons que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $p \geq n_0$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1$, on a $u_{p+q+1} = u_{(p+1)+q} \geq u_{p+1}$. D'après l'hypothèse, $u_{p+1} \geq u_p$. Donc $u_{p+q+1} \geq u_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \geq n_0$, $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Soit $(m; n) \in [\![n_0; +\infty[\![^2$ avec $m \geq n$. Comme $\mathcal{P}(m-n)$ est vraie, on a $u_m = u_{n+(m-n)} \geq u_n$. On a montré que u est croissante.
Pour la seconde implication $\Longleftarrow$, on procède de la même manière en remplaçant, pour $q \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(q)$ précédente par

$$\mathcal{P}_1(q) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} > u_p\right).$$

Pour la troisième implication, on procède de la même manière en remplaçant, pour $q \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(q)$ précédente par

$$\mathcal{P}_2(q) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} \leq u_p\right).$$

Pour la dernière implication, on procède de la même manière en remplaçant, pour $q \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(q)$ précédente par

$$\mathcal{P}_3(q) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; +\infty[\![\,, \quad u_{p+q} < u_p\right).$$

On a montré les quatres équivalences. □

Remarque 3.24. *Pour les suites finies $u : [\![n_0; n_1]\!] \longrightarrow \mathbb{R}$, pour $(n_0; n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 < n_1$, on a un résultat similaire à celui de la proposition 3.23. Dans ce cas, les équivalences précédentes avec $[\![n_0; +\infty[\![$ remplacé par $[\![n_0; n_1[\![$ sont vraies, comme on peut le voir à l'aide d'une récurrence finie (cf. proposition 9.18).*

Définition 3.25. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que u est majorée par a si a majore l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire si, pour tout $n \in D$, $u_n \leq a$.
On dit que u est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que u soit majorée par b.
On dit que u est minorée par a si a minore l'ensemble des termes de la suite, c'est-à-dire si, pour tout $n \in D$, $u_n \geq a$.
On dit que u est minorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que u soit minorée par b.
On dit que u est bornée si u est majorée et u est minorée.
Lorsqu'une suite est minorée par 0, on dit qu'elle est positive.
Lorsqu'une suite est majorée par 0, on dit qu'elle est négative.

La suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0, donc positive. On peut vérifier qu'elle n'est pas majorée. La suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi minorée par 0. Elle est majorée par 2023. Elle est aussi majorée par 1.

On peut bien sûr définir le fait qu'une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ soit majorée à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$ comme suit. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit qu'elle est majorée à partir du rang N s'il existe un $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \leq a$. Mais cette propriété n'est pas très utile car, dans ce cas, la suite est majorée, tout court.
Vérifions ce point. Prenons donc une suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est majorée à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$. Il existe donc un $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \leq a$. Par la proposition 1.10, l'ensemble $[\![0; N]\!] \cap D$ est fini. Donc son image par u est aussi finie. Par la proposition 1.10, elle admet un maximum m. Soit $b = \max(a; m)$. Soit $n \in D$. Si $n \leq N$, $n \in D \cap [\![0; N]\!]$, donc $u_n \leq m \leq b$. Si $n > N$ alors, par l'hypothèse, $u_n \leq a \leq b$. Donc b majore u et u est majorée.
Lorsque la partie D est finie, toute suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée, majorée à partir d'un certain rang par le maximum de l'ensemble fini non vide $\{u_n; n \in D\}$ (cf. proposition 1.10). De même, lorsque D est finie, toute suite $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée, minorée à partir d'un certain rang par le minimum de l'ensemble

fini non vide $\{u_n; n \in D\}$ (cf. proposition 1.10). Les notions précédentes ne sont donc vraiment utiles que lorsque D est infinie.
On a montré la

Proposition 3.26. *Soit D une partie non vide de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite.*

1. *Si D est finie alors u est majorée et minorée.*
2. *S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de u à $D \cap [\![N; +\infty[\![$ soit majorée (resp. minorée) alors u est majorée (resp. minorée).*

Donnons une caractérisation très utile de la bornitude avec la valeur absolue.

Proposition 3.27. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On a l'équivalence :*

$$\Big(\big(u \text{ est bornée}\big) \iff \big(\exists m \in \mathbb{R}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad |u_n| \leq m\big)\Big)\,.$$

Preuve : On montre successivement les deux implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose u bornée. Il existe donc $(m_-; m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in D$, $m_- \leq u_n \leq m_+$. Soit $m = \max(|m_-|; |m_+|)$. On a $m \geq |m_-| \geq -m_-$. On a aussi $m \geq |m_+| \geq m_+$. Soit $n \in D$. On a $u_n \leq m_+ \leq m$ et $-u_n \leq -m_- \leq m$, donc $|u_n| = \max(u_n; -u_n) \leq m$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in D$, $|u_n| \leq m$ soit $u_n \in I(0; m]$. Par la proposition 2.5 avec $x_0 = 0$ et $r = m$, on a donc, pour tout $n \in D$, $-m \leq u_n \leq m$. Donc u est majorée par m et minorée par $-m$. Elle est donc bornée. □

Terminons ce paragraphe par un résultat sur les séries associées à des suites réelles.

Proposition 3.28. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit $u : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. Alors, pour tout $N \in [\![n_0; +\infty[\![$,*

$$\sum_{n=n_0}^{N} u_n \;\leq\; \sum_{n=n_0}^{N} v_n\,. \tag{3.21}$$

Si, de plus, il existe $p \in [\![n_0; +\infty[\![$ tel que $u_p < v_p$, alors, pour tout $N \in [\![p; +\infty[\![$, l'inégalité (3.21) est stricte.
Si $w : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite positive alors la série $s = (s_N)_{N \in [\![n_0; +\infty[\![}$ associée à w est croissante. Si, de plus, il existe $p \in [\![n_0; +\infty[\![$ tel que, pour tout $n \in [\![p; +\infty[\![$, $w_n > 0$, alors la suite s est strictement croissante à partir du rang p.

Preuve : Pour $N \in [\![n_0; +\infty[\![$, on considère la proposition $\mathcal{P}(N) =$ ((3.21) est vraie). Pour $N = n_0$, on a, par hypothèse, $u_{n_0} \leq v_{n_0}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(N)$ vraie pour un $N \in [\![n_0; +\infty[\![$. On a, par l'hypothèse de récurrence et le fait que $u_{N+1} \leq v_{N+1}$,

$$\sum_{n=n_0}^{N+1} u_n \;=\; \left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right) + u_{N+1} \;\leq\; \left(\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right) + u_{N+1} \;\leq\; \left(\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right) + v_{N+1} \;=\; \sum_{n=n_0}^{N+1} v_n\,.$$

Donc $\mathcal{P}(N+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{P}(N)$ est donc vraie pour tout $N \in [\![n_0; +\infty[\![$.
On suppose qu'on a un $p \in [\![n_0; +\infty[\![$ tel que $u_p < v_p$. Pour $N \in [\![p; +\infty[\![$, on considère la proposition $\mathcal{Q}(N) =$ (l'inégalité dans (3.21) est stricte). On dispose de (3.21) avec N remplacé par $p-1$ (si $p-1 < n_0$, car l'inégalité en question est $0 \leq 0$ et si $p-1 \geq n_0$, elle est garantie par $\mathcal{P}(p-1)$). Donc, comme $u_p < v_p$,

$$\sum_{n=n_0}^{p} u_n \;=\; \left(\sum_{n=n_0}^{p-1} u_n\right) + u_p \;\leq\; \left(\sum_{n=n_0}^{p-1} v_n\right) + u_p \;<\; \left(\sum_{n=n_0}^{p-1} v_n\right) + v_p \;=\; \sum_{n=n_0}^{p} v_n\,.$$

Donc $\mathcal{Q}(p)$ est vraie. Supposons $\mathcal{Q}(N)$ vraie pour un $N \in [\![p;+\infty[\![$. On a, par l'hypothèse de récurrence et le fait que $u_{N+1} \leq v_{N+1}$,

$$\sum_{n=n_0}^{N+1} u_n \;=\; \left(\sum_{n=n_0}^{N} u_n\right) + u_{N+1} \;<\; \left(\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right) + u_{N+1} \;\leq\; \left(\sum_{n=n_0}^{N} v_n\right) + v_{N+1} \;=\; \sum_{n=n_0}^{N+1} v_n\,.$$

Donc $\mathcal{Q}(N+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = p$), $\mathcal{Q}(N)$ est donc vraie pour tout $N \in [\![p;+\infty[\![$.
Pour $N \in [\![n_0;+\infty[\![$, on a, comme $w_{N+1} \geq 0$,

$$s_{N+1} \;=\; \sum_{n=n_0}^{N+1} w_n \;=\; \left(\sum_{n=n_0}^{N} w_n\right) + w_{N+1} \;=\; s_N + w_{N+1} \;\geq\; s_N\,.$$

Par la proposition 3.23, s est croissante.
On suppose que w est strictement positive à partir d'un rang $p \geq n_0$. Le calcul précédent montre que, pour $N \in [\![p;+\infty[\![$, $s_{N+1} > s_N$ cette fois, donc, par la proposition 3.23, s est strictement croissante à partir du rang p. □

3.3.3 Sous-suites.

On revient dans le cadre général des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 3.29. *On appelle extractrice une suite strictement croissante définie sur une partie infinie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire une application strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$, où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$.*

Remarque 3.30. *Soit D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. Il se trouve que φ est injective.*
En effet, si $\varphi(n) = \varphi(p)$ avec $(n;p) \in (D')^2$, alors la proposition $(n > p)$ est fausse car sinon on aurait $\varphi(n) > \varphi(p)$, par la stricte croissante de φ, et il en est de même de la proposition $(n < p)$ pour la même raison, d'où $n = p$.
Par la proposition 9.3, l'image $D := \varphi(D')$ de D' par φ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Les suites $\varphi_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $\varphi_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1(n) = 2n$ et $\varphi_2(n) = 2n+1$, sont des extractrices. La suite $\varphi_3 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ donnée par $\varphi_3(n) = n^2 - 4n + 4$ n'est pas une extractrice car $\varphi_3(0) = 4 > 1 = \varphi_3(1)$. Mais on peut vérifier que sa restriction à $[\![2;+\infty[\![$ en est une. La suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ est bien strictement croissante mais elle n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$ car $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$. Ce n'est donc pas une extractrice. Cependant, si l'on pose $D' = \{p^2; p \in \mathbb{N}\}$, D' est bien une partie infinie de $\mathbb{N}$ et la suite $\varphi_4 : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D'$, $\varphi_4(n) = \sqrt{n}$ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$ et est strictement croissante. C'est donc une extractrice. Enfin, on peut vérifier que $\varphi_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_5(n) = 2^n$ est aussi une extractrice.

Définition 3.31. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Une sous-suite de u est la composée de u par une extractrice, c'est-à-dire une suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$, où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$, telle qu'il existe une extratrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ telle que $v = u \circ \varphi$.*
Une sous-suite de u est aussi appelée suite extraite de u.

Pour $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des sous-suites de u puisqu'elles sont $u \circ \varphi_1$ et $u \circ \varphi_2$ respectivement, pour les extractrices φ_1 et φ_2 vues plus haut. Si $x = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $y = (1/(2n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ alors y est une sous-suite de x car $y = x \circ \psi$, où $\psi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$, définie par $\psi(n) = 2n$, est strictement croissante. Soit $D = \mathbb{N} \setminus (4\mathbb{N})$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in D$,

$$u_n \;=\; \frac{1}{\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}\,.$$

Soit $v = ((-1)^p)_{p\in\mathbb{N}}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $2(2p+1) \notin 4\mathbb{N}$ car $2p+1 \notin 2\mathbb{N}$, et

$$u_{2(2p+1)} \;=\; \frac{1}{\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{\sin\left(p\pi \,+\, \frac{\pi}{2}\right)} \;=\; \frac{1}{(-1)^p} \;=\; (-1)^p\,.$$

On voit que v est une sous-suite de u car $v = u \circ \varphi$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$, donnée par $\varphi(p) = 2(2p+1)$, est strictement croissante.

Voyons maintenant une façon plus intuitive de construire des sous-suites d'une suite donnée. Prenons une suite réelle $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$. Par exemple, on veut contruire une suite constituée de termes de u, dans l'ordre donné par les indices de u, mais sans les deux premiers termes de u. On peut prendre $v^{(0)} : [\![3; +\infty[\![\longrightarrow \mathbb{R}$ et $v_n^{(0)} = u_n$, pour $n \geq 3$. On peut aussi prendre $v^{(1)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v_n^{(1)} = u_{n+3}$. Peut-on construire une suite constituée de termes de u, dans l'ordre donné par les indices de u, sans une infinité des termes de u ? Oui, on peut par exemple retirer tous les termes d'incide pair. On peut prendre $v^{(2)} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v_n^{(2)} = u_{2n+1}$. A-t-on, dans tous les cas, construit une sous-suite de u au sens de la définition 3.31 ? Oui, comme on va le voir dans la proposition suivante.

Proposition 3.32. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite. Soit D_0 une partie infinie de $\mathbb{N}$ qui est incluse dans D.*
Pour toute partie infinie D' de $\mathbb{N}$, il existe une sous-suite $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ de u telle que l'ensemble des termes de v sont, dans le même ordre, ceux de la restriction de u à D_0, c'est-à-dire telle que

$$v(D') \;:=\; \{v_p\,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_n\,;\; n \in D_0\} \;=:\; u(D_0)$$

et telle qu'on ait

$$\Big(\forall\,(p;q) \in (D')^2\,,\quad (p \leq q) \implies \big(\exists\,(n;m) \in D_0^2\,;\quad (n \leq m)\ \textit{et}\ (u_n = v_p)\ \textit{et}\ (u_m = v_q)\big)\Big)\,. \tag{3.22}$$

Encore une fois, nous sommes confrontés à la difficulté signalée dans la remarque 3.3. Pour démontrer cette proposition, on va utiliser un résultat préliminaire et des propriétés des bijections rappelées dans le paragraphe 1.1 (voir aussi le paragraphe 9.1.1).

Lemme 3.33. *Soit D et D' deux parties infinies de $\mathbb{N}$. Il existe une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D$.*

Preuve : Voir celle de la proposition 9.5. □

Preuve de la proposition 3.32. : On applique le lemme 3.33 avec $(D; D')$ remplacé par $(D_0; D')$. Il existe donc une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D_0$. On pose $v = u \circ \varphi$. La suite v est bien définie car l'image $\varphi(D')$ de D' par φ est incluse dans D, le domaine de définition de u. Comme φ est une extractrice, v est une sous-suite de u, par la définition 3.31. De plus, comme φ est une bijection de D' sur D_0,

$$v(D') \;=\; \{v_p\,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_{\varphi(p)}\,;\; p \in D'\} \;=\; \{u_n\,;\; n \in \varphi(D')\} \;=\; \{u_n\,;\; n \in D_0\} \;=\; u(D_0)\,.$$

Soit maintenant $(p; q) \in (D')^2$ avec $p \leq q$. Soit $n = \varphi(p)$ et $m = \varphi(q)$. Comme φ est strictement croissante, elle est croissante donc $n \leq m$. De plus, par définition de v, on a $u_n = u_{\varphi(p)} = v_p$ et $u_m = u_{\varphi(q)} = v_q$. On a donc montré (3.22). □

3.4 Limite d'une suite infinie.

On introduit ici une notion de limite pour les suites infinies à valeurs dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Il s'agit, pour une suite infinie $u = (u_n)_{n\in D}$ de donner un sens précis au fait éventuel que les termes de la suite s'approchent d'une limite lorsque n devient grand.
On donne tout d'abord une définition générale de la limite d'une suite. Ensuite, on se penche plus en détails sur le cas des limites finies pour les suites réelles et complexes puis sur celui de limite infinie pour les suites réelles seulement. Pour ces deux types de limites, on donne diverses propriétés.

3.4.1 Définition générale de limite d'une suite infinie.

Commençons par introduire une définition générale. Pour les suites complexes, on n'envisagera que des limites finies (i.e. dans $\mathbb{C}$). Pour les suites réelles, on considèrera des limites finies (i.e. dans $\mathbb{R}$) mais aussi des limites infinies. Pour motiver ces dernières, considérons la suite $u = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. On voit que les termes deviennent de plus en plus grand et positif, quand n augmente. On a donc envie de dire que cette suite tend vers $+\infty$.

Étant donnée une suite infinie u, on définit ici la propriété intuitive que les termes de la suite u tendent vers une certaine limite ℓ lorsque n devient grand (lorsque "n tend vers l'infini"). De manière naturelle, on voudrait que cette définition soit telle que, si u a une limite, elle n'en a qu'une. D'autre part, il est raisonable d'imaginer des suites dont le comportement est "chaotique" et semble incompatible avec la notion intuitive de convergence vers une limite. On voudrait donc que la propriété d'avoir une limite ne soit pas commune à toutes les suites.

Pour établir cette définition, on va exploiter la notion de voisinage. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il s'agit de voisinages complexes d'un point. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on utilise les voisinages réels d'un point ainsi que les voisinages réels de $+\infty$ et $-\infty$. À ce sujet, les propositions 2.15 et 2.16 seront importantes.

Définition 3.34. *Soit D une partie infine de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On dit que ℓ est limite de u si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.23}$$

On rappelle que $\mathcal{V}_\ell$ désigne l'ensemble des voisinages de ℓ dans $\mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, ces voisinages sont définis dans la définition 2.3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$, ils sont définis dans la définition 2.7. Enfin, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, ils sont définis dans la définition 2.11.

On remarque que la proposition

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)$$

signifie que V contient tous les termes de la suite u à partir du rang N. La proposition (3.23) signifie donc que tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite u à partir d'un certain rang, dépendant du voisinage en question.

Dans ce cadre général (et un peu abstrait), on est en mesure de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.35. *Soit D une partie infine de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$.*
Si (3.23) est vraie et si (3.23), avec ℓ remplacée par ℓ', est vraie, alors $\ell = \ell'$.
Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ qui coïncide avec D sauf pour un nombre fini de termes, c'est-à-dire telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $D' \cap [\![p; +\infty[\![= D \cap [\![p; +\infty[\![$.
Si $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ est une suite, qui coïncide avec u à partir d'un certain rang, c'est-à-dire telle qu'il existe $N \in [\![p; +\infty[\![$ tel que

$$\forall n \in D \cap D'\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n = v_n)\big)\,, \tag{3.24}$$

alors on a l'équivalence :

$$\big(\ell \text{ est limite de } u\big) \iff \big(\ell \text{ est limite de } v\big)\,. \tag{3.25}$$

Preuve :

a). On montre la première propriété par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. D'après la proposition 2.16, il existe $(A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme ℓ est limite de u, il existe, d'après (3.23), un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de u à partir du rang N_1. Comme ℓ' est limite de

u, il existe, d'après (3.23), un $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que B contienne tous les termes de u à partir du rang N_2. Comme D est infinie, il existe $n \in D$ tel que $n \geq \max(N_1; N_2)$ (cf. proposition 1.10). Comme $n \geq N_1$, $u_n \in A$. Comme $n \geq N_2$, $u_n \in B$. D'où $u_n \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. On a montré que $\ell = \ell'$.

b). Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $D' \cap [\![p; +\infty[\![= D \cap [\![p; +\infty[\![$ et $N \in [\![p; +\infty[\![$ tel que (3.24) soit vraie. On montre l'équivalence (3.25).
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim u$ existe et vaut ℓ. On montre (3.23) avec u remplacée par v. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse (cf. (3.23) pour u), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que V contienne tous les termes de u à partir du rang N_1. Soit $N_2 = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D'$ avec $n \geq N_2$, on a $n \geq N \geq p$ donc $n \in D' \cap [\![p; +\infty[\![$. Par hypothèse, $D' \cap [\![p; +\infty[\![= D \cap [\![p; +\infty[\![$ donc $n \in D$. En utilisant d'abord le fait que $n \geq N$ puis le fait que $n \geq N_1$, on obtient $v_n = u_n \in V$. On a montré que $\ell = \lim v$.
$\Longleftarrow$) : Il suffit de reprendre l'argument précédent en échangeant les rôles de u et v. □

La deuxième propriété montre ce que l'intuition suggérait : comme on s'intéresse à une propriété pour "n grand", rien n'est changé si l'on modifie un nombre fini de termes de la suite considérée. On peut aussi dire que l'on ne change pas la nature d'une suite en changeant un nombre fini de ses termes.
Quant à la première propriété, elle permet de parler de "la" limite d'une suite, lorsqu'elle existe.

Définition 3.36. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$.*
S'il existe ℓ tel que (3.23) *est vraie, on dit que ℓ est la limite de u ou que u tend vers ℓ et on note*

$$\ell = \lim u \quad ou \quad \ell = \lim_n u_n \quad ou \quad \ell = \lim_{n \to +\infty} u_n .$$

On dit que u est convergente, si elle admet une limite dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, on dit aussi que u converge vers ℓ et que u est convergente vers ℓ.
Lorsque u n'admet pas de limite dans $\mathbb{K}$, on dit que u est divergente.

Attention : Il est important d'insister sur le fait qu'une suite peut ne pas avoir de limite. La proposition (3.23) peut être fausse pour toutes les limites envisageables. C'est le cas, comme on le vérifie ci-dessous, de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est pourquoi on ne parlera de la limite d'une suite qu'après avoir démontré (ou supposé) son existence. Lorsqu'on demande d'étudier la nature d'une suite ou l'éventuelle convergence d'une suite, on demande de répondre à la question : "La suite en question admet-elle une limite ?". Par abus, on dira souvent "Étudier la convergence de la suite ... " ou "Étudier la limite de la suite" (C'est un abus lorsque la suite n'a pas de limite puisque, dans ce cas, cela n'a pas de sens de parler de la limite de la suite dans la consigne). Cela signifie en fait de déterminer si la suite en question a une limite et, éventuellement, de la calculer.

On verra plus loin plusieurs exemples de suites ayant une limite. Donnons ici un contre-exemple.
Soit $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ considérée comme suite réelle. Son comportement oscillant laisse penser qu'elle n'a pas de limite. Elle semble ne pas se concentrer près d'une valeur, ni devenir "très positive", ni devenir "très négative". Montrons par l'absurde qu'elle n'a pas de limite.
Supposons que la limite $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ de x existe. Considérons la disjonction suivante de cas.
Cas où $\ell \neq 1$: Par la proposition 2.15, il existe un voisinage réel A de ℓ et un voisinage réel B de 1 tel que $A \cap B = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de la suite x à partir du rang N. Pour $n = 2N$, $x_n = 1$ donc $x_n \in B$. Comme $n = 2N \geq N$, $x_n \in A$. D'où $x_n \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
Cas où $\ell = 1$: Par la proposition 2.15, il existe un voisinage A de 1 et un voisinage B de -1 tel que $A \cap B = \emptyset$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que A contienne tous les termes de la suite x à partir du rang N. Pour $n = 2N + 1$, $x_n = -1$ donc $x_n \in B$. Comme $n = 2N + 1 \geq N$, $x_n \in A$. D'où $x_n \in A \cap B$, ce qui contredit $A \cap B = \emptyset$.
On a montré la

Proposition 3.37. *La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.*

Il se trouve que l'on peut reformuler (3.23) en utilisant les voisinages dans D de $+\infty$ (cf. défintion 2.13). Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On rappelle que, pour toute partie A de D, l'image de A

par u est l'ensemble $u(A) := \{u_n; n \in A\}$, et que, pour toute partie B de $\mathbb{K}$, l'image réciproque de B par u est l'ensemble $u^{-1}(B) := \{n \in D; u_n \in B\}$.

Proposition 3.38. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition* (3.23) *est équivalente à*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists W \in \mathcal{V}^D_{+\infty}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \in W) \implies (u_n \in V)\big) \tag{3.26}$$

et aussi à

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad u^{-1}(V) \in \mathcal{V}^D_{+\infty}\,. \tag{3.27}$$

Preuve : On montre successivement les implications (3.23) $\implies$ (3.26) $\implies$ (3.27) $\implies$ (3.23).
(3.23) $\implies$ (3.26) : On suppose (3.23) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,.$$

Soit $W := D \cap [\![N; +\infty[\![$. C'est un voisinage de $+\infty$ dans D. De plus, pour $n \in W$, on a $n \geq N$ donc, par la propriété précédente, $u_n \in V$. On a montré (3.26).
(3.26) $\implies$ (3.27) : On suppose (3.26) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage W de $+\infty$ dans D tel que

$$\forall n \in D\,, \quad \big((n \in W) \implies (u_n \in V)\big)\,.$$

On montre que $W \subset u^{-1}(V)$. Soit $n \in W$. Par la propriété précédente, $u_n \in V$ donc, par définition de $u^{-1}(V)$, $n \in u^{-1}(V)$. On a donc bien $W \subset u^{-1}(V)$. Comme W est un voisinage de $+\infty$ dans D, $u^{-1}(V)$ en est aussi un (cf. proposition 2.15 et remarque 2.17). On a montré (3.27).
(3.27) $\implies$ (3.23) : On suppose (3.27) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, $u^{-1}(V)$ est un voisinage de $+\infty$ dans D. Par définition, il existe un voisinage B de $+\infty$ dans $\mathbb{N}$ tel que $u^{-1}(V) = B \cap D$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $]\!]a; +\infty[\![\subset B$. Soit $N = a + 1$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $n \in B$ donc $n \in u^{-1}(V)$ c'est-à-dire $u_n \in V$. On a montré (3.23). □

3.4.2 Limite finie.

On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. On se concentre, dans ce paragraphe, sur les limites finies (i.e. celles appartenant à $\mathbb{K}$). On traite en parallèle les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Rappelons la définition 3.34 dans ce cas :

Définition 3.39. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On dit que ℓ est limite de u si tout voisinage de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, i.e. si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.28}$$

Il est commode d'introduire la reformulation suivante de la proposition (3.28).

Proposition 3.40. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. La proposition* (3.28) *est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (|u_n - \ell| < \epsilon)\big)\,. \tag{3.29}$$

Preuve : Pour $\epsilon > 0$ et $n \in D$, la proposition $(|u_n - \ell| < \epsilon)$ est équivalente à $(u_n \in D(\ell; \epsilon[)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et à $(u_n \in I(\ell; \epsilon[)$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Traitons d'abord le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
(3.28) $\implies$ (3.29) : on suppose que (3.28) est vraie. Soit $\epsilon > 0$. On applique (3.28) au voisinage $V = D(\ell; \epsilon[$ de ℓ. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que ce V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \in D(\ell; \epsilon[$ donc $|u_n - \ell| < \epsilon$. On a montré (3.29).

(3.29) $\Longrightarrow$ (3.28) : on suppose (3.29) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$. On applique (3.29) à cet ϵ. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon$, c'est-à-dire $u_n \in D(\ell;\epsilon[$. Comme $D(\ell;\epsilon[\subset V$, on a donc, pour $n \in D$ et $n \geq N$, $u_n \in V$. On a montré (3.28).
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut reprendre les arguments précédents en remplaçant chaque disque $D(\ell;\epsilon[$ par l'intervalle centré $I(\ell;\epsilon[$. □

Voyons maintenant quelques exemples, en commençant par deux importants.

Proposition 3.41. *Soit $c \in \mathbb{K}$, D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ la suite constante égale à c. Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1/n$. Les limites $\lim u$ et $\lim v$ existent et valent c et 0, respectivement.*

Preuve : On montre que $\lim u$ existe et vaut c en utilisant (3.29) avec $\ell = c$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $N = 2023$. Pour $n \in D$ et $n \geq N$, on a $|u_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$.
On a bien montré (3.29) avec $\ell = c$.
On montre que $\lim v$ existe et vaut 0 en utilisant (3.29) avec $\ell = 0$.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (1/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (1/\epsilon) + 1$ donc $N > 1/\epsilon$. Donc $\epsilon > 1/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $0 < 1/n \leq 1/N < \epsilon$ donc $|1/n| < \epsilon$. On a montré que $\lim u$ existe et vaut 0. □

Dans le premier cas, on devine que la limite sera c. On remarque que, dans la première preuve, on aurait pu prendre $N = 1$ ou même $N = 0$.
Dans le second cas, en considérant les premiers termes de la suite v, on sent que la limite sera 0. Dans la seconde preuve, on aurait pu choisir $N = E(1/\epsilon) + 1$, où E est la fonction partie entière (cf. proposition 9.8).

Voyons d'autres exemples. Soit $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $v_n = 2i/n$. Là aussi, on devine que 0 est limite de v. On remarque que, pour tout $n > 0$, $|v_n| = 2/n$.
Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (2/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (2/\epsilon) + 1$ donc $N > 2/\epsilon$. Donc $\epsilon > 2/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $|v_n - 0| = |v_n| = 2/n \leq 2/N < \epsilon$. Donc $\lim v = 0$.
Soit $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$w_n \;=\; \frac{3}{1+\frac{1}{n}}\,.$$

On devine que w tend vers 3. Montrons-le.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on remarque que

$$|w_n - 3| \;=\; 3\cdot\left|\frac{1}{1+\frac{1}{n}} - 1\right| \;=\; 3\cdot\left|\frac{1-(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}}\right| \;=\; 3\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \;=\; \frac{3}{n+1}\,.$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = (3/\epsilon) + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq (3/\epsilon) + 1$ donc $N > 3/\epsilon$. Donc $\epsilon > 3/N$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a, grâce au calcul précédent, $|w_n - 3| = 3/(n+1) \leq 3/N < \epsilon$. Donc $\lim w = 3$.

3.4.3 Notions de limite infinie propres aux suites réelles.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux limites infinies de suites réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On réécrit la définition 3.34 dans ce cadre.

Définition 3.42. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$. On dit que ℓ est limite de u si tout voisinage réel de ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, i.e. si*

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,. \tag{3.30}$$

Attention : D'après la définition 3.36, on dit qu'une suite réelle, qui a une limite, converge uniquement si cette limite est un réel. Une suite réelle qui tend vers $+\infty$ diverge donc. Une suite réelle qui tend vers $-\infty$ diverge aussi.

Comme pour les limites finies, on dispose d'une autre formulation de la définition d'une limite infinie.

Proposition 3.43. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*
Lorsque $\ell = +\infty$, la proposition (3.30) *est équivalente à*

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n > L)\big)\,. \tag{3.31}$$

Lorsque $\ell = -\infty$, la proposition (3.30) *est équivalente à*

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n < -L)\big)\,. \tag{3.32}$$

Preuve : On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
(3.30) $\implies$ (3.31) : On suppose (3.30) vraie. Soit $L > 0$. On applique la propriété (3.30) au voisinage $V =]L; +\infty[$ de $+\infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc montré (3.31).
(3.31) $\implies$ (3.30) : On suppose (3.31) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]a; +\infty[\subset V$. Comme $|a| + 1 \geq |a| \geq a$, on a, en posant $L = |a| + 1 > 0$, $]L; +\infty[\subset]a; +\infty[\subset V$. En appliquant (3.31) à ce L, on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de u sont dans $]L; +\infty[$ à partir du rang N. Donc, comme $]L; +\infty[\subset V$, V contient tous les termes de u à partir du rang N. On a montré (3.30). Passons au cas où $\ell = -\infty$.
(3.30) $\implies$ (3.32) : On suppose (3.30) vraie. Soit $L > 0$. On applique la propriété (3.30) au voisinage $V =]-\infty; -L[$ de $-\infty$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que, V contienne tous les termes de u à partir du rang N. On a donc montré (3.32).
(3.32) $\implies$ (3.30) : On suppose (3.32) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty; a[\subset V$. Comme $|a|+1 \geq |a| \geq -a$, on a en posant $L = |a|+1 > 0$, $-L < a$ donc $]-\infty; -L[\subset]-\infty; a[$. En appliquant (3.31) à ce L, on trouve un $N \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de u sont dans $]-\infty; -L[$ à partir du rang N. Donc, comme $]-\infty; -L[\subset]-\infty; a[\subset V$, V contient tous les termes de u à partir du rang N. On a montré (3.30). □

Voyons quelques exemples, en commençant par un très important.

Proposition 3.44. *On considère la suite $id : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ qui, à $n \in \mathbb{N}$ associe $id(n) = n$. Autrement dit, $id = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que $\lim id = \lim\limits_{n\to+\infty} n$ existe et vaut $+\infty$.*

Preuve : On montre la proposition (3.31) avec u remplacée par id.
Soit $L > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = L + 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq L + 1$ donc $N > L$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $n \geq N > L$ soit $n > L$. On a montré (3.31). □

Montrons maintenant que $-\infty = \lim\limits_{n}(-n^2)$ en utilisant (3.32).
Soit $L > 0$. D'après la propriété (1.4) appliquée à $x = \sqrt{L+1}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq \sqrt{L+1}$. Comme $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante (cf. proposition 9.10), $\sqrt{L+1} > \sqrt{L}$ d'où $N > \sqrt{L}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $n^2 \geq N^2 > L$ donc $-n^2 < -L$. D'après (3.32), on a démontré la propriété souhaitée.

3.5 Propriétés générales de la limite d'une suite.

On se place de nouveau dans le cas général où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on établit plusieurs propriétés sur les limites finies de suite. On rappelle que l'on a défini le module d'une suite complexe et la valeur absolue d'une suite réelle dans la définition 3.20.

Proposition 3.45. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On a*

$$\left(\lim u \,=\, \ell\right) \iff \left(\lim_n |u_n \,-\, \ell| \,=\, 0\right). \tag{3.33}$$

En particulier, quand $\ell = 0$, on a

$$\left(\lim u \,=\, 0\right) \iff \left(\lim |u| \,=\, 0\right). \tag{3.34}$$

De plus, on a

$$\left(\lim u \,=\, \ell\right) \implies \left(\lim |u| \,=\, |\ell|\right). \tag{3.35}$$

Enfin, on suppose qu'il existe une suite réelle $w : D \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tendant vers 0 et $N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \in D\,, \quad \left((n \,\geq\, N) \implies \left(|u_n \,-\, \ell| \,\leq\, w_n\right)\right). \tag{3.36}$$

Alors la suite u converge vers ℓ. ("Théorème des gendarmes".)

Attention : il faut lire "$(\lim u \,=\, \ell)$" comme suit : "la limite de u existe et vaut ℓ".
La réciproque de (3.35) est fausse comme le montre le contre-exemple suivant : soit $u = (1)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $|u| = u$ est constante égale à 1, on a $\lim u = 1 = \lim |u|$. On a aussi $\lim |u| = |-1|$. Si cette réciproque était vraie, on aurait alors $\lim u = -1$. Contradiction.
En raison d'une similitude avec une propriété, propre aux suites réelles, que l'on verra plus loin (cf. proposition 3.48 et (3.40)), il est légitime de qualifier la dernière propriété de la proposition 3.45 de "propriété des gendarmes" ou "théorème des gendarmes".
Donnons tout de suite deux exemples d'application de cette proposition 3.45. On considère les suites $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n/n$ et $v_n = \sin(n)/n$ (où $\sin(\cdot)$ désigne la fonction sinus, cf. définition 8.20). On peut deviner que ces suites tendent vers 0. Vérifions-le à l'aide la proposition 3.45.
On remarque que la suite $|u|$ est en fait la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, qui tend vers 0 d'après la proposition 3.41. Le membre de droite de l'équivalence (3.34) est vrai donc, d'après l'équivalence, le membre de gauche est aussi vrai. On a montré que u tend vers 0.
En utilisant le fait que la fonction sinus est minorée par -1 et majorée par 1 (cf. proposition 8.21), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sin(n)| \leq 1$ donc $|v_n - 0| \leq |u_n|$. On a donc la propriété (3.36) avec u remplacée par v, w remplacée par $|u|$ et ℓ remplacée par 0, pour $N = 1$. Comme $|u|$ tend vers 0, le théorème des gendarmes de la proposition 3.45 assure que v tend vers $\ell = 0$.

Preuve de la proposition 3.45. :

a). On montre d'abord la dernière propriété. Sous les hypothèses de son énoncé, on montre que u tend vers ℓ en utilisant (3.29). Soit $\epsilon > 0$. Comme w tend vers 0, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq w_n < \epsilon$ soit vraie à partir du rang N_1 (cf. (3.29) avec u remplacée par w et ℓ remplacée par 0). Pour $n \in D$ avec $n \geq \max(N; N_1)$, on a $n \geq N$ donc, par (3.36),

$$\left|u_n \,-\, \ell\right| \,\leq\, w_n \,<\, \epsilon$$

car $n \geq N_1$. On a montré $\lim u = \ell$.

b). On remarque que, pour tout $n \in D$,

$$\left||u_n \,-\, \ell| \,-\, 0\right| \,=\, |u_n \,-\, \ell|$$

donc (3.29) est identique à (3.29) avec u remplacée par $|u - \ell|$ et ℓ remplacé par 0. Ceci prouve l'équivalence (3.33).

c). Montrons (3.35). On suppose que $\lim u = \ell$. Par (2.6), on a, pour tout $n \in D$,

$$\left||u_n| \,-\, |\ell|\right| \,\leq\, |u_n \,-\, \ell|\,.$$

Par l'hypothèse et (3.33), la suite $w = |u - \ell|$ tend vers 0. D'après l'inégalité précédente, on peut appliquer le théorème des gendarmes à $|u|$ (cf. a)), qui donne $\lim |u| = |\ell|$. □

On montre maintenant que la convergence des suites est préservée par certaines opérations sur les suites.

Proposition 3.46. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(\ell; \ell') \in \mathbb{K}^2$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Alors les limites suivantes existent et on a*

$$\lim(u+v) \;=\; \ell + \ell' \,, \quad \lim(\lambda u) \;=\; \lambda \cdot \ell \,, \quad \lim(uv) \;=\; \ell \cdot \ell' \,.$$

Si, de plus, $\ell \neq 0$, alors la suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $1/\ell$, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \neq 0$ et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} \;=\; \frac{1}{\ell} \,.$$

Preuve :

a). On montre que $\ell + \ell'$ est limite de $u + v$, c'est-à-dire la proposition (3.29) avec u remplacée par $u + v$ et ℓ remplacé par $\ell + \ell'$.
On remarque tout d'abord que, pour tout $n \in D$,

$$\big|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\big| \;=\; \big|(u_n - \ell) + (v_n - \ell')\big| \;\leq\; |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \,, \tag{3.37}$$

d'après l'inégalité triangulaire (cf. (2.5) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et (2.11) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$). Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < (\epsilon/2)$. De même, comme $\lim v = \ell'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_2$, on ait $|v_n - \ell'| < (\epsilon/2)$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant (3.37) et le fait que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$,

$$\big|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\big| \;\leq\; |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon \,.$$

b). On montre maintenant que $\ell \cdot \ell'$ est limite de $u \cdot v$, c'est-à-dire la proposition (3.29) avec u remplacée par $u \cdot v$ et ℓ remplacé par $\ell \cdot \ell'$.
On écrit tout d'abord, pour tout $n \in D$,

$$(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell') \;=\; u_n \cdot (v_n - \ell') + (u_n - \ell) \cdot \ell' \,.$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\big|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')\big| \;\leq\; |u_n| \cdot \big|v_n - \ell'\big| + |u_n - \ell| \cdot |\ell'| \,. \tag{3.38}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit

$$\epsilon' \;\in\; \left]0\,;\, \min\left(1; \frac{\epsilon}{|\ell| + |\ell'| + 1}\right)\right] \,.$$

Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon'$. De même, comme $\lim v = \ell'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_2$, on ait $|v_n - \ell'| < \epsilon'$. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant le fait que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, $|v_n - \ell'| < \epsilon'$, $|u_n - \ell| < \epsilon'$ et donc aussi

$$|u_n| \;=\; \big|(u_n - \ell) + \ell\big| \;\leq\; |u_n - \ell| + |\ell| \;<\; \epsilon' + |\ell| \,.$$

Donc, d'après (3.38) et le choix de ϵ',

$$\big|(u_n \cdot v_n) - (\ell \cdot \ell')\big| \;<\; \big(\epsilon' + |\ell|\big) \cdot \epsilon' + \epsilon'|\ell'| \;\leq\; \epsilon' \cdot \big(1 + |\ell| + |\ell'|\big) \;\leq\; \epsilon \,.$$

On a montré $\lim(uv) = \ell\ell'$.

c). En remplaçant la suite v par la suite constante égale à λ, qui converge vers λ, dans le résultat précédent, on obtient $\lim(\lambda u) = \lambda\ell$.

d). On suppose maintenant que $\ell \neq 0$. Par la proposition 2.16, il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de 0 tels que $A \cap B = \emptyset$. Comme $\lim u = \ell$, le voisinage A contient tout les termes de la suite u à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Comme $A \cap B = \emptyset$, ces termes n'appartiennent pas à B donc ne peuvent être nuls, car $0 \in B$. Soit $D_0 = D \cap [\![N_0; +\infty[\![$. La suite

$$x \;=\; (1/u_n)_{n \in D_0}$$

est donc bien définie. Montrons qu'elle tend vers $1/\ell$, via la version appropriée de (3.29).
Comme B est un voisinage de 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que le disque $D(0; \delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'intervalle $I(0; \delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $n \in D_0$, on a $u_n \notin B$, donc $u_n \notin D(0; \delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $u_n \notin I(0; \delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $|u_n| \geq \delta_0$. De plus, pour $n \in D_0$,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \;=\; \frac{\ell - u_n}{u_n \cdot \ell}$$

donc

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \;=\; \frac{|\ell - u_n|}{|u_n| \cdot |\ell|} \;\leq\; \frac{|u_n - \ell|}{\delta_0 \cdot |\ell|}\,. \tag{3.39}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $\epsilon' \in]0;\, \delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon]$, ce qui est possible car $\delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon > 0$. Comme $\lim u = \ell$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \in D$ et $n \geq N_1$, on ait $|u_n - \ell| < \epsilon'$. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D_0$ et $n \geq N$, on a $n \geq N_1$ et, d'après (3.39),

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \;<\; \frac{\epsilon'}{\delta_0 \cdot |\ell|} \;\leq\; \epsilon\,.$$

On a montré que $\lim(1/u) = 1/\ell$. □

Considérons un exemple simple d'application de cette proposition 3.46 d'opérations sur les limites finies. Soit $x : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n \;=\; \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n}}\,.$$

On devine que x va tendre vers 1/3. Rédigeons une preuve de ce fait en utilisant plusieurs propriétés de la proposition 3.46. Dans la pratique, la rédaction complète de la preuve serait trop fastidieuse. On en donne un résumé sans omettre les points importants.
On a vu plus haut que $\lim_n(1/n)$ existe et vaut 0 (cf. proposition 3.41). Donc, par produit, $\lim_n(1/n^2)$ existe et vaut 0. Comme une suite constante tend vers sa valeur constante (cf. proposition 3.41), le numérateur de l'expression de x_n tend, par somme, vers $1 + 0 = 1$. Le même argument montre que le dénominateur de l'expression de x_n tend, par somme, vers $3 + 0 = 3$. Comme $3 \neq 0$, on a, par inversion,

$$\lim_n \frac{1}{3 + \frac{1}{n}} \;=\; \frac{1}{3}\,.$$

Enfin, par produit, $\lim_n x_n$ existe et vaut 1/3.
La phrase "Donc, par produit, $\lim_n(1/n^2)$ existe et vaut 0." est un résumé du raisonnement complet suivant :
Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ la suite définie par, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1/n$. On vient de rappeler que $\lim u$ existe et vaut 0. On peut donc appliquer la proposition 3.46 avec $v = u$ et $\ell = \ell' = 0 \in \mathbb{R}$. Elle nous donne que $\lim uv = \ell\ell'$ c'est-à-dire que $\lim_n(1/n^2)$ existe et vaut $0 \cdot 0 = 0$.
La phrase "Comme une suite constante tend vers sa valeur constante (cf. proposition 3.41), le numérateur de l'expression de x_n tend, par somme, vers $1 + 0 = 1$." est un résumé du raisonnement complet suivant : Comme $\lim_n 1 = 1$ (cf. proposition 3.41 avec $D = \mathbb{N}^*$) et $\lim_n(1/n^2)$ existe et vaut 0, on peut appliquer la proposition 3.46 avec $u = (1)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $v = (1/n^2)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\ell = 1$ et $\ell' = 0$. Elle nous donne que $\lim(u+v) = \ell + \ell'$ c'est-à-dire que $\lim_n(1 + (1/n^2))$ existe et vaut 1.

Par abus, on oublie souvent de rappeler qu'une suite constante tend vers sa valeur constante (cf. proposition 3.41).
Un autre abus est fréquent. Il consiste, par exemple, à affirmer que, d'après la proposition 3.41, la suite $(1/n)_{n\in[\![4;+\infty[\![}$ tend vers 0. Expliquons pourquoi ceci est justifié.
Dans cette proposition 3.41, on a montré que la suite $(1/n)_{n\in[\![1;+\infty[\![}$ tend vers 0. En posant $D = [\![1;+\infty[\![$, $D' = [\![4;+\infty[\![$, on a $D \cap [\![4;+\infty[\![= [\![4;+\infty[\![= D' = D' \cap [\![4;+\infty[\![$. En posant $u = (1/n)_{n\in[\![1;+\infty[\![}$ et $v = (1/n)_{n\in[\![4;+\infty[\![}$, on peut appliquer la proposition 3.35 (avec $N = p = 4$ et $\ell = 0$) qui nous donne l'équivalence (3.25). Comme le membre de gauche de cette équivalence est vrai (cf. proposition 3.41), cette équivalence prouve que le membre de droite est aussi vrai. Donc $v = (1/n)_{n\in[\![4;+\infty[\![}$ tend vers 0.

Pour terminer ce paragraphe, donnons un résultat commode sur la convergence des suites complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'on a défini les parties réelle et imaginaire d'une suite complexe dans la définition 3.20.
On veut étudier la limite de la suite $u = (3 + i/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On voit que $\Re(u)$ est la suite réelle constante égale à 3 sur $\mathbb{N}^*$. Elle converge donc vers 3. Quant à $\Im(u)$, c'est la suite réelle $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on a étudiée plus haut. On a vu qu'elle converge vers 0. Que peut-on dire sur la convergence de la suite u ? La proposition 3.47 ci-dessous permet de répondre.

Proposition 3.47. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On a l'équivalence*

$$\lim u \;=\; \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(\big(\lim \Re(u) \;=\; \Re(\ell)\big) \quad et \quad \big(\lim \Im(u) \;=\; \Im(\ell)\big)\Big)\,.$$

Preuve : On procède par double implication.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim u = \ell$. Pour tout $n \in D$, on a, d'après (2.7),

$$\big|(\Re(u))_n - \Re(\ell)\big| \;=\; \big|\Re(u_n - \ell)\big| \;\leq\; |u_n - \ell| \quad \text{et} \quad \big|(\Im(u))_n - \Im(\ell)\big| \;=\; \big|\Im(u_n - \ell)\big| \;\leq\; |u_n - \ell|\,.$$

En appliquant deux fois la propriété des gendarmes de la proposition 3.45 avec $v_n = |u_n - \ell|$, on en déduit que $\lim \Re(u)$ existe et vaut $\Re(\ell)$ et que $\lim \Im(u)$ existe et vaut $\Im(\ell)$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $\Re(u)$ converge vers $\Re(\ell)$ et que $\Im(u)$ converge vers $\Im(\ell)$. Par la proposition 3.46 (avec u remplacée par $\Im(u)$ et $\lambda = i$), $i\Im(u)$ converge vers $i\Im(\ell)$. Par la proposition 3.46 (avec u remplacée par $\Re(u)$ et v remplacée par $i\Im(u)$), $u = \Re(u) + i\Im(u)$ converge vers $\Re(\ell) + i\Im(\ell) = \ell$. □

Exemple d'application : On s'intéresse maintenant à la suite $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $n > 0$, $v_n = (1/(n+1)) + ni$. On remarque que $\Im(v) = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a vu plus haut que $\lim \Im(v) = +\infty$. Donc $\Im(v)$ n'a pas de limite finie. Par la proposition 3.47, la limite de v n'existe pas puisque la proposition de droite de l'équivalence est fausse pour tout $\ell \in \mathbb{C}$.

3.6 Propriétés de limite propres aux suites réelles.

On revient dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on établit, pour les suites réelles, un pendant de la proposition 3.46 pour des limites infinies et certaines propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

On commence par des propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On rappelle la **convention** que l'on a prise au paragraphe 1.2 : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 3.48. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$.*

1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \ell$. Alors u est strictement supérieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n > b$.*
2. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Alors u est strictement inférieure à b à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n < b$.*

3. *Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors u est bornée.*
4. *On suppose que u est inférieure à v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.*
5. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est encadrée par u et v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq x_n \leq v_n$, et que $\ell = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell = \ell'$.*
6. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée par u à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $u_n \leq x_n$, et que $\ell = +\infty$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell = +\infty$.*
7. *On suppose qu'une suite réelle $x : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée par v à partir d'un certain rang, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D$ avec $n \geq N$, $x_n \leq v_n$, et que $\ell' = -\infty$. Alors $\lim x$ existe et vaut $\ell' = -\infty$.*

Avant de démontrer cette proposition, faisons quelques commentaires.
On ne peut appliquer la proposition 3.48 à u (ou à u et v) que si l'on sait déjà que u a une limite (ou que u et v ont une limite).
Grâce à la convention précédente, les propriétés ont bien un sens lorsque une (les) limite(s) sont infinie(s). De plus, elles sont encore vraies.
La propriété 1 donne, en particulier, que, si u tend vers une limite strictement positive (y compris $+\infty$), alors u est strictement positive à partir d'un certain rang.
La propriété 2 donne, en particulier, que, si u tend vers une limite strictement négative (y compris $-\infty$), alors u est strictement négative à partir d'un certain rang.
La propriété 4 s'interprète comme un passage à la limite $n \to \infty$ dans les inégalités $u_n \leq v_n$, qui sont vraies à partir d'un certain rang. Si l'on suppose que $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, on a seulement $\ell \leq \ell'$, en général comme le montre le contre-exemple suivant :
Soit $u = (0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $v = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0 < v_n$. On a bien l'existence de $\lim u$ et de $\lim v$ mais $\lim u = 0 = \lim v$. La proposition $(\lim u < \lim v)$ est donc fausse.
On peut reformuler ceci en disant que, quand on passe à la limite $n \to \infty$ dans des inégalités strictes, on tombe sur une inégalité large.
On utilise souvent cette propriété 4 lorsque l'une des suites est constante. Par exemple, si l'on considère une suite réelle positive qui converge alors sa limite est positive (en appliquant la propriété 4 avec u constante égale à 0).
La propriété 5 est appelée "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes". Les suites u et v jouent le rôle de gendarme. On remarque que, dans le cas où $u = -v$ et $\ell = \ell' = 0$, on a, pour $n \in D$, les équivalences

$$(u_n \leq x_n \leq v_n) \iff (-v_n \leq x_n \leq v_n) \iff (|x_n| \leq v_n)\,. \tag{3.40}$$

Ceci explique la terminologie utilisée dans la proposition 3.45.
En raison de leur proximité avec la propriété 5, on peut aussi désigner par "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes" les propriétés 6 et 7, même s'il n'y a qu'un seul "gendarme".

Preuve de la proposition 3.48 :

1. Soit $V :=]b; +\infty[$. On vérifie que c'est un voisinage de ℓ.
   Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Par hypothèse $(\ell - b)/2 > 0$ donc V est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $I(\ell; (\ell - b)/2[)$ centré en ℓ.
   Cas où $\ell = +\infty$: L'ensemble V est un voisinage de $+\infty$.
   Comme $\ell = \lim u$, V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in V$, ce qui donne $u_n > b$.
2. Soit $V :=]-\infty; b[$. On vérifie que c'est un voisinage de ℓ.
   Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Par hypothèse $(b - \ell)/2 > 0$ donc V est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $I(\ell; (b - \ell)/2[)$ centré en ℓ.
   Cas où $\ell = -\infty$: L'ensemble V est un voisinage de $-\infty$.
   Comme $\ell = \lim u$, V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Donc, pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in V$, ce qui donne $u_n < b$.

3. Comme $\ell \in \mathbb{R}$, u est majorée par $\ell + 1$ à partir d'un certain rang, d'après 1. D'après la proposition 3.26, cela prouve que u est majorée. En utilisant 2 avec $b = \ell - 1$, on obtient que u est minorée par $\ell + 1$ à partir d'un certain rang, donc aussi minorée, en utilisant encore la proposition 3.26. u est donc bornée.
4. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. On montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $V :=]b; +\infty[$ est un voisinage de ℓ et $V' :=]-\infty; b[$ est un voisinage de ℓ'.
   Cas où $\ell = +\infty$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell'$. V est un voisinage de $\ell = +\infty$. Si $\ell' = -\infty$, V' est un voisinage de ℓ'. Si $\ell' \in \mathbb{R}$, on a, comme $b > \ell'$, $b - \ell' > 0$ et V' contient l'intervalle $I(\ell'; b - \ell'[$ centré en ℓ', donc V' est un voisinage de ℓ'.
   Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\ell > b > \ell'$. Comme précédemment, V' est un voisinage de ℓ'. On a $\ell - b > 0$ et V contient l'intervalle $I(\ell; \ell - b[$ centré en ℓ, donc V est un voisinage de ℓ.
   Comme $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$, il existe $(N_1; N_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que, V contient les termes de u à partir du rang N_1 et V' contient les termes de v à partir du rang N_2. Soit $n \in D$ tel que $n \geq \max(N; N_1; N_2)$. On a donc $u_n \leq v_n$, car $n \geq N$, $u_n \in V$, car $n \geq N_1$ et $v_n \in V'$, car $n \geq N_2$. Donc $v_n < b < u_n$ et $u_n \leq v_n$, contradiction. Conclusion : $\ell \leq \ell'$.
5. Lorsque $\ell = +\infty$, la propriété est une conséquence de 6. Lorsque $\ell = -\infty$, la propriété est une conséquence de 7. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. On montre (3.29) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \lim u$, $I(\ell; \epsilon[$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\ell = \lim v$, $I(\ell; \epsilon[$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N' = \max(N; N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$, $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$, en utilisant la proposition 2.5,
   $$\ell - \epsilon < u_n \leq x_n \leq v_n < \ell + \epsilon \,,$$
   c'est-à-dire $x_n \in I(\ell; \epsilon[$. On a montré (3.29) avec u remplacée par x, donc $\lim x$ existe et vaut ℓ.
6. On montre (3.31) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Soit $N' = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$ et $n \geq N_1$,
   $$x_n \geq u_n > L \,.$$
   Donc $\lim x$ existe et vaut $+\infty$.
7. On montre (3.32) avec u remplacée par x et N remplacé par N' (N étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $L > 0$. Comme $\lim v = -\infty$, le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_1. Soit $N' = \max(N; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N'$, on a, comme $n \geq N$ et $n \geq N_1$,
   $$x_n \leq v_n < -L \,.$$
   Donc $\lim x$ existe et vaut $+\infty$. □

Maintenant, on reprend la situation de la proposition 3.46 mais pour des suites réelles et seulement lorsque au moins l'une des limites ℓ et ℓ' est infinie.

Proposition 3.49. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim u$ et $\ell' = \lim v$. Alors, dans les cas suivants, les limites suivantes existent et on a :*

a). Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $\lim(u + v) = \ell$;
b). Si $\ell' = \ell$ alors $\lim(u + v) = \ell$;
c). Si $\lambda > 0$ alors $\lim(\lambda u) = \ell$ et si $\lambda < 0$ alors $\lim(\lambda u) = -\ell$;
d). Si $\lambda = 0$ alors $\lim(\lambda u) = 0$;
e). Si $\ell' > 0$ alors $\lim(uv) = \ell$ et si $\ell' < 0$ alors $\lim(uv) = -\ell$;
f). La suite $1/u$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers 0, i.e. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in D \cap [\![N; +\infty[\![$, $u_n \neq 0$ et $\lim(1/u) = 0$.

g). Si $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle, à termes strictement positifs à partir d'un certain rang, qui converge vers 0 alors $1/w$ est bien définie à partir de ce rang et $\lim(1/w) = +\infty$.

h). Si $w : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une suite réelle, à termes strictement négatifs à partir d'un certain rang, qui converge vers 0 alors $1/w$ est bien définie à partir de ce rang et $\lim(1/w) = -\infty$.

Quelques précisions s'imposent.
Pour $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, $-\ell$ signifie $+\infty$ si $\ell = -\infty$ et $-\ell$ signifie $-\infty$ si $\ell = +\infty$.
Dans le cas où $\ell' = -\ell$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$, le résultat ne dit rien sur la suite $(u + v)$. La raison en est que tout peut se passer : On peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = 0$. Plus généralement, étant donné $m \in \mathbb{R}$, on peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = m$. On peut aussi construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = +\infty$ ("u l'emporte sur v"). On peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $\lim(u + v) = -\infty$ ("v l'emporte sur u"). Enfin, on peut construire des suites réelles u et v telles que $\lim u = +\infty$, $\lim v = -\infty$ et $(u + v)$ n'a pas de limite. C'est pourquoi l'on qualifie cette situation ($\ell' = -\ell$ avec $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ pour $(u + v)$) comme indéterminée.
Une autre situation indéterminée est la suivante : $\ell' = 0$ et $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ pour uv. Là encore, on peut donner des exemples de suites réelles u et v telles que leur produit tend vers un nombre réel non nul, ou bien telles que leur produit tend vers 0, ou bien telles que leur produit tend vers ℓ, ou bien telles que leur produit tend vers $-\ell$, ou encore telles que leur produit n'a pas de limite.
En utilisant le théorème des gendarmes, on peut montrer que la suite $w = ((-1)^n/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Comme tous les termes de w sont non nuls, $(1/w)$ est bien définie mais on peut vérifier qu'elle n'a pas de limite (cf. proposition 3.57). D'après le point g) de la proposition 3.49, w ne peut être à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. D'après le point h) de la proposition 3.49, w ne peut être à termes strictement négatifs à partir d'un certain rang. Il est facile de retrouver cela directement : pour $N \in \mathbb{N}$ donné, on peut trouver un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq N$ et $w_n < 0$ (il suffit de prendre n impair et supérieur à N) et on peut trouver un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p \geq N$ et $w_p > 0$ (il suffit de prendre p pair et supérieur à N).

Preuve de la proposition 3.49 :

a). On sépare les cas où $\ell = +\infty$ et où $\ell = -\infty$.
Cas $\ell = +\infty$: On montre que $\lim(u+v) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.31) avec u remplacée par $u + v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.31), que le voisinage $]L'; +\infty[$ de $+\infty$, avec $L' = \max(1; L - \ell' + 1) > 0$, contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par la proposition (3.28) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]\ell' - 1; \ell' + 1[$ de ℓ' contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n \, + \, v_n \; > \; L' \, + \, (\ell' - 1) \; \geq \; (L - \ell' + 1) \, + \, (\ell' - 1) \; = \; L \, .$$

On a montré que $\lim(u + v) = +\infty$.
Cas $\ell = -\infty$: On montre que $\lim(u+v) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.32) avec u remplacée par $u + v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par cette même proposition (3.32), que le voisinage $]-\infty; -L'[$ de $-\infty$, avec $L' = \max(1; L + \ell' + 1) > 0$, contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par la proposition (3.28) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]\ell' - 1; \ell' + 1[$ de ℓ' contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n \, + \, v_n \; < \; -L' \, + \, (\ell' + 1) \; \leq \; -(L + \ell' + 1) \, + \, (\ell' + 1) \; = \; -L \, .$$

On a montré que $\lim(u + v) = -\infty$.

b). On sépare les cas où $\ell = \ell' = +\infty$ et où $\ell = \ell' = -\infty$.
Cas $\ell = \ell' = +\infty$: On montre que $\lim(u + v) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.31) avec u remplacée par $u + v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.31), que le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = +\infty$, on sait, par la proposition (3.31) (avec u remplacée par v), que le voisinage

$]0;+\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n > L + 0 = L\,.$$

On a montré que $\lim(u+v) = +\infty$.
Cas $\ell = \ell' = -\infty$: On montre que $\lim(u+v) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.32) avec u remplacée par $u+v$. Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par cette même proposition (3.32), que le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_1. Comme $\lim v = -\infty$, on sait, par la proposition (3.32) (avec u remplacée par v), que le voisinage $]-\infty; 0[$ de $-\infty$ contient tous les termes de v à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, en utilisant que $n \geq N_1$ et que $n \geq N_2$,

$$u_n + v_n < -L + 0 = -L\,.$$

On a montré que $\lim(u+v) = -\infty$.

c). On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
Cas où $\lambda > 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.31) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par cette même proposition (3.31), que le voisinage $]L/\lambda; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n > \lambda \cdot \frac{L}{\lambda} = L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = +\infty$.
Cas où $\lambda < 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.32) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par la proposition (3.31), que le voisinage $]L/|\lambda|; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > L/|\lambda|$ et, comme $\lambda < 0$,

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n < \lambda \cdot \frac{L}{|\lambda|} = -L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = -\infty$.
On traite le cas où $\ell = -\infty$.
Cas où $\lambda > 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.32) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par la proposition (3.32), que le voisinage $]-\infty; -L/|\lambda|[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < -L/|\lambda|$ et, comme $\lambda > 0$,

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n < \lambda \cdot \frac{-L}{|\lambda|} = -L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = -\infty$.
Cas où $\lambda < 0$: on montre que $\lim(\lambda u) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.31) avec u remplacée par (λu). Soit $L > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par la proposition (3.32), que le voisinage $]-\infty; -L/|\lambda|[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < -L/|\lambda|$ et, comme $\lambda < 0$,

$$(\lambda u)_n = \lambda \cdot u_n > \lambda \cdot \frac{-L}{|\lambda|} = L\,.$$

On a montré que $\lim(\lambda u) = +\infty$.

d). Comme (λu) est constante égale à 0, elle converge vers 0.

e). On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 3.48, que u est strictement positive à partir d'un certain rang N_1.
Cas où $\ell' > 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 1 de la proposition 3.48, que v est strictement

supérieure à $\ell'/2 > 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > 0$ et $v_n > \ell'/2 > 0$ donc $u_n v_n \geq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.48), on en déduit que $\lim uv = +\infty$.
Cas où $\ell' < 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 2 de la proposition 3.48, que v est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > 0$ et $v_n < \ell'/2 < 0$ donc $u_n v_n \leq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.48), on en déduit que $\lim uv = -\infty$.
On traite le cas où $\ell = -\infty$.
Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par le 2 de la proposition 3.48, que u est strictement négative à partir d'un certain rang N_1.
Cas où $\ell' > 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 1 de la proposition 3.48, que v est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < 0$ et $v_n > \ell'/2 > 0$ donc $u_n v_n \leq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 3.48), on en déduit que $\lim uv = -\infty$.
Cas où $\ell' < 0$: Comme $\lim v = \ell'$, on sait, par le 2 de la proposition 3.48, que v est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ à partir d'un certain rang N_2. Soit $N = \max(N_1; N_2)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < 0$ et $v_n < \ell'/2 < 0$ donc $u_n v_n \geq (\ell'/2)u_n$. Par c), $\lim(\ell'/2)u = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 7 de la proposition 3.48), on en déduit que $\lim uv = +\infty$.

f). On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
Comme $\lim u = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 3.48, que u est strictement positive à partir d'un certain rang N_0. Donc $(1/u)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/u) = 0$ en utilisant la proposition (3.28).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = +\infty$, le voisinage $]1/\epsilon; +\infty[$ de $+\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n > (1/\epsilon) > 0$ donc $0 < (1/u_n) < \epsilon$. On a montré que $\lim(1/u) = 0$.
On traite le cas où $\ell = -\infty$.
Comme $\lim u = -\infty$, on sait, par le 2 de la proposition 3.48, que u est strictement négative à partir d'un certain rang N_0. Donc $(1/u)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/u) = 0$ en utilisant la proposition (3.28).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim u = -\infty$, le voisinage $]-\infty; -1/\epsilon[$ de $-\infty$ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n < -(1/\epsilon) < 0$ donc $0 > (1/u_n) > -\epsilon$. On a montré que $\lim(1/u) = 0$.

g). Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que w soit strictement positive à partir du rang N_0. Donc $(1/w)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/w) = +\infty$ en utilisant la proposition (3.31).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim w = 0$, le voisinage $]-(1/L); (1/L)[$ de 0 contient tous les termes de w à partir d'un certain rang N_1. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $w_n > 0$ et $w_n \in]-(1/L); (1/L)[$ donc $0 < w_n < (1/L)$, d'où $(1/w_n) > L$. On a montré que $\lim(1/w) = +\infty$.

h). Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que w soit strictement négative à partir du rang N_0. Donc $(1/w)$ est bien définie à partir de ce rang N_0. Montrons que $\lim(1/w) = -\infty$ en utilisant la proposition (3.32).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim w = 0$, le voisinage $]-(1/L); (1/L)[$ de 0 contient tous les termes de w à partir d'un certain rang N_1. Soit $N = \max(N_0; N_1)$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, $w_n < 0$ et $w_n \in]-(1/L); (1/L)[$ donc $0 < -w_n < (1/L)$, d'où $(1/w_n) < -L$. On a montré que $\lim(1/w) = -\infty$. □

On revient maintenant sur les notions de bornes supérieure et inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{R}$, que l'on a introduites au paragraphe 1.2. On rappelle que l'on a décidé, par **convention**, que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel. Ainsi, pour une partie A non vide de $\mathbb{R}$, $+\infty$ est un majorant de A et $-\infty$ est un minorant de A (cf. paragraphe 1.2).

Proposition 3.50. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*

1. *ℓ est adhérent à A si et seulement si ℓ est limite d'une suite d'éléments de A.*

2. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\mathcal{S}_1 \;=\; (\ell = \sup A)\,, \tag{3.41}$$

$$\mathcal{S}_2 \;=\; \Big(\big(\ell \text{ majore } A\big) \text{ et } \big(\ell \text{ est adhérent à } A\big)\Big)\,, \tag{3.42}$$

$$\mathcal{S}_3 \;=\; \Big(\big(\ell \text{ majore } A\big) \text{ et } \big(\ell \text{ est limite d'une suite d'éléments de } A\big)\Big)\,. \tag{3.43}$$

3. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

$$\mathcal{I}_1 \;=\; (\ell = \inf A)\,, \tag{3.44}$$

$$\mathcal{I}_2 \;=\; \Big(\big(\ell \text{ minore } A\big) \text{ et } \big(\ell \text{ est adhérent à } A\big)\Big)\,, \tag{3.45}$$

$$\mathcal{I}_3 \;=\; \Big(\big(\ell \text{ minore } A\big) \text{ et } \big(\ell \text{ est limite d'une suite d'éléments de } A\big)\Big)\,. \tag{3.46}$$

Preuve :

1. On procède par double implication.
   $\Longleftarrow$) : Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Comme ℓ est limite d'une suite $u : D \longrightarrow A$, V contient tous les termes de cette suite à partir d'un certain rang. Un tel terme appartient donc à $V \cap A$ donc $V \cap A \neq \emptyset$. On a montré que ℓ est adhérent à A.
   $\Longrightarrow$) : On suppose que ℓ est adhérent à a. On sépare trois cas.
   $\underline{\ell = +\infty}$: Pour $n \in \mathbb{N}$, le voisinage $]n; +\infty[$ de $+\infty$ rencontre A. Il existe donc $a_n \in A$ avec $a_n > n$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant $a_n > n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_n n = +\infty$, $\lim\limits_n a_n = +\infty$ par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48). Donc $\ell = +\infty$ est la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.
   $\underline{\ell = -\infty}$: Pour $n \in \mathbb{N}$, le voisinage $]-\infty; -n[$ de $-\infty$ rencontre A. Il existe donc $a_n \in A$ avec $a_n < -n$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant $a_n < -n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_n n = +\infty$, $\lim\limits_n (-n) = -\infty$ par les opérations sur les limites (cf. proposition 3.49) et $\lim\limits_n a_n = -\infty$ par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48). Donc $\ell = -\infty$ est limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.
   $\underline{\ell \in \mathbb{R}}$: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le voisinage $]\ell - (1/n); \ell + (1/n)[$ de ℓ rencontre A. Il existe donc $a_n \in A$ avec $\ell - (1/n) < a_n < \ell + (1/n)$. On a ainsi construit une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A vérifiant $\ell - (1/n) < a_n < \ell + (1/n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim\limits_n (1/n) = 0$, $\lim\limits_n a_n = \ell$, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48). Donc ℓ est limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A.
2. D'après le 1, on a $\mathcal{S}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{S}_3$. On montre $\mathcal{S}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{S}_2$.
   $\mathcal{S}_1 \Longrightarrow \mathcal{S}_2$: Par définition de la borne supérieure, ℓ majore A. Soit V un voisinage de ℓ. On montre que $V \cap A \neq \emptyset$.
   $\underline{\text{Cas où } \ell = +\infty}$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $]b; +\infty[\subset V$. Comme A n'est pas majorée, b ne majore pas A. Il existe donc $a \in A$ tel que $b < a$. Donc $a \in A \cap]b; +\infty[$. L'ensemble $A \cap]b; +\infty[$ est non vide et inclu dans $V \cap A$, donc ce dernier est aussi non vide.
   $\underline{\text{Cas où } \ell \in \mathbb{R}}$: Il existe $r > 0$ tel que $I(\ell; r[\subset V$. Soit $x = \ell - (r/2) \in I(\ell; r[$. Comme $x < \ell$ et ℓ est le plus petit majorant de A, x ne majore pas A. Il existe donc $a \in A$ tel que $x < a$. Comme ℓ majore A, $a \leq \ell$. D'où $a \in]x; \ell]$. L'ensemble $]x; \ell] \cap A$ est donc non vide. Comme $(]x; \ell] \cap A) \subset (I(\ell; r[) \cap A) \subset V \cap A$, $V \cap A$ est aussi non vide.
   Dans tous les cas, on a montré que $V \cap A \neq \emptyset$. Donc ℓ est adhérent à A.
   $\mathcal{S}_2 \Longrightarrow \mathcal{S}_1$: Supposons qu'on ait un majorant m de A qui vérifie $m < \ell$. Alors $]m; +\infty[$ est un voisinage de ℓ. Comme ℓ est adhérent à A, ce voisinage contient un élément a de A. En particulier, $a > m$, ce qui contredit le fait que m est un majorant de A. Donc, pour tout majorant m de A, on a $m \geq \ell$. Comme ℓ est un majorant de A, c'est le plus petit. D'où $\ell = \sup A$.
3. D'après le 1, on a $\mathcal{I}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{I}_3$. On montre $\mathcal{I}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{I}_2$.
   $\mathcal{I}_1 \Longrightarrow \mathcal{I}_2$: Par définition de la borne inférieure, ℓ minore A. Soit V un voisinage de ℓ. On montre que $V \cap A \neq \emptyset$.

Cas où $\ell = -\infty$: Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty; b[\subset V$. Comme A n'est pas minorée, b ne minore pas A. Il existe donc $a \in A$ tel que $b > a$. Donc $a \in A \cap]-\infty; b[$. L'ensemble $A \cap]-\infty; b[$ est non vide et inclu dans $V \cap A$, donc ce dernier est aussi non vide.
Cas où $\ell \in \mathbb{R}$: Il existe $r > 0$ tel que $I(\ell; r[\subset V$. Prenons $x = \ell + (r/2) \in I(\ell; r[$. Comme $x > \ell$ et ℓ est le plus grand minorant de A, x ne minore pas A. Il existe donc $a \in A$ tel que $x > a$. Comme ℓ minore A, $a \geq \ell$. D'où $a \in [\ell; x[$. L'ensemble $[\ell; x[\cap A$ est donc non vide. Comme $([\ell; x[\cap A) \subset (I(\ell; r[) \cap A) \subset V \cap A$, $V \cap A$ est aussi non vide.
Dans tous les cas, on a montré que $V \cap A \neq \emptyset$. Donc ℓ est adhérent à A.
$\mathcal{I}_2 \Longrightarrow \mathcal{I}_1$: Supposons qu'on ait un minorant m de A qui vérifie $m > \ell$. Alors $]-\infty; m[$ est un voisinage de ℓ. Comme ℓ est adhérent à A, ce voisinage contient un élément a de A. En particulier, $a < m$, ce qui contredit le fait que m est un minorant de A. Donc, pour tout minorant m de A, on a $m \leq \ell$. Comme ℓ est un minorant de A, c'est le plus grand. D'où $\ell = \inf A$. □

Ce résultat permet de justifier aisément quelques calculs de bornes, dans le cas où ses bornes ne sont ni un maximum ni un minimum. Par exemple, on devine que $\inf]0; 1] = 0$. On voit que 0 minore l'ensemble $]0; 1]$. De plus, 0 est aussi la limite de la suite $(1/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui est une suite d'éléments de $]0; 1]$. Donc, par la proposition 3.50, on obtient $\inf]0; 1] = 0$.
Pour déterminer rigoureusement la borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide et explicite de $\mathbb{R}$, on dispose donc, après avoir deviné ladite borne, de la proposition 3.50 lorsque ce n'est pas un maximum (resp. un minimum) et de la proposition 1.12 s'il s'agit d'un maximum (resp. un minimum).

On donne le résultat important suivant d'existence de limite pour les suites monotones.

Proposition 3.51. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle monotone. Alors $\lim u$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Plus précisément,*

1. *si u est croissante alors $\lim u = \sup u$, où $\sup u := \sup u(D) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$;*
2. *si u est décroissante alors $\lim u = \inf u$, où $\inf u := \inf u(D) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$.*

Preuve : On rappelle que $u(D)$ est la partie non vide $\{u_n; n \in D\}$ de $\mathbb{R}$.

a). Cas où u est croissante et $\sup u(D) = +\infty$. On montre que $\lim u = +\infty$ en utilisant (3.31).
Soit $L > 0$. Comme $\sup u(D) = +\infty$, il existe, par la proposition 3.50, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers $+\infty$. Le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$ contient donc tous les termes de a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} > L$ et, comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la croissance de u, $u_n \geq u_N = a_{n_0} > L$. On a montré que $\lim u = +\infty$.

b). Cas où u est décroissante et $\inf u(D) = -\infty$. On montre que $\lim u = -\infty$ en utilisant (3.32).
Soit $L > 0$. Comme $\inf u(D) = -\infty$, il existe, par la proposition 3.50, une suite $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers $-\infty$. Le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$ contient donc tous les termes de a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} < -L$ et, comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la décroissance de u, $u_n \leq u_N = a_{n_0} < -L$. On a montré que $\lim u = -\infty$.

c). Cas où u est croissante et $\ell := \sup u(D) \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim u = \ell$ en utilisant (3.29).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \sup u(D)$, il existe, par la proposition 3.50, une suite réelle $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers ℓ. Le voisinage $I(\ell; \epsilon[$ de ℓ contient donc tous les termes de la suites a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} \in I(\ell; \epsilon[$ donc $\ell - \epsilon < a_{n_0} < \ell + \epsilon$ (d'après la proposition 2.5). Comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la croissance de u, $u_n \geq u_N = a_{n_0} > \ell - \epsilon$. Par définition de ℓ, on a aussi $u_n \leq \ell$. Donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ (d'après la proposition 2.5). On a montré que $\lim u = \ell = \sup u(D)$.

d). Cas où u est décroissante et $\ell := \inf u(D) \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim u = \ell$ en utilisant (3.29).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \inf u(D)$, il existe, par la proposition 3.50, une suite réelle $a : D' \longrightarrow \mathbb{R}$ d'éléments de $u(D)$ qui tend vers ℓ. Le voisinage $I(\ell; \epsilon[$ de ℓ contient donc tous les termes de la suites a à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in D'$ avec $n_0 \geq N_0$. On a $a_{n_0} \in I(\ell; \epsilon[$ donc

$\ell - \epsilon < a_{n_0} < \ell + \epsilon$ (d'après la proposition 2.5). Comme $a_{n_0} \in u(D)$, il existe $N \in D$ tel que $a_{n_0} = u_N$. Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a, d'après la décroissance de u, $u_n \leq u_N = a_{n_0} < \ell + \epsilon$. Par définition de ℓ, on a aussi $u_n \geq \ell$. Donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ (d'après la proposition 2.5). On a montré que $\lim u = \ell = \inf u(D)$. □

Voyons plus précisément ce nous donne le résultat précédent. Prenons, par exemple, une suite croissante $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. Ce résultat nous donne l'existence de la limite ℓ de u. Mais il nous dit aussi que $\ell = \sup u$ donc, en particulier, $\ell \geq u_0$ et même $\ell \geq u_{2023}$.
On peut retrouver ce dernier résultat en utilisant la proposition 3.48. Comme u est croissante, la proposition $(u_n \geq u_{2023})$ est vraie à partir d'un certain rang (par exemple, le rang 2023). Donc, par passage à la limite dans ces inégalités, on obtient $\ell \geq u_{2023}$.

On termine ce paragraphe par un autre résultat important qui concerne les suites réelles "adjacentes".

Définition 3.52. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et deux suites réelles $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que u et v sont adjacentes si u est croissante, v est décroissante,*

$$\forall\, n \in D\,, \quad u_n \,\leq\, v_n \tag{3.47}$$

et la suite $(u_n - v_n)_{n\in D}$ tend vers 0.

Théorème 3.53. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et deux suites réelles adjacentes $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors elles convergent vers la même limite, i.e. il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim u = \ell = \lim v$.*

Preuve : Par la proposition 1.10, on sait que D a un minimum. Soit $n_0 = \min D$. Pour $n \in D$, on a $u_n \leq v_{n_0}$ d'après (3.47) et la décroissance de v. On a aussi $u_{n_0} \leq v_n$ d'après (3.47) et la croissance de u. Donc u est majorée par v_{n_0} et v est minorée par u_{n_0}. Donc $\ell := \sup u$ et $\ell' := \inf v$ sont réels. De plus, par la proposition 3.51 et les monotonies de u et v, $\lim u$ existe et vaut ℓ et $\lim v$ existe et vaut ℓ'. Comme, pour tout $n \in D$, $u_n = (u_n - v_n) + v_n$, et comme la suite $(u_n - v_n)_{n\in D}$ tend vers 0, on a, par somme (cf. la proposition 3.46), $\ell = 0 + \ell' = \ell'$. □

3.7 Limite d'une suite et sous-suites.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au comportement des sous-suites d'une suite ayant une limite, finie ou infinie. On donne aussi le théorème de Bolzano-Weierstrass.

On vérifie d'abord qu'une extractrice, qui est une suite réelle, tend forcément vers $+\infty$.

Proposition 3.54. *Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $\varphi : D' \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice. Alors $\lim \varphi$ existe et vaut $+\infty$.*

Preuve : Comme φ est une suite réelle croissante, $\lim \varphi$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et vaut $\sup \varphi(D')$, par la proposition 3.51. Montrons que $\sup \varphi(D') = +\infty$.
Supposons que $\varphi(D')$, qui est une partie de $\mathbb{N}$, soit finie. Alors, par la définition 1.3, il existe $p \in \mathbb{N}$ et des éléments $a_1; \cdots; a_p$ deux à deux distincts de $\mathbb{N}$ tel que $\varphi(D') = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Comme $\varphi : D' \longrightarrow \varphi(D')$ est bijective, on a, en notant par ψ sa bijection réciproque, $D' = \{\psi(a_j); j \in [\![1; p]\!]\}$. Donc D' est finie (cf. définition 1.3). Contradiction. On a donc montré que $\varphi(D')$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$. D'après le 5 de proposition 1.10, $\varphi(D')$ n'est pas majorée. Donc $\sup \varphi(D') = +\infty$. □

Proposition 3.55. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On considère les deux situations :*

1. *On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on considère un $\ell \in \mathbb{C}$.*
2. *On se place dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.*

Dans ces deux cas, on a l'implication suivante :

$$\big(\lim u \text{ existe et vaut } \ell\big) \implies \Big(\text{pour toute sous-suite } v \text{ de } u\,, \quad \big(\lim v \text{ existe et vaut } \ell\big)\Big)\,. \tag{3.48}$$

Remarque 3.56. *Il se trouve que la réciproque de l'implication* (3.48) *est vraie. On a donc une caractérisation de la propriété* ($\lim u = \ell$)*. On n'utilisera pas cette caractérisation ici, c'est pourquoi l'on se contente de montrer l'implication* (3.48)*.*

Preuve de la proposition 3.55 : On suppose que u admet ℓ pour limite.
Soit D' une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $v : D' \longrightarrow \mathbb{K}$ une sous-suite de u. Il existe donc une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ telle que $v = u \circ \varphi$. Montrons que v tend vers ℓ en utilisant (3.23) avec u remplacée par v. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse (cf. (3.29) ou (3.30)), V contient tous les termes de u à partir d'un certain rang N_0. Comme $[N_0; +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbb{R}$ et comme $\lim \varphi = +\infty$ par la proposition 3.54, $[N_0; +\infty[$ contient tous les termes de φ à partir d'un certain rang $N_1 \in \mathbb{N}$. Soit $n \in D'$ avec $n \geq N_1$. On a donc $\varphi(n) \in [N_0; +\infty[$ soit $\varphi(n) \geq N_0$. Comme φ est à valeurs dans D et $v_n = u_{\varphi(n)}$, on a $v_n \in V$. On a montré $\lim v = \ell$ via (3.23). □

Une première application importante de cette proposition 3.55 consiste à utiliser directement l'implication. Si l'on souhaite étudier une suite et qu'on vérifie qu'elle est une sous-suite d'une suite ayant une limite, cette implication nous donne tout de suite que la suite étudiée tend vers la limite de l'autre suite. Par exemple, la suite $w = ((2n+5)^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite $(1/p)_{p\in\mathbb{N}^*}$, qui converge vers 0, donc w converge aussi vers 0.
On peut aussi exploiter l'implication de la proposition 3.55 par l'absurde. Pour montrer qu'une suite u n'a pas de limite, on suppose par l'absurde qu'elle en a une et on essaye de produire :
- deux sous-suites v et w de u telles que $\lim v$ et $\lim w$ existent mais sont différentes ;
- ou bien une sous-suite v de u qui n'a pas de limite.

Voyons un exemple simple. On a déjà montré plus haut (cf. proposition 3.37) que la suite réelle $x = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Redémontrons ce résultat en utilisant la stratégie que l'on vient d'esquisser. On suppose que $\lim x$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Les deux sous-suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de x tendent aussi vers $\lim x$, d'après la proposition 3.55. La suite $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1$, donc cette suite converge vers 1 (cf. proposition 3.41). La suite $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à -1, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n+1} = (-1)\cdot((-1)^2)^n = -1$, donc cette suite converge vers -1 (cf. proposition 3.41), qui est différent de 1. On a donc une contradiction avec le fait que ces suites doivent tendre vers la même limite. L'hypothèse "$\lim x$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$" est donc fausse et on a montré que x n'a pas de limite.
Voyons un autre exemple (que l'on a utilisé plus haut, cf. paragraphe 3.6). Soit $w = ((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On montre que w n'a pas de limite.
Supposons que la limite ℓ de w existe. Comme les suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont des sous-suites de w (cf. paragraphe 3.3.3), elles tendent aussi vers ℓ, par la proposition 3.55. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $w_{2n} = 2n$ et $w_{2n+1} = -(2n+1)$. Comme $\lim\limits_n n = +\infty$, on a, par somme et produit (cf. proposition 3.49), $\lim\limits_n w_{2n} = +\infty$ et $\lim\limits_n w_{2n+1} = -\infty$. D'où $+\infty = -\infty$, ce qui est une contradiction. On a montré la

Proposition 3.57. *La suite* $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'a pas de limite.*

Grâce à cette proposition 3.55, combinée avec des résultats précédents, on peut montrer le résultat suivant sur les suites géométriques.

Proposition 3.58. *Soit* $z \in \mathbb{C}$*. On considère les suites* $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et* $s : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ *données par*

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}\,, \quad u_n \;=\; z^n \quad \text{et, pour } n \in \mathbb{N}^*\,, \quad s_n \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} z^k\,.$$

On a :

1. *Si* $|z| < 1$ *alors* $\lim u$ *existe et vaut* 0 *et* $\lim s$ *existe et vaut* $(1-z)^{-1}$.
2. *Si* $|z| \geq 1$ *et* $z \notin \mathbb{R}^+$ *alors* $\lim u$ *n'existe pas et* $\lim s$ *n'existe pas.*
3. *Si* $z = x \in \mathbb{R}^+$ *et* $x > 1$ *alors* u *et* s *sont des suites réelles,* $\lim u$ *et* $\lim s$ *existent et valent* $+\infty$.
4. *Si* $z = 1$ *alors* u *et* s *sont des suites réelles,* $\lim u$ *existe et vaut* 1 *et* $\lim s$ *existe et vaut* $+\infty$.

Preuve : Par la proposition 3.15, on a, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z = 1$, $s_n = n$, et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $z \neq 1$,

$$s_n \;=\; \frac{1 - z^n}{1 - z} \;=\; \frac{z^n - 1}{z - 1}\,. \tag{3.49}$$

De plus, $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u (car $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{N}$ est une extractrice), qui vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad u_{n+1} \;=\; z \cdot u_n\,. \tag{3.50}$$

Pour $z \in \mathbb{R}$, u est une suite réelle d'après la définition 3.5 et s est une suite réelle d'après la définition 3.8.

1. Prenons $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$. La suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive. Elle converge donc vers une limite réelle $\ell \geq 0$ (d'après les propositions 3.51 et 3.48). Comme $(|z|^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge aussi vers ℓ, par la proposition 3.55. On a

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad |z|^{n+1} \;=\; |z| \cdot |z|^n\,.$$

   Par les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.46), on a donc $\ell = |z| \cdot \ell$ soit $(1-|z|)\ell = 0$. Comme $|z| < 1$, $\ell = 0$. Comme cette suite $(|z|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $|u|$, on obtient par (3.34) que $\lim u$ existe et vaut 0. Par (3.49) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.46), on obtient $\lim s = (1-z)^{-1}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geq 1$ et $z \notin \mathbb{R}^+$. On suppose que $\ell = \lim u$ existe.
   1er cas : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Comme $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u, elle converge aussi vers ℓ, par la proposition 3.55. Par (3.50) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.46), on obtient $\ell = z \cdot \ell$ soit $(1-z)\ell = 0$. Comme $z \notin \mathbb{R}^+$, $z \neq 1$ d'où $\ell = 0$. Par l'hypothèse et l'implication (3.35), $\lim |u| = |\ell| = 0$. Comme $|z| \geq 1$, $|u|$ est minorée par 1. Donc, par passage à la limite dans les inégalités $|u_n| \geq 1$, $|\ell| \geq 1$. Contradiction avec $\ell = 0$. Donc $\lim u$ n'existe pas.
   Supposons que la limite de s existe dans $\mathbb{C}$. Par (3.49), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$(z - 1) \cdot s_n + 1 \;=\; z^n\,.$$

   Par la proposition 3.46, u aurait une limite qui serait $(z-1)(\lim s) + 1$. Contradiction car u n'a pas de limite. On a montré que s n'a pas de limite.
   2ième cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $z = x \in \mathbb{R}^{-*}$ et $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. Comme $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u, elle converge aussi vers ℓ, par la proposition 3.55. Si $\ell = +\infty$ alors, par (3.50) et les opérations sur les limites infinies (cf. proposition 3.49), on obtient $-\infty = +\infty$. Contradiction. Si $\ell = -\infty$, on obtient de même $+\infty = -\infty$. Contradiction. Donc $\ell \in \mathbb{R}$. Encore par (3.50) et les opérations sur les limites finies (cf. proposition 3.46), on obtient $\ell = x \cdot \ell$ soit $(1-x)\ell = 0$. Comme $x \neq 1$, $\ell = 0$. Comme $|x| \geq 1$, $|u|$ est minorée par 1 donc, par l'argument du cas précédent, on tombe aussi sur une contradiction. Donc $\lim u$ n'existe pas.
   Supposons que la limite de s existe dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. Par (3.49), on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$(x - 1) \cdot s_n + 1 \;=\; x^n\,.$$

   Par la proposition 3.49 et le fait que $x \neq 1$, u aurait une limite. Contradiction car u n'a pas de limite. On a montré que s n'a pas de limite.
3. Prenons $z = x$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $x > 1$. Donc u est strictement croissante. Elle admet donc une limite $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$ qui vérifie $\ell = \sup u \geq u_1 = x \geq 1$, par la proposition 3.51. Comme $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de u, elle converge aussi vers ℓ, par la proposition 3.55. Si ℓ était réelle alors, par (3.50) et les opérations sur les limites (cf. proposition 3.46 ou proposition 3.49), on aurait $\ell = x \cdot \ell$ avec $x > 1$ et $\ell \neq 0$, c'est-à-dire une contradiction. Donc $\ell = +\infty$. Par (3.49) avec $z = x > 1$ et les opérations sur les limites infinies (cf. proposition 3.49), on obtient $\lim s = +\infty$.

4. Prenons $z = 1$. La suite u est alors constante égale à 1 donc converge vers 1 (cf. proposition 3.41). La suite s est la suite $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui tend vers $+\infty$, par la proposition 3.44. □

On a vu plus haut qu'une suite réelle convergente est forcément bornée (cf. le 3 de la proposition 3.48). Mais une suite réelle bornée n'est pas forcément convergente comme le montre le contre-exemple de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est bien bornée mais n'a pas de limite (cf. proposition 3.37). Cependant, une suite réelle bornée admet toujours une sous-suite convergente, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.59. Théorème de Bolzano-Weierstrass. *De toute suite réelle, infinie, bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit :*
Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Alors il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ telle que $u \circ \varphi$ soit convergente.

Pour démontrer ce résultat, on retrouve ici la difficulté signalée dans la remarque 3.3.
Pour préparer la preuve de ce théorème, on utilise tout d'abord un procédé de dichotomie pour construire des suites adjacentes vérifiant les propriétés du lemme suivant.

Lemme 3.60. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Soit a un minorant de u et b un majorant de u. Il existe deux suites $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ et $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ adjacentes (i.e. α est croissante, β est décroissante, $\beta - \alpha$ est positive et tend vers 0) telles que $\alpha_0 = a$, $\beta_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble*

$$\big\{p \in D\,;\ u_p \in [\alpha_n\,;\,\beta_n]\big\}$$

est infini.

Preuve : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Maintenant, on extrait une sous-suite appropriée vérifiant les conditions du lemme suivant.

Lemme 3.61. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle bornée. Soit a un minorant de u et b un majorant de u. Soit $\alpha : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ et $\beta : \mathbb{N} \longrightarrow [a;b]$ deux suites vérifiant les conditions du lemme 3.60. Il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ telle que*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \alpha_n \ \leq\ u_{\varphi(n)} \ \leq\ \beta_n\,. \tag{3.51}$$

Preuve : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Preuve du théorème 3.59 : On prend un minorant a de u et un majorant b de u. On applique successivement les lemmes 3.60 et 3.61. Par le théorème sur les suites adjacentes (cf. théorème 3.53), les suites α et β converge vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. D'après (3.51), le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48) montre que $u \circ \varphi$ admet ℓ pour limite. Puisque φ est une extractrice, $u \circ \varphi$ est bien une sous-suite de la suite u. □

3.8 Suites de Cauchy.

On donne ici les notions de suite de Cauchy et de complétude. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.62. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On dit que u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ si*

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (m;n) \in D^2\,, \quad \big((m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\big) \implies |u_m - u_n| \ <\ \epsilon\,. \tag{3.52}$$

Lorsque D est de la forme $[\![n_0;+\infty[\![$, pour un $n_0 \in \mathbb{N}$, on peut donner deux formulations équivalentes à (3.52), formulation qui est utile dans la pratique.

Proposition 3.63. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, $D = [\![n_0;+\infty[\![$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$. La proposition* (3.52) *est équivalente à*

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad (n \geq N) \implies \big(\forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)$$

et à

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (n;p) \in D \times \mathbb{N}\,, \quad (n \geq N) \implies \big(|u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)\,.$$

Preuve : Appelons $\mathcal{Q}_1$ la première nouvelle proposition et $\mathcal{Q}_2$ la seconde nouvelle. On montre successivement (3.52) $\Longrightarrow \mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_1 \Longrightarrow \mathcal{Q}_2$ et $\mathcal{Q}_2 \Longrightarrow$ (3.52).
(3.52) $\Longrightarrow \mathcal{Q}$: On suppose (3.52) vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall (m;n) \in D^2\,, \quad \big((m \geq N) \text{ et } (n \geq N)\big) \implies |u_m - u_n| < \epsilon\,. \tag{3.53}$$

Soit $n \in D$ avec $n \geq N$. Prenons $p \in \mathbb{N}$. On a $n + p \geq n \geq N$. Comme $D = [\![n_0;+\infty[\![$, $n + p \in D$. Donc, par (3.53) avec $m = n + p$, on obtient $|u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré $\mathcal{Q}_1$.
$\mathcal{Q}_1 \Longrightarrow \mathcal{Q}_2$: On suppose $\mathcal{Q}_1$ vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in D\,, \quad (n \geq N) \implies \big(\forall\, p \in \mathbb{N}\,, \quad |u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)\,. \tag{3.54}$$

Soit $(n;p) \in D \times \mathbb{N}$ avec $n \geq N$. D'après (3.54), on a $|u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré $\mathcal{Q}_2$.
$\mathcal{Q}_2 \Longrightarrow$ (3.52) : On suppose $\mathcal{Q}_2$ vraie. Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall (n;p) \in D \times \mathbb{N}\,, \quad (n \geq N) \implies \big(|u_{n+p} - u_n| < \epsilon\big)\,. \tag{3.55}$$

Soit $(m;m') \in D^2$ avec $m \geq N$ et $m' \geq N$. Si $m \geq m'$, on peut écrire $m = m' + p$, pour un $p \in \mathbb{N}$, et, par (3.55) avec $n = m'$, on obtient $|u_m - u_{m'}| = |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. Si $m < m'$, on peut écrire $m' = m + p$, pour un $p \in \mathbb{N}$, et, par (3.55) avec $n = m$, on obtient $|u_m - u_{m'}| = |u_{n+p} - u_n| < \epsilon$. On a montré (3.52). □

Existe-t-il des suites de Cauchy ? Oui, il y a toutes les suites convergentes comme le montre la :

Proposition 3.64. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite convergente dans $\mathbb{K}$. Alors u est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$.*

Preuve : On suppose que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathbb{K}$. On montre (3.52). Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \in D$ avec $p \geq N$, on ait $|u_p - \ell| < (\epsilon/2)$. Soit $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$. Par l'inégalité triangulaire et la propriété précédente, on a

$$|u_m - u_n| = \big|(u_m - \ell) - (u_n - \ell)\big| \leq |u_m - \ell| + |u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\,.$$

On a montré (3.52) donc u est de Cauchy dans $\mathbb{K}$. □

Concernant les suites de Cauchy réelles ou complexes, on a l'important résultat suivant :

Théorème 3.65. *Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ est convergente dans $\mathbb{K}$.*

L'intérêt principal de ce théorème 3.65 se révèle dans la situation suivante : lorsqu'on étudie la limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et que l'on veut montrer qu'elle converge, on a besoin, par la nature des définitions et résultats des paragraphes précédents, de deviner la limite. Ce théorème 3.65 nous permet d'éviter cette contrainte car, pour l'appliquer, il suffit de montrer que la suite est de Cauchy, une notion qui ne fait pas apparaître la limite de la suite. Une bonne partie de l'étude des séries en L2 s'appuira sur cet avantage. Dans ce cours, on s'en servira pour justifier une définition de la fonction exponentielle (cf. paragraphe 9.7).

Depuis le début du cours, on aurait pu travailler avec $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et définir les notions de suite à valeurs dans $\mathbb{Q}$ et de convergence dans $\mathbb{Q}$. Un bon nombre de résultats précédents (mais pas tous) seraient encore valables dans ce cas. Mais le théorème 3.65 est faux pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. C'est une des raisons pour lesquelles on travaille dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

On prépare la preuve du théorème 3.65 en établissant le lemme suivant.

Lemme 3.66. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ qui admet une sous-suite convergeant vers un certain $\ell \in \mathbb{K}$. Alors u converge aussi vers ℓ.*

Preuve : Par hypothèse, il existe une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$, D' étant une partie infinie de $\mathbb{N}$, telle que $u \circ \varphi$ converge vers ℓ (cf. définition 3.31). Cela signifie que l'on a :

$$\forall\, \epsilon' > 0\,, \quad \exists\, N' \in \mathbb{N}\,; \quad \forall\, q \in D'\,, \quad \big(q \geq N' \implies |u_{\varphi(q)} - \ell| < \epsilon'\big)\,. \tag{3.56}$$

Comme u est une suite de Cauchy, on a (3.52) c'est-à-dire

$$\forall\, \epsilon_0 > 0\,, \quad \exists\, N_0 \in \mathbb{N}\,; \quad \forall (m;n) \in D^2\,, \quad \big((m \geq N_0) \text{ et } (n \geq N_0)\big) \implies |u_m - u_n| < \epsilon_0\,. \tag{3.57}$$

On montre que u tend vers ℓ en utilisant (3.28).
Soit $\epsilon > 0$. D'après (3.56) avec $\epsilon' = \epsilon/2$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $q \in D'$ avec $q \geq N'$, on ait $|u_{\varphi(q)} - \ell| < \epsilon/2$. D'après (3.57) avec $\epsilon_0 = \epsilon/2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$, on ait $|u_m - u_n| < \epsilon/2$. Comme l'extractrice φ tend vers $+\infty$ (cf. proposition 3.54), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $q \in D'$ avec $q \geq N_1$, on ait $\varphi(q) > N$.
Soit $n \in D$ avec $n \geq N$. Soit $p \in D'$ tel que $p \geq \max(N'; N_1)$. On a donc $|u_{\varphi(p)} - \ell| < \epsilon/2$, car $p \geq N'$, et $\varphi(p) > N$, car $p \geq N_1$. De plus, comme $n \geq N$, on a $|u_{\varphi(p)} - u_n| < \epsilon/2$. Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$|u_n - \ell| \;=\; |u_n - u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)} - \ell| \;\leq\; |u_n - u_{\varphi(p)}| + |u_{\varphi(p)} - \ell| \;<\; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon\,.$$

On a montré que u tend vers ℓ. □

Preuve du théorème 3.65 : On commence par le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de Cauchy. On vérifie d'abord que u est bornée.
D'après (3.52), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$, on ait $|u_m - u_n| < 1$. Soit $m_0 \in D$ tel que $m_0 \geq N$. Par l'inégalité triangulaire, on a, pour $n \in D$ avec $n \geq N$,

$$|u_n| \;=\; |u_n - u_{m_0} + u_{m_0}| \;\leq\; |u_n - u_{m_0}| + |u_{m_0}| \;\leq\; 1 + |u_{m_0}|\,.$$

Comme $D \cap [\![0; N]\!]$ est inclu dans $[\![0; N]\!]$, il est un ensemble fini (cf. proposition 1.10). Par la proposition 9.3, l'ensemble $\{|u_p|\,;\, p \in D \cap [\![0; N]\!]\}$ est aussi fini. Par la proposition 1.10, il admet un maximum $|u_{p_0}|$. Soit $M = 1 + |u_{m_0}| + |u_{p_0}|$. Pour $n \in D$, on a, si $n \geq N$, $|u_n| \leq 1 + |u_{m_0}| \leq M$ et, si $n \in D \cap [\![0; N]\!]$, $|u_n| \leq |u_{p_0}| \leq M$. Donc M majore $|u|$. Par la proposition 3.27, u est bornée.
On peut donc appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass à u (cf. théorème 3.59). Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ et une sous-suite de u qui converge vers ℓ. D'après le lemme 3.66, u converge vers ce ℓ.
On a montré le résultat dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
On passe au cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{C}$ une suite de Cauchy. On vérifie que les suites réelles $\Re u$ et $\Im u$ sont des suites de Cauchy.
Soit $\epsilon > 0$. Comme u est une suite de Cauchy, il existe, d'après (3.52), un $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$, on ait $|u_m - u_n| < \epsilon$. Prenons $(m;n) \in D^2$ avec $m \geq N$ et $n \geq N$, on a donc, d'après (2.7),

$$\big|(\Re u)_m - (\Re u)_n\big| \;=\; \big|\Re(u_m - u_n)\big| \;\leq\; |u_m - u_n| \;<\; \epsilon$$

et

$$\big|(\Im u)_m - (\Im u)_n\big| \;=\; \big|\Im(u_m - u_n)\big| \;\leq\; |u_m - u_n| \;<\; \epsilon\,,$$

ce qui montre que $\Re u$ et $\Im u$ sont des suites de Cauchy.
On peut donc appliquer le théorème 3.65 dans le cas réel, démontré plus haut, aux suites réelles $\Re u$ et $\Im u$. Il existe donc $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Re u$ tend vers x et $\Im u$ tend vers y. Comme $u = \Re u + i\Im u$, u converge vers $x + iy$, par la proposition 3.46. □

4 Limites des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'objectif de cette partie est de construire une notion de limite pour des fonctions réelles à valeurs réelles ou complexes et d'étudier la notion de continuité qui lui est associée. À la différence des suites, pour lesquelles seule une limite à l'infini a un intérêt, d'autres situations pertinentes apparaissent : limite en un point du domaine de définition, limite au bord de ce domaine, limite à l'infini.

4.1 Propriétés des fonctions.

Comme pour l'étude des suites, on distingue des propriétés communes aux fonctions réelles et aux fonctions complexes d'autres propriétés qui sont propres aux fonctions réelles.

4.1.1 Propriétés générales des fonctions.

Avant tout, on précise les fonctions que l'on va étudier. On rappelle que $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Définition 4.1. *Une fonction d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, où $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, une telle application est une fonction réelle. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, une telle application est une fonction complexe. On note par $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{K}$.*

Attention : La variable des fonctions considérées sera toujours réelle. Les valeurs sont toutes réelles pour une fonction réelle et toutes complexes pour une fonction complexe.
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. Si l'on change l'ensemble de départ ou l'ensemble d'arrivée sans changer "ce que fait la fonction", on change tout de même de fonction. Dans le cas d'une modification de l'ensemble de départ, on changera le nom de la fonction. Dans le cas d'une modification de l'ensemble d'arrivée, on conservera souvent le nom de la fonction, ce qui constitue un abus de notation.
Pour que les fonctions soient bien définies, on doit veiller à ce que tout élément de l'ensemble de départ soit bien envoyé dans l'ensemble d'arrivée.
On s'intéressera aux fonctions dont le domaine de définition est une partie infinie de $\mathbb{R}$ et, le plus souvent, contient un intervalle infini de $\mathbb{R}$.

Donnons quelques exemples de telles fonctions :

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}.$$

Par abus, on confondra f_1 et f_2. f_3 est la restriction à $\mathbb{R}^*$ de f_1. D'autres exemples :

$$f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \qquad f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}, \qquad f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & x + ix^2 \end{array}.$$

Là encore, on confondra f_4 et f_5.

Comme pour les suites, on commence par définir des opérations sur l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont définies sur le même domaine de définition.

Définition 4.2. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On définit une nouvelle fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $h(x) = f(x) + g(x)$. La fonction h est la somme des fonctions f et g et est notée $h = f + g$.
On définit une nouvelle fonction $k : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ en posant, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $k(x) = \lambda \cdot f(x)$. La fonction k

est le produit de la fonction f par le scalaire λ et est notée λf ou $\lambda \cdot f$.
Pour $c \in \mathbb{K}$, la fonction $j : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, qui à tout $x \in \mathcal{D}$ associe $j(x) = c$ est appelée la fonction constante égale à c sur $\mathcal{D}$.
La fonction nulle sur D est la fonction constante égale à 0 sur $\mathcal{D}$.
Une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite constante (sur $\mathcal{D}$) s'il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) = c$.

Attention : pour des raisons de clarté, on note de la même manière l'addition dans $\mathbb{K}$ et celle dans $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$, alors qu'elles sont différentes.

En considérant $f_7 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par $f_7(x) = x^2$, en plus des fonctions précédentes, on a $f_6 = f_2 + if_7$.

Proposition 4.3. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ des fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire définies dans la définition 4.2, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Preuve : Grâce aux propriétés d'associativité et de commutativité de la loi + dans $\mathbb{K}$ (cf. paragraphe 1.1), on en déduit ces même propriétés pour la loi + de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$. On voit que la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ est l'élement neutre de la loi + de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$. Toute fonction $f \in \mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ admet comme fonction opposée la fonction $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ donnée par, pour $x \in \mathcal{D}$, $g(x) = -f(x)$. Comme on a, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(a; b) \in \mathbb{K}^2$,

$$(\lambda\mu)a \;=\; \lambda\,(\mu a)\,,\; (\lambda \,+\, \mu)\,a \;=\; \lambda a \,+\, \mu a\,,\; \lambda\,(a \,+\, b) \;=\; \lambda a \,+\, \lambda b\,,\; 1 \cdot a \;=\; a\,,$$

on obtient, pour tout $(\lambda; \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(f; g) \in (\mathbb{K}^{\mathcal{D}})^2$,

$$(\lambda\mu)f \;=\; \lambda\,(\mu f)\,,\; (\lambda \,+\, \mu)\,f \;=\; \lambda f \,+\, \mu f\,,\; \lambda\,(f \,+\, g) \;=\; \lambda f \,+\, \lambda g\,,\; 1 \cdot f \;=\; f\,.$$

On a montré que $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ muni des lois de la définition 4.2 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

Remarque 4.4. *On peut montrer, en s'inspirant de la preuve de la proposition 3.18, que $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension infinie, si $\mathcal{D}$ est un ensemble infini.*

Voyons maintenant d'autres opérations et propriétés sur les fonctions.

Définition 4.5. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$.*
Le produit de f par g est la fonction $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. On note h par fg ou $f \cdot g$.
Soit $\mathcal{D}_0$ une partie non vide de $\mathcal{D}$. La fonction $f_0 : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ qui, à $x \in \mathcal{D}_0$, associe $f(x)$, est la restriction de f à $\mathcal{D}_0$. On note $f_0 = f_{|\mathcal{D}_0}$.
Si $\mathcal{D}_1$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si $h : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle dont l'image $h(\mathcal{D}_1)$ est incluse dans $\mathcal{D}$, alors la composition $f \circ h : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par, pour tout $x \in \mathcal{D}_1$, $(f \circ h)(x) = f(h(x))$.
Soit $|f| : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction réelle définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $(|f|)(x) = |f(x)|$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est le module de f et, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la valeur absolue de f.
Les fonctions réelles $\Re f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Im f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $\Re f(x) = \Re(f(x))$ et $\Im f(x) = \Im(f(x))$, respectivement, sont les parties réelle et imaginaire de la fonction f.
On dit que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 si l'on a l'équivalence : $(x \in \mathcal{D}) \iff (-x \in \mathcal{D})$.
On dit que f est (une fonction) paire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = f(x)$.
On dit que f est (une fonction) impaire si $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a, pour $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Re f = f$ et $\Im f = 0$. Ces notions de parties réelle et imaginaire ne sont donc vraiment utiles que dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la fonction module est l'application $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à un complexe z, associe son module $|z|$. Lorsque $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, le module de f, défini dans la définition 4.5, est en fait la composition

$|\cdot| \circ f$ de la fonction module par f.
On a bien sûr la même chose dans $\mathbb{R}$, en remplaçant la fonction module par sa restriction à $\mathbb{R}$, à savoir la fonction valeur absolue. Pour une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, sa valeur absolue est le composition $|\cdot| \circ f$ de la fonction valeur absolue avec f.
En reprenant les exemples précédents, $f_1 = \Re(f_6)$ et $f_4 = \Im(f_6)$. On a aussi $f_4 = f_1 \cdot f_1 = f_1^2$. On remarque que f_2 est impaire, que f_5 est paire et que f_3 est impaire ($\mathbb{R}^*$, le domaine de définition de f_3, est bien symétrique par rapport à 0).

4.1.2 Propriétés propres aux fonctions réelles.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur les fonctions réelles (i.e. pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et on donne des propriétés reliées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.6. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$.*
On dit que f est croissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big(\big(x \leq x' \big) \implies \big(f(x) \leq f(x') \big) \Big) \, .$$

On dit que f est strictement croissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big(\big(x < x' \big) \implies \big(f(x) < f(x') \big) \Big) \, .$$

On dit que f est décroissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big(\big(x \leq x' \big) \implies \big(f(x) \geq f(x') \big) \Big) \, .$$

On dit que f est strictement décroissante si

$$\forall (x; x') \in \mathcal{D}^2 \, , \, \Big(\big(x < x' \big) \implies \big(f(x) > f(x') \big) \Big) \, .$$

On dit que f est monotone si elle est croissante ou bien si elle est décroissante.
On dit que f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou bien si elle est strictement décroissante.
Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante, resp. monotone, resp. strictement monotone) sur $\mathcal{D}'$ si la restriction $f_{|\mathcal{D}'}$ de f à $\mathcal{D}'$ est croissante (resp. strictement croissante, resp. décroissante, resp. strictement décroissante, resp. monotone, resp. strictement monotone).

Donnons quelques exemples. Une fonction constante est croissante et aussi décroissante. Elle n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. La fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, qui à x associe x, est strictement croissante. Elle est aussi croissante. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle n'est pas croissante (ni strictement croissante) puisque $-2 < -1$ et $f(-2) = 4 > 1 = f(-1)$. Elle n'est pas non plus décroissante (ni strictement décroissante) puisque $2 > 1$ et $f(2) = 4 > 1 = f(1)$.

Définition 4.7. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Soit $a \in \mathbb{R}$.*
On dit que f est majorée par a si a majore l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq a$.
On dit que f est majorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit majorée par b.
On dit que f est minorée par a si a minore l'image $f(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par f, c'est-à-dire si, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \geq a$.
On dit que f est minorée s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que f soit minorée par b.
On dit que f est bornée si f est majorée et f est minorée.

Lorsqu'une fonction est minorée par 0*, on dit qu'elle est positive.*
Lorsqu'une fonction est majorée par 0*, on dit qu'elle est négative.*
La borne supérieure de f*, notée* $\sup f$ *est* $\sup f(\mathcal{D})$*, la borne supérieure de l'image* $f(\mathcal{D})$ *de* $\mathcal{D}$ *par* f*.*
La borne supérieure de f*, notée* $\inf f$ *est* $\sup f(\mathcal{D})$*, la borne supérieure de l'image* $f(\mathcal{D})$ *de* $\mathcal{D}$ *par* f*.*

Comme pour les suites, on donne une caractérisation de la bornitude en utilisant la valeur absolue.

Proposition 4.8. *Soit* $\mathcal{D}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction réelle. On a l'équivalence :*

$$\Big((f \text{ est bornée}) \iff \big(\exists m \in \mathbb{R}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad |f(x)| \leq m\big)\Big)\,.$$

Preuve : On montre successivement les deux implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose f bornée. Par la définition 4.7, il existe donc $(m_-; m_+) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $m_- \leq f(x) \leq m_+$. Soit $m = \max(|m_-|; |m_+|)$. On a $m \geq |m_-| \geq -m_-$. On a aussi $m \geq |m_+| \geq m_+$. Soit $x \in \mathcal{D}$. On a $f(x) \leq m_+ \leq m$ et $-f(x) \leq -m_- \leq m$, donc $|f(x)| = \max(f(x); -f(x)) \leq m$.
$\Longleftarrow$) : On suppose vrai le membre de droite de l'équivalence de l'énoncé. Il existe donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $|f(x)| \leq m$ soit $f(x) \in I(0; m]$. Par la proposition 2.5 avec $x_0 = 0$ et $r = m$, on a donc, pour tout $x \in \mathcal{D}$, $-m \leq f(x) \leq m$. Donc f est majorée par m et minorée par $-m$. Par la définition 4.7, elle est donc bornée. □

4.2 Limites et continuité de fonction.

On introduit ici la notion de limite pour les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On commence par donner une définition générale abstraite. Ensuite, on donne une définition équivalente mais plus concrète dans les différents cas : limite finie en un point ; limite finie à l'infini ; limite infinie en un point ; limite infinie à l'infini. On introduit aussi la notion de continuité en un point du domaine de définition.

4.2.1 Définition générale.

Pour une fonction f d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{K}$, on souhaite donner un sens précis à l'énoncé : "La fonction f tend vers une limite en un certain endroit". La définition choisie devra respecter l'intuition selon laquelle si f tend vers une limite quelque part, elle ne peut y avoir qu'une limite. Cette définition doit aussi refléter le comportement de f à l'endroit choisi.
Par exemple, il n'apparaît pas pertinent de parler de la limite de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ en -1, puisque -1 est "loin" du domaine de définition de la fonction. Il s'agit donc de préciser où l'on va considérer une limite pour f.
C'est précisément dans ce but que l'on a introduit la notion de point adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ (cf. définition 2.8) et qu'on a indiqué quand $+\infty$ (resp. $-\infty$) est adhérent à une partie de $\mathbb{R}$ (cf. définition 2.12). On va définir la notion de limite d'une fonction en un $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à son domaine de définition.
Quelles sont les limites possibles ? Comme pour les suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ sera prise parmi les éléments de $\mathbb{K}$ et, dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on permettra à $+\infty$ et à $-\infty$ d'être une telle limite. On utilise la notion de voisinage associée à de telles limites. Voir les définitions 2.3, 2.7 et 2.11. On renvoie au paragraphe 2.4 pour une compilation des principales propriétés de ces voisinages.
On utilise aussi la notion de voisinage associée aux endroits où l'on considère la limite d'une fonction. Lorsque $a \in \mathbb{R}$, voir la définition 2.7. Lorsque $a \in \{-\infty; +\infty\}$, voir la définition 2.11.

Remarque 4.9. *Soit* $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.
D'après la proposition 2.15, on sait que l'intersection de deux voisinages de a *est un voisinage de* a *et*

qu'une partie contenant un voisinage de a est aussi un voisinage de a. Si a appartient à $\mathbb{R}$, tout voisinage de a contient a.
D'après la proposition 2.9 et la définition 2.12, a est adhérent à une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ si et seulement si tout voisinage U de a rencontre $\mathcal{D}$, c'est-à-dire $U \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.
Si a est adhérent à une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ et U_0 est un voisinage de a, on voit, par la proposition 2.15, que a est aussi adhérent à $U_0 \cap \mathcal{D}$.

Définition 4.10. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On dit que ℓ est limite de f en a si*

$$\forall V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.1}$$

On remarque que la proposition

$$\forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) \in V)\big) \tag{4.2}$$

signifie $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$.

Si a n'est pas adhérent à $\mathcal{D}$, il existe un voisinage U de a tel que $U \cap \mathcal{D} = \emptyset$ et la proposition (4.2) est vraie quel que soit ℓ et quel que soit $V \in \mathcal{V}$ car le membre de gauche de l'implication est toujours faux. Dans ce cas, tout ℓ serait limite de f en a. Cela ne correspond pas à ce que l'on souhaite pour une limite, c'est pourquoi on a imposé que a soit adhérent à $\mathcal{D}$.
En revanche, si a est adhérent à $\mathcal{D}$, cela implique que, pour tout voisinage U de a, $U \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. En particulier, pour un tel voisinage U de a, on peut toujours trouver un $x \in \mathcal{D}$ qui vérifie aussi $x \in U$.

Proposition 4.11. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère $(\ell; \ell') \in \mathbb{C}^2$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère $(\ell; \ell') \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})^2$. Si* (4.1) *est vraie et si* (4.1)*, avec ℓ remplacée par ℓ', est vraie, alors $\ell = \ell'$.*

Preuve : On montre que $\ell = \ell'$ par l'absurde. Supposons $\ell \neq \ell'$. D'après la proposition 2.16, il existe $(A; B) \in \mathcal{V}_\ell \times \mathcal{V}_{\ell'}$ tel que $A \cap B = \emptyset$. Comme ℓ est limite de f en a, il existe, d'après (4.1), $U_1 \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in A$. Comme ℓ' est limite de f en a, il existe, d'après (4.1) (avec ℓ remplacée par ℓ'), $U_2 \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in B$. Par la remarque 4.9, $U_1 \cap U_2$ est un voisinage de a. Comme a est adhérent à $\mathcal{D}$, $U_1 \cap U_2 \cap \mathcal{D}$ est non vide. Pour $x \in U_1 \cap U_2 \in \mathcal{D}$, on a donc $f(x) \in A$, car $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, et $f(x) \in B$, car $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$. Donc $f(x) \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. On a montré que $\ell = \ell'$. □

Cette proposition permet de parler de "la" limite d'une fonction, lorsqu'elle existe.

Définition 4.12. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. S'il existe ℓ tel que* (4.1) *est vraie, on dit que ℓ est la limite de f en a ou que f tend vers ℓ en a et on note*

$$\ell \;=\; \lim_{a} f \quad \textit{ou} \quad \ell \;=\; \lim_{x \to a} f(x)\,.$$

Attention : Il est important de rappeler qu'une fonction peut ne pas avoir de limite en a. La proposition (4.1) peut être fausse pour toutes les limites envisageables. On verra des exemples plus loin. C'est pourquoi on ne parlera de la limite d'une fonction qu'après avoir démontré (ou supposé) son existence. "Étudier la limite d'une fonction" signifie donc de déterminer si elle existe et, éventuellement, de la calculer.

Que se passe-t-il lorsque $a \in \mathcal{D}$? Bien sûr, a est adhérent à $\mathcal{D}$. La limite en a peut ne pas exister. Si elle existe, en revanche, c'est forcément $f(a)$! C'est ce que l'on montre dans la proposition suivante :

Proposition 4.13. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Si la limite de f en a existe alors elle vaut $f(a)$.*

Preuve : Soit ℓ la limite de f en a. Comme $a \in \mathcal{D}$, $f(a)$ est défini dans $\mathbb{K}$. Supposons $f(a) \neq \ell$. Alors, par la proposition 2.16, il existe $A \in \mathcal{V}_{f(a)}$ et $B \in \mathcal{V}_\ell$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Par (4.1), il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset B$. Comme U est un voisinage de a, il contient a (cf. proposition 2.15). Comme $a \in \mathcal{D}$, $a \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(a) \in B$. Comme A est un voisinage de $f(a)$, A contient $f(a)$ (cf. proposition 2.15). Donc $f(a) \in A \cap B$. Contradiction avec $A \cap B = \emptyset$. L'hypothèse $f(a) \neq \ell$ est absurde, donc $f(a) = \ell$. □

Définition 4.14. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$.*
Si la limite de f en a existe (dans ce cas, c'est $f(a)$), on dit que la fonction f est continue en a.
On dit que f est continue sur $\mathcal{D}'$ si f est continue en tout point de $\mathcal{D}'$, i.e. si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, f est continue en a, ou encore si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, $\lim\limits_a f$ existe.
On dit que f est continue si elle est continue sur $\mathcal{D}$.

On donne maintenant une caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction. Ce résultat ressemble à la proposition 3.55 sur le lien entre la nature d'une suite et celle de ses sous-suites.

Proposition 4.15. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On a l'implication*

$$\big(\ell \text{ est limite de } f \text{ en } a\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(\text{pour toute suite } u : D \longrightarrow \mathcal{D} \text{ tendant vers } a, \text{ la suite } f \circ u \text{ tend vers } \ell\big).$$

Remarque 4.16. *Il se trouve que la réciproque de l'implication de la proposition 4.15 est vraie. L'équivalence obtenue constitue une caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction. Cependant, c'est surtout l'implication de cette proposition 4.15 que l'on utilisera.*

Preuve de la proposition 4.15 : Implicitement ci-dessus, D désigne une partie infinie de $\mathbb{N}$.
On suppose que ℓ est limite de f en a. Soit $u : D \longrightarrow \mathcal{D}$ une suite tendant vers a. On montre que la suite $f \circ u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ tend vers ℓ en utilisant (3.23) avec u remplacée par $f \circ u$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Comme u tend vers a, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que U contient tous les termes de u à partir du rang N (cf. (3.23) avec ℓ remplacée par a). Pour $n \in D$ avec $n \geq N$, on a $u_n \in U \cap \mathcal{D}$ et, comme $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$, on a donc $f(u_n) \in V$. On a montré que $\ell = \lim(f \circ u)$. □

Voyons un exemple simple d'application de ce résultat. Considérons la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On devine que f n'a pas de limite en 0 car "elle saute de -1 à 1". Montrons cela par l'absurde.
On suppose que $\ell = \lim\limits_a f$ existe. Soit $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n = 1/n$ et $v = -u$. On sait que u tend vers 0. Il en est de même pour v d'après les opérations sur les limites de suite (cf. proposition 3.46). Donc, par l'implication de la proposition 4.15, $\lim(f \circ u) = \ell = \lim(f \circ v)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(f \circ u)(n) = f(u_n) = f(1/n) = 1$, car $1/n > 0$, et $(f \circ v)(n) = f(v_n) = f(-1/n) = -1$, car $-1/n < 0$. Les suites $(f \circ u)$ et $(f \circ v)$ sont constantes donc $-1 = \lim(f \circ v)$ et $1 = \lim(f \circ u)$. Contradiction car $-1 \neq 1$. On a bien montré que f n'a pas de limite en a.
On remarque que cet argument est proche de l'utilisation de sous-suites pour montrer qu'une suite n'a pas de limite, utilisation que l'on a illustrée dans le paragraphe 3.7.
On sauvegarde ce résultat dans la

Proposition 4.17. *L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$, n'a pas de limite en 0.*

Selon l'intuition, on s'attend à ce que l'on ne change pas la limite d'une fonction en a si l'on change la fonction "loin" de a. C'est ce que démontre la proposition suivante.

Proposition 4.18. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}$ et qu'il existe un voisinage $U_0 \in \mathcal{V}_a$ tel que $\mathcal{D} \cap U_0 = \mathcal{D}' \cap U_0$. En particulier, a est adhérent à $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D} \cap U_0 \neq \emptyset$.*
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$.
Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$ telles que f et g coïncident sur U_0, i.e. telles que

$$\forall x \in (U_0 \cap \mathcal{D}) \,, \quad f(x) \;=\; g(x) \,.$$

Soit h la restriction de f à $U_0 \cap \mathcal{D}$. On a les équivalences

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a h\Big) \tag{4.3}$$

et

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a g\Big) \,. \tag{4.4}$$

Preuve : Par la remarque 4.9, a est adhérent à $U_0 \cap \mathcal{D}$.

a). On montre (4.3).
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\ell = \lim_a f$. On montre que $\ell = \lim_a h$ en utilisant (4.1) avec f remplacée par h. Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage U_1 de a tel que $f(U_1 \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Soit $U = U_1 \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in U \cap \mathcal{D}$. Comme $U \cap \mathcal{D} \subset U_0 \cap \mathcal{D}$, $h(x) = f(x)$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D} \subset U_1 \cap \mathcal{D}$ et $f(U_1 \cap \mathcal{D}) \subset V$, on a $f(x) \in V$. D'où $h(x) = f(x) \in V$. On a montré $\ell = \lim_a h$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $\ell = \lim_a h$. On montre que $\ell = \lim_a f$ en utilisant (4.1). Soit V un voisinage de ℓ. Par hypothèse, il existe un voisinage U_1 de a tel que $h(U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0)) \subset V$ (cf. (4.1) avec f remplacée par h), puisque $\mathcal{D} \cap U_0$ est le domaine de définition de h. Soit $U = U_1 \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in U \cap \mathcal{D}$. Comme $U \cap \mathcal{D} \subset U_0 \cap \mathcal{D}$, $f(x) = h(x)$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D} \subset U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0))$ et $h(U_1 \cap (\mathcal{D} \cap U_0)) \subset V$, on a $h(x) \in V$. Donc $f(x) = h(x) \in V$. On a montré $\ell = \lim_a f$.

b). On montre (4.4). On note que h est aussi la restriction à $\mathcal{D} \cap U_0$ de g. En appliquant (4.3) puis (4.3), avec f remplacée par g, on a

$$\Big(\ell \;=\; \lim_a f\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a h\Big) \iff \Big(\ell \;=\; \lim_a g\Big) \,.$$

On a bien montré (4.4). □

On peut reformuler la définition 4.10 en utilisant la notions de voisinage dans $\mathcal{D}$ d'un point et de voisinage dans $\mathcal{D}$ de l'infini, notions introduites dans les définitions 2.10 et 2.14. On rappelle à ce sujet les proposition 2.15 et remarque 2.17.

Proposition 4.19. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. La proposition* (4.1) *est équivalente à*

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell \,, \quad \exists\, W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}} \,; \quad \forall x \in \mathcal{D} \,, \quad \big((x \;\in\; W) \implies (f(x) \;\in\; V)\big) \tag{4.5}$$

et aussi à

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell \,, \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}} \,. \tag{4.6}$$

Preuve : On montre successivement les implications (4.1) $\Longrightarrow$ (4.5) $\Longrightarrow$ (4.6) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.5) : On suppose (4.1) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. $W := U \cap \mathcal{D}$ est la trace sur $\mathcal{D}$ du voisinage U de a donc $W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in W$, on a $f(x) \in V$ car $f(W) \subset V$. On a montré (4.5).
(4.5) $\Longrightarrow$ (4.6) : On suppose (4.5) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $W \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$ tel que $f(W) \subset V$.

Donc $W \subset f^{-1}(V)$. Par la propriété 2 de la proposition 2.15 (cf. remarque 2.17), $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. On a montré (4.6).
(4.6) $\Longrightarrow$ (4.1) : on suppose (4.6) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_a^{\mathcal{D}}$. Donc il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f^{-1}(V) = U \cap \mathcal{D}$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D} = f^{-1}(V)$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

On remarque une similitude entre cette proposition 4.19 et la proposition 3.38 sur les limites de suite.

4.2.2 Limite en un point.

Dans ce paragraphe, on considère le cas où l'on regarde une limite en un point $a \in \mathbb{R}$. On va introduire des notions de limite à droite, de limite à gauche, et de limite épointée, en a. On donne aussi des formulations concrètes de la définition de ces limites.

Dans le paragraphe 4.2.1, on a vu que la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$, n'avait pas de limite en 0. Cependant, cette fonction est constante égale à 1 sur $]0; +\infty[$. On a envie de dire qu'elle tend vers 1 quand x tend vers 0 en restant strictement positif. À cet effet, on va introduire une notion de limite à droite en 0. C'est l'objet de la définition suivante.

Définition 4.20. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. On pose*

$$\mathcal{D}_{\neq a} := (\mathbb{R} \setminus \{a\}) \cap \mathcal{D}\ , \quad \mathcal{D}_a^+ :=]a; +\infty[\cap \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_a^- :=]-\infty; a[\cap \mathcal{D}\ .$$

1. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$ de f à $\mathcal{D}_{\neq a}$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite épointée de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ \neq}} f(x) := \lim_{\neq a} f := \lim_a f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}\ .$$

2. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_a^+}$ de f à $\mathcal{D}_a^+$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite à droite de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) := \lim_{x \to a^+} f(x) := \lim_{a^+} f := \lim_a f_{|\mathcal{D}_a^+}\ .$$

3. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$. Lorsque la restriction $f_{|\mathcal{D}_a^-}$ de f à $\mathcal{D}_a^-$ admet une limite en a, on dit que cette limite est la limite à gauche de f en a et on note*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) := \lim_{x \to a^-} f(x) := \lim_{a^-} f := \lim_a f_{|\mathcal{D}_a^-}\ .$$

4. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. On dit que f est continue à droite en a si la limite à droite de f en a existe et vaut $f(a)$, i.e. si*

$$f(a) = \lim_{a^+} f\ .$$

5. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$. On dit que f est continue à gauche en a si la limite à gauche de f en a existe et vaut $f(a)$, i.e. si*

$$f(a) = \lim_{a^-} f\ .$$

Quelques commentaires s'imposent. Prenons $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et un réel a adhérent à $\mathcal{D}$. Tout d'abord, la limite en a d'une restriction de f est définie par la définition (4.10) avec f remplacée par cette restriction et $\mathcal{D}$ remplacé par le domaine de définition de la restriction.

On remarque que a peut être adhérent à $\mathcal{D}$ sans être adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$. C'est le cas, par exemple, de $a = 0$ si $\mathcal{D} =]-2;-1] \cup \{0\} \cup [1;3[$.
On remarque que a peut être adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ sans être adhérent à $\mathcal{D}_a^+$. C'est le cas, par exemple, de $a = 0$ si $\mathcal{D} =]-\infty;0]$.
On a déjà expliqué au paragraphe 4.2.1 pourquoi on ne considère que la limite en un endroit a qui est adhérent au domaine de définition de la fonction considérée. Ceci explique l'hypothèse d'adhérence dans tous les points de la définition 4.20.
On note que si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ (resp. $\mathcal{D}_a^-$), il est automatiquement adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ puisque $\mathcal{D}_a^+ \subset \mathcal{D}_{\neq a}$ (resp. $\mathcal{D}_a^- \subset \mathcal{D}_{\neq a}$). On note aussi que, si a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$, il est adhérent à $\mathcal{D}$ puisque $\mathcal{D}_{\neq a} \subset \mathcal{D}$.
Bien sûr, si $\mathcal{D}_{\neq a} = \mathcal{D}$, la limite épointée de f en a est la limite tout court de f en a, si cette dernière existe. C'est le cas pour la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \neq 0$ associe $1/x^2$ et $a = 0$. On verra plus loin $\lim\limits_{0} g$ est $+\infty$.
On a un phénomène similaire pour la limite à droite si $\mathcal{D}_a^+ = \mathcal{D}$ ou pour la limite à gauche si $\mathcal{D}_a^- = \mathcal{D}$. Ces notions de limites sont donc intéressantes dans les autres cas.
Revenons à l'exemple, considéré plus haut, de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On sait que sa limite n'existe pas mais la fonction $f_{]0;+\infty[}$, qui est constante égale à 1, a 1 pour limite en 0 (comme on le vérifiera plus loin). Il en est de même de $f_{]-\infty;0[}$ qui tend elle vers -1 en 0. Comme $f(0) = 0 \notin \{-1;1\}$, f n'est ni continue à droite en 0 ni continue à gauche en 0. Il se trouve que la limite épointée de f en 0 n'existe pas (voir (4.7) ci-dessous).

Proposition 4.21. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à $\mathcal{D}$.*

1. *Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$ telle que a soit adhérent à $\mathcal{D}'$. Si $\lim\limits_{a} f$ existe alors $\lim\limits_{a}(f_{|\mathcal{D}'})$ existe aussi et vaut $\lim\limits_{a} f$.*
2. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et à $\mathcal{D}_a^-$ (il est donc adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$). On a l'équivalence suivante :*
$$\left(\lim_{\neq a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{a^+} f \text{ et } \lim_{a^-} f \text{ existent et coïncident}\right). \tag{4.7}$$
Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_{\neq a} f = \lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f$.
3. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $a \notin \mathcal{D}$, on a l'équivalence*
$$\left(\lim_{a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{\neq a} f \text{ existe}\right). \tag{4.8}$$
Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{\neq a} f$.
4. *On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $a \in \mathcal{D}$, on a l'équivalence*
$$\left(\lim_{a} f \text{ existe}\right) \iff \left(\lim_{\neq a} f \text{ existe et vaut } f(a)\right). \tag{4.9}$$
Lorsqu'une des propositions précédentes est vraie, on a $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{\neq a} f = f(a)$.

Preuve : On remarque tout d'abord que l'on a $\mathcal{D}_{\neq a} = \mathcal{D}_a^- \cup \mathcal{D}_a^+$, que, si $a \notin \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a}$, et que, si $a \in \mathcal{D}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a} \cup \{a\}$. On pose $f_a = f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$, $f^+ = f_{|\mathcal{D}_a^+}$ et $f^- = f_{|\mathcal{D}_a^-}$. On remarque que $(f_a)_{|\mathcal{D}_a^+} = f^+$ et $(f_a)_{|\mathcal{D}_a^-} = f^-$.

1. Soit $\ell = \lim\limits_{a} f$. On montre que $\lim\limits_{a}(f_{|\mathcal{D}'}) = \ell$ en utilisant (4.1) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}'}$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1)). Pour $x \in \mathcal{D}'$ avec $x \in U$, on a, comme $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f_{|\mathcal{D}'}(x) = f(x) \in V$. On a montré que $\lim\limits_{a}(f_{|\mathcal{D}'}) = \ell$.
2. On montre les deux implications de (4.7) et l'affirmation qui la suit.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\ell = \lim\limits_{a} f_a$ existe. On doit vérifier que $\lim\limits_{a} f^+ = \ell = \lim\limits_{a} f^-$.

On applique le 1 avec f remplacée par f_a, $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_a^-$. On obtient $\lim_a f^-$ existe et vaut ℓ.
On applique le 1 avec f remplacée par f_a, $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$ et $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_a^+$. On obtient $\lim_a f^+$ existe et vaut ℓ.
On a montré que $\lim_a f^-$ et $\lim_a f^+$ existent et valent ℓ.
$\Longleftarrow$) : On suppose maintenant que $\lim_a f^+$ et $\lim_a f^-$ existent et sont égales. On appelle ℓ la valeur commune. On montre que $\lim_a f_a$ existe et vaut ℓ, en utilisant (4.1) avec f remplacée par f_a.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U^+ de a tel que $f^+(U^+ \cap \mathcal{D}_a^+) \subset V$ (cf. (4.1) pour f^+). Par hypothèse, il existe aussi un voisinage U^- de a tel que $f^-(U^- \cap \mathcal{D}_a^-) \subset V$ (cf. (4.1) pour f^-). Soit $U = U^+ \cap U^-$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Soit $x \in \mathcal{D}_{\neq a}$ avec $x \in U$. On a $x \neq a$. Si $x > a$, $x \in \mathcal{D}_a^+$ et, comme $U \subset U^+$, $x \in U^+$. Comme $x \in (U^+ \cap \mathcal{D}_a^+)$, $f(x) \in V$. Si $x < a$, $x \in \mathcal{D}_a^-$ et, comme $U \subset U^-$, $x \in U^-$. Comme $x \in (U^- \cap \mathcal{D}_a^-)$, $f(x) \in V$. On a montré que $\lim_a f_a = \ell$.

3. On suppose $a \notin \mathcal{D}$ donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\neq a}$ et $f = f_{|\mathcal{D}_{\neq a}}$. On a donc (4.8) et égalité des limites en cas d'existence.
4. On prend $a \in \mathcal{D}$. On montre les deux implications de (4.9) et l'affirmation qui la suit.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim_a f$ existe. On sait qu'elle vaut $f(a)$ (cf. proposition 4.13). On applique le 1 avec $\mathcal{D}'$ remplacé par $\mathcal{D}_{\neq a}$. On obtient $\lim_{\neq a} f$ existe et vaut $f(a)$.
$\Longleftarrow$) : On suppose que $\lim_a f_a$ existe et vaut $f(a)$. On doit vérifier que $\lim_a f$ existe et vaut $f(a)$. On utilise (4.1) avec ℓ remplacée par $f(a)$.
Soit $V \in \mathcal{V}_{f(a)}$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de a tel que $f_a(U \cap \mathcal{D}_{\neq a}) \subset V$ (cf. (4.1)). Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$. Si $x = a$ alors $f(x) = f(a) \in V$, car V est un voisinage de $f(a)$ (cf. proposition 2.15). Si $x \neq a$, $x \in \mathcal{D}_{\neq a}$. Comme $x \in U$, $x \in U \cap \mathcal{D}_{\neq a}$ donc $f(x) = f_a(x) \in V$. On a montré que $\lim_a f = f(a)$. □

Maintenant, on va voir des reformulations équivalentes et plus maniables de la définition 4.10 lorsque $a \in \mathbb{R}$ mais en distinguant les cas où la limite est finie de ceux où la limite est infinie.

On commence par des reformulations équivalentes dans le cas d'une limite finie en un point. On a toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 4.22. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. La proposition* (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.10}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.11}$$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists\, \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.12}$$

C'est surtout la proposition (4.11) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Preuve de la proposition 4.22 : On montre successivement les implications (4.1) $\implies$ (4.10) $\implies$ (4.11) $\implies$ (4.12) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.10) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.10).
(4.10) $\implies$ (4.11) : On suppose (4.10) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $U \in \mathcal{V}_a$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages réels de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a; \delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ tel que $|x - a| < \delta$, on a $x \in I(a; \delta[$, donc $x \in U$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.11).

(4.11) $\Longrightarrow$ (4.12) : On suppose (4.11) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$. Comme $|f(x) - \ell| < \epsilon$, $f(x) \in D(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Donc $f(x) \in V$. On a montré (4.12).
(4.12) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.12) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $f(x) \in V$. Soit $U = I(a;\delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $|x-a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

Voyons quelques exemples de limites finies en un point. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, un point $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $c \in \mathbb{K}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c sur $\mathcal{D}$. On s'attend à ce qu'elle tende vers c en a. Vérifions-le en utilisant (4.11) avec ℓ remplacée par c.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = 2023$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$. On a bien montré que $\lim\limits_{a} f = c$.
En particulier, f est continue sur $\mathcal{D}$ (cf. définition 4.14).
Voyons un autre exemple. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et un point $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $\mathrm{Id} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $x \in \mathcal{D}$ associe $\mathrm{Id}(x) = x$. On devine que la limite de Id en a est a. Montrons-le en utilisant (4.11) avec ℓ remplacée par a.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $|\mathrm{Id}(x) - a| = |x-a| < \delta$ et, comme $\delta = \epsilon$, $|\mathrm{Id}(x) - a| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim\limits_{a} \mathrm{Id} = a$.
En particulier, la fonction Id est continue sur $\mathcal{D}$ (cf. définition 4.14).
Dans la preuve précédente, on aurait pu aussi prendre $\delta = (\epsilon/2)$, ou $\delta = (\epsilon/3)$ ou même n'importe quel nombre dans $]0;\epsilon]$.
Un exemple similaire est le suivant. Soit $b \in \mathbb{R}$ et $t_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $t_b(x) = x - b$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on devine que t_b tend vers $a - b$ en a. Montrons-le en utilisant (4.11) avec ℓ remplacée par $a - b$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x-a| < \delta$, on a $|t_b(x) - (a-b)| = |x - b - (a-b)| = |x-a| < \delta$ et, comme $\delta = \epsilon$, $|t_b(x) - (a-b)| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim\limits_{a} t_b = a - b$. En particulier, la fonction t_b est continue sur $\mathbb{R}$ (cf. définition 4.14).
On a montré la

Proposition 4.23. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide $\mathbb{R}$ et $(b;c) \in \mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$ adhérent à $\mathcal{D}$. On considère les fonctions : $\mathrm{Id}_\mathcal{D} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{Id}_\mathcal{D}(x) = x$, pour $x \in \mathcal{D}$; $g_c : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par $g_c(x) = c$, pour $x \in \mathcal{D}$; $t_b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par $t_b(x) = x - b$, pour $x \in \mathbb{R}$.*

1. *Les fonctions $\mathrm{Id}_\mathcal{D}$, g_c et t_b sont continues.*
2. *En a, $\mathrm{Id}_\mathcal{D}$ admet a pour limite et g_c admet c pour limite.*

Revenons à l'exemple de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. On sait qu'elle n'a pas de limite en 0 (cf. proposition 4.17). On a affirmé plus haut qu'elle admet des limites à droite et à gauche en 0 qui sont différentes. Vérifions ce point. Plus précisément, montrons que $\lim\limits_{0^+} f = 1$ et $\lim\limits_{0^-} f = -1$.
Comme $f_{|\mathbb{R}^{+*}}$ est constante égale à 1 et comme $f_{|\mathbb{R}^{-*}}$ est constante égale à -1, on a le résultat cherché d'après le cas constant traité plus haut. En utilisant (4.7), on retrouve que $\lim\limits_{\neq 0} f$ n'existe pas. Par (4.9), on retrouve aussi que $\lim\limits_{0} f$ n'existe pas.
Toujours pour cette fonction f, que se passe-t-il en un point $a \neq 0$? Si $a > 0$ alors f coïncide avec la fonction constante égale à 1 sur le voisinage $]a/2;+\infty[$ de a. De plus, cette fonction constante à une limite en a. Donc, par la proposition 4.18, $\lim\limits_{a} f$ existe et vaut $\lim\limits_{x \to a} 1 = 1$. Si maintenant $a < 0$, on obtient par le même raisonnement que $\lim\limits_{a} f$ existe et vaut $\lim\limits_{x \to a}(-1) = -1$. La fonction f est donc continue en tout point $a \in \mathbb{R}^*$.
Donnons un exemple de fonction complexe. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$fx) \;=\; \frac{2 + 3ix}{1 + x^2}\,.$$

On devine que $\lim_0 f$ existe et vaut 2. On le montre en utilisant (4.11).
Tout d'abord, on remarque que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(x) - 2| = \left|\frac{2 + 3ix - 2(1+x^2)}{1+x^2}\right| = \frac{|3ix - 2x^2|}{1+x^2} \leq |3ix - 2x^2|$$

car $1 + x^2 \geq 1$. De plus, $|3ix - 2x^2| = |x| \cdot |3i - 2x| \leq |x|(3 + 2|x|)$.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta > 0$ tel que $5\delta \leq \epsilon$ et $\delta \leq 1$. C'est possible puisque l'on peut prendre $\delta = \min(1; (\epsilon/5))$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| < \delta$, on a, d'après le calcul précédent, $|f(x) - 2| \leq |x|(3 + 2|x|) < \delta(3 + 2\delta) \leq \delta \cdot 5 \leq \epsilon$. On a montré que $\lim_0 f = 2$.
Comme 0 est dans le domaine de définition de f et que la limite de f en zéro existe, f est continue en 0.

On reformule maintenant la définition des limites infinies en un point. On se place donc dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.24. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $a \in \mathbb{R}$, qui est un point adhérent à $\mathcal{D}$.*
Pour $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.13}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.14}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.15}$$

Pour $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.16}$$

$$\forall L > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.17}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((|x - a| < \delta) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.18}$$

C'est surtout les propositions (4.14) et (4.17) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Preuve de la proposition 4.24 : On traite d'abord le cas où $\ell = +\infty$.
On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.13) $\implies$ (4.14) $\implies$ (4.15) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.13) : On suppose (4.1) vraie (avec $\ell = +\infty$). Soit $L > 0$. Pour le voisinage $]L; +\infty[$ de $+\infty$, il existe, par hypothèse, un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a donc $f(x) \in]L; +\infty[$ soit $f(x) > L$. On a montré (4.13).
(4.13) $\implies$ (4.14) : On suppose (4.13) vraie. Soit $L > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L; +\infty[$. Comme U est un voisinage réel de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a; \delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, $x \in I(a; \delta[$ donc $x \in U$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in]L; +\infty[$ soit $f(x) > L$. On a montré (4.14).
(4.14) $\implies$ (4.15) : On suppose (4.14) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Il existe donc $L > 0$ tel que $]L; +\infty[\subset V$. Par hypothèse pour ce L, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) > L$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$. On a $f(x) > L$ donc $f(x) \in]L; +\infty[\subset V$ soit $f(x) \in V$. On a montré (4.15).
(4.15) $\implies$ (4.1) : On suppose (4.15) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par hypothèse, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - a| < \delta$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U = I(a; \delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|x - a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Passons maitenant au cas où $\ell = -\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.16) $\implies$ (4.17) $\implies$ (4.18) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.16) : On suppose (4.1) vraie (avec $\ell = -\infty$). Soit $L > 0$. Pour le voisinage $]-\infty; -L[$ de $-\infty$, il existe, par hypothèse, un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]-\infty; -L[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a donc $f(x) \in]-\infty; -L[$ soit $f(x) < -L$. On a montré (4.16).

(4.16) $\Longrightarrow$ (4.17) : On suppose (4.16) vraie. Soit $L > 0$. Par hypothèse, il existe un voisinage réel U de a tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]-\infty; -L[$. Comme U est un voisinage réel de a, il existe $\delta > 0$ tel que $I(a;\delta[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, $x \in I(a;\delta[$ donc $x \in U$. Comme $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in]-\infty; -L[$ soit $f(x) < -L$. On a montré (4.17).
(4.17) $\Longrightarrow$ (4.18) : On suppose (4.17) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Il existe donc $L > 0$ tel que $]-\infty; -L[\subset V$. Par hypothèse pour ce L, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on ait $f(x) < -L$. Soit $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$. On a $f(x) < -L$ donc $f(x) \in]-\infty; -L[\subset V$ soit $f(x) \in V$. On a montré (4.18).
(4.18) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.18) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par hypothèse, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $|x-a| < \delta$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U = I(a;\delta[$. C'est un voisinage réel de a. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|x-a| < \delta$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

Étudions deux exemples. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x > 0$ associe $f(x) = 1/x$. On remarque que 0 est bien adhérent à $\mathbb{R}^{+*}$. Montrons que $\lim\limits_{0} f$ existe et vaut $+\infty$, en utilisant (4.14).
Soit $L > 0$. On choisit $\delta = 1/L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $|x| < \delta$, on a $0 < x < 1/L$ donc $f(x) = 1/x > L$. On a montré (4.14).
Soit $h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui $x \neq 0$ associe $h(x) = 1/x$. On devine que h n'a pas de limite en 0 car ses limites à droite et à gauche existent mais sont différentes. Montrons cela.
La restriction de h à $\mathbb{R}^* \cap]0; +\infty[$ est f et $\lim\limits_{0} f = +\infty$. Donc $\lim\limits_{0^+} h$ existe et vaut $+\infty$.
Appelons g la restriction de h à $\mathbb{R}^* \cap]-\infty; 0[= \mathbb{R}^{-*}$. Montrons que $\lim\limits_{0} g$ existe et vaut $-\infty$, en utilisant (4.17) avec f remplacée par g.
Soit $L > 0$. On choisit $\delta = 1/L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}^{-*}$ avec $|x| < \delta$, on a $-1/L < x < 0$ donc $1/(-Lx) > 1$ et donc $g(x) = 1/x < -L$. On a montré (4.17).
Ainsi $\lim\limits_{0^-} h$ existe et vaut $-\infty \neq +\infty$. Donc h n'a pas de limite en 0 par (4.7) (avec f remplacée par h).

4.2.3 Prolongement par continuité.

On reste dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 4.25. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \setminus \mathcal{D})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que $\ell = \lim\limits_{a} f$ existe dans $\mathbb{K}$. L'application $\hat{f} : \mathcal{D} \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\hat{f}(x) = f(x)$, si $x \in \mathcal{D}$, et $\hat{f}(a) = \ell$, est appelé prolongement par continuité de f en a.*

Remarquons que, dans le cadre de cette définition 4.25, le prolongement $\hat{f}$ de f en a est automatiquement continue en a. En effet, la limite $\lim\limits_{\neq a} \hat{f}$ existe et vaut $\lim\limits_{a} f$, puisque $(\hat{f})_{|\mathcal{D}_{\neq a}} = f$. De plus, comme $\hat{f}(a) = \ell = \lim\limits_{\neq a} \hat{f}$, la limite de $\hat{f}$ en a existe, par (4.9) avec f remplacée par $\hat{f}$. D'après la définition 4.14, $\hat{f}$ est continue en a.
Voyons des exemples et un contre-exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/|x|$. Peut-on la prolonger par continuité en 0 ? On étudie sa limite en 0. On remarque que la restriction de f à $\mathbb{R}^{+*}$ est constante égale à 1 donc elle tend vers 1 en 0. Donc $\lim\limits_{0^+} f$ existe et vaut 1. Comme la restriction de f à $\mathbb{R}^{-*}$ est constante égale à -1 donc elle tend vers -1 en 0. Donc $\lim\limits_{0^-} f$ existe et vaut -1. Comme $\lim\limits_{0^+} f \neq \lim\limits_{0^-} f$, f n'a pas de limite en 0. Elle ne peut donc pas être prolongée par continuité en 0.
En revanche, on peut prolonger par continuité en 0 la restriction f^+ de f à $\mathbb{R}^{+*}$. La limite de f^+ en 0 est en fait la limite à droite de f en 0, qui est $1 \in \mathbb{R}$. Donc f^+ admet un prolongement par continuité en 0 qui est la fonction $\widehat{f^+} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $\widehat{f^+}(x) = 1$.
On peut aussi prolonger par continuité en 0 la restriction f^- de f à $\mathbb{R}^{-*}$, puisque f^- a pour limite $-1 \in \mathbb{R}$ en 0. Son prolongement par continuité en 0 est la fonction $\widehat{f^-} : \mathbb{R}^- \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \geq 0$, $\widehat{f^-}(x) = -1$.
Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \neq 0$, $g(x) = x^2/x$. Pour $x \neq 0$, on a $g(x) = x$.

Comme $\lim_{x\to 0} x = 0$, on a $\lim_{\substack{x\to 0\\ \neq}} x = 0$, par le 3 de la proposition 4.21, donc $\lim_{0} g$ existe et vaut 0. Le prolongement par continuité de g en 0 est donc l'application $\hat{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\hat{g}(x) = g(x) = x^2/x = x$, si $x \neq 0$, et $\hat{g}(0) = 0$. Donc $\hat{g} = \mathrm{Id}$.

4.2.4 Limite à l'infini.

On reprend ici la démarche suivie dans le paragraphe 4.2.2 précédent mais pour $a \in \{-\infty; +\infty\}$. Comme il n'y a pas lieu d'introduire des limites à gauche ou à droite dans ce cas, on se concentre sur des reformulations concrètes des limites.

On commence par les limites finies. On a donc $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.26. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \{-\infty; +\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{K}$.*
Pour $a = +\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.19}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.20}$$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{\ell}\,, \quad \exists\, A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.21}$$

Pour $a = -\infty$, la proposition (4.1) est équivalente aux propositions suivantes :

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.22}$$

$$\forall\, \epsilon > 0\,, \quad \exists\, A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,, \tag{4.23}$$

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_{\ell}\,, \quad \exists\, A > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.24}$$

C'est surtout les propositions (4.20) et (4.23) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite. Donnons un exemple. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On devine que sa limite en $+\infty$ existe et vaut 0. Vérifions-le avec (4.20).
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $A = 1/\epsilon$. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$ avec $x > A$, on a $f(x) = 1/x < 1/A = \epsilon$. On a montré que $\lim_{x\to+\infty} (1/x) = 0$.

Preuve de la proposition 4.26 : On traite d'abord le cas où $a = +\infty$.
On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.19) $\implies$ (4.20) $\implies$ (4.21) $\implies$ (4.1).
(4.1) $\implies$ (4.19) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell; \epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.19).
(4.19) $\implies$ (4.20) : On suppose (4.19) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A; +\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A; +\infty[\subset U$ donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.20).
(4.20) $\implies$ (4.21) : On suppose (4.20) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{\ell}$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse pour cet ϵ, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$ soit $f(x) \in D(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell; \epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a montré (4.21).
(4.21) $\implies$ (4.1) : On suppose (4.21) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{\ell}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A; +\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Voyons maintenant le cas $a = -\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\implies$ (4.22) $\implies$ (4.23) $\implies$ (4.24) $\implies$ (4.1).

(4.1) $\Longrightarrow$ (4.22) : On suppose (4.1) vraie. Soit $\epsilon > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $V := D(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et avec le voisinage $V := I(\ell;\epsilon[$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe $U \in \mathcal{V}_{-\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset V$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in V$, c'est-à-dire $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.22).
(4.22) $\Longrightarrow$ (4.23) : On suppose (4.22) vraie. Soit $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $-\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]-\infty;-A[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, $x \in]-\infty;-A[\subset U$ donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré (4.23).
(4.23) $\Longrightarrow$ (4.24) : On suppose (4.23) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par définition des voisinages de ℓ, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par hypothèse pour cet ϵ, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on a donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$ soit $f(x) \in D(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $f(x) \in I(\ell;\epsilon[\subset V$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On a montré (4.24).
(4.24) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.24) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]-\infty;-A[$. C'est un voisinage de $-\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x < -A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

On traite les limites infinies. On prend donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Proposition 4.27. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \{-\infty;+\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$ et $\ell \in \{-\infty;+\infty\}$.*
Pour $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,,\quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.25}$$

$$\forall L > 0\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x > A) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.26}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.27}$$

Pour $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,,\quad \exists U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.28}$$

$$\forall L > 0\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x > A) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.29}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x > A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.30}$$

Pour $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,,\quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x \in U) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.31}$$

$$\forall L > 0\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x < -A) \implies (f(x) > L)\big)\,, \tag{4.32}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{+\infty}\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.33}$$

Pour $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$, la proposition (4.1) *est équivalente aux propositions suivantes :*

$$\forall L > 0\,,\quad \exists U \in \mathcal{V}_{-\infty}\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x \in U) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.34}$$

$$\forall L > 0\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x < -A) \implies (f(x) < -L)\big)\,, \tag{4.35}$$

$$\forall V \in \mathcal{V}_{-\infty}\,,\quad \exists A > 0\,;\quad \forall x \in \mathcal{D}\,,\quad \big((x < -A) \implies (f(x) \in V)\big)\,. \tag{4.36}$$

C'est surtout les propositions (4.26), (4.29), (4.32) et (4.35) que l'on utilisera pour montrer, avec la définition, l'existence d'une telle limite.

Preuve de la proposition 4.27 : On traite successivement les quatres cas.
Premier cas : $a = +\infty$ et $\ell = +\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.25) $\Longrightarrow$ (4.26) $\Longrightarrow$ (4.27) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.25) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $]L;+\infty[$ de $+\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L;+\infty[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc

$f(x) \in]L;+\infty[$, c'est-à-dire $f(x) > L$. On a montré (4.25).
(4.25) $\Longrightarrow$ (4.26) : On suppose (4.25) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A;+\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A;+\infty[\subset U$ donc $f(x) > L$. On a montré (4.26).
(4.26) $\Longrightarrow$ (4.27) : On suppose (4.26) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $L > 0$ tel que $]L;+\infty[\subset V$. Par hypothèse pour cet L, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) > L$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $f(x) > L$ soit $f(x) \in]L;\infty[\subset V$. On a montré (4.27).
(4.27) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.27) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A;+\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Deuxième cas : $a = +\infty$ et $\ell = -\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.28) $\Longrightarrow$ (4.29) $\Longrightarrow$ (4.30) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.28) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $]-\infty;-L[$ de $-\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{+\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]-\infty;-L[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in]-\infty;-L[$, c'est-à-dire $f(x) < -L$. On a montré (4.28).
(4.28) $\Longrightarrow$ (4.29) : On suppose (4.28) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]A;+\infty[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, $x \in]A;+\infty[\subset U$ donc $f(x) < -L$. On a montré (4.29).
(4.29) $\Longrightarrow$ (4.30) : On suppose (4.29) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $L > 0$ tel que $]-\infty;-L[\subset V$. Par hypothèse pour cet L, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) < -L$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a donc $f(x) < -L$ soit $f(x) \in]-\infty;-L[\subset V$. On a montré (4.30).
(4.30) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.30) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]A;+\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x > A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Troisième cas : $a = -\infty$ et $\ell = +\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.31) $\Longrightarrow$ (4.32) $\Longrightarrow$ (4.33) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.31) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $]L;+\infty[$ de $+\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{-\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]L;+\infty[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in]L;+\infty[$, c'est-à-dire $f(x) > L$. On a montré (4.31).
(4.31) $\Longrightarrow$ (4.32) : On suppose (4.31) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $-\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]-\infty;-A[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, $x \in]-\infty;-A[\subset U$ donc $f(x) > L$. On a montré (4.32).
(4.32) $\Longrightarrow$ (4.33) : On suppose (4.32) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $L > 0$ tel que $]L;+\infty[\subset V$. Par hypothèse pour cet L, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on ait $f(x) > L$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on a donc $f(x) > L$ soit $f(x) \in]L;\infty[\subset V$. On a montré (4.33).
(4.33) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.33) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{+\infty}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]-\infty;-A[$. C'est un voisinage de $-\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x < -A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1).
Quatrième cas : $a = -\infty$ et $\ell = -\infty$. On montre successivement les implications : (4.1) $\Longrightarrow$ (4.34) $\Longrightarrow$ (4.35) $\Longrightarrow$ (4.36) $\Longrightarrow$ (4.1).
(4.1) $\Longrightarrow$ (4.34) : On suppose (4.1) vraie. Soit $L > 0$. En utilisant l'hypothèse avec le voisinage $]-\infty;-L[$ de $-\infty$, il existe $U \in \mathcal{V}_{-\infty}$ tel que $f(U \cap \mathcal{D}) \subset]-\infty;-L[$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}$ donc $f(x) \in]-\infty;-L[$, c'est-à-dire $f(x) < -L$. On a montré (4.34).
(4.34) $\Longrightarrow$ (4.35) : On suppose (4.34) vraie. Soit $L > 0$. Par l'hypothèse, il existe un voisinage U de $-\infty$ tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $A > 0$ tel que $]-\infty;-A[\subset U$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, $x \in]-\infty;-A[\subset U$ donc $f(x) < -L$. On a montré (4.35).
(4.35) $\Longrightarrow$ (4.36) : On suppose (4.35) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par définition des voisinages de $-\infty$, il existe $L > 0$ tel que $]-\infty;-L[\subset V$. Par hypothèse pour cet L, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on ait $f(x) < -L$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on a donc $f(x) < -L$ soit $f(x) \in]-\infty;-L[\subset V$. On a montré (4.36).
(4.36) $\Longrightarrow$ (4.1) : On suppose (4.36) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_{-\infty}$. Par hypothèse, il existe $A > 0$ tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A$, on ait $f(x) \in V$. Soit $U =]-\infty;-A[$. C'est un voisinage de $-\infty$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec

$x \in U$, on a $x < -A$ donc $f(x) \in V$. On a montré (4.1). □

On traite quelques exemples. On reprend la fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $\mathrm{Id}(x) = x$. $-\infty$ est adhérent à $\mathbb{R}$. On devine que la limite $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{Id}$ existe et vaut $-\infty$. On le montre en utilisant (4.35).
Soit $L > 0$. On choisit $A = L > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x < -A$, on a $x < -L$. On a montré (4.35) et donc que $\lim\limits_{-\infty} \mathrm{Id} = -\infty$.
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -x^2$. On devine qu'elle a $-\infty$ pour limite en $+\infty$. On le montre en utilisant (4.29).
Soit $L > 0$. On choisit $A = \sqrt{L} > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$ avec $x > A$, on a $x^2 > A^2$ donc $g(x) = -x^2 < -A^2 = -L$. On a montré (4.29).

4.3 Opérations sur les limites de fonctions.

Comme pour les limites de suites, on va voir que des opérations de base sur les fonctions se transmettent aux limites de fonctions. On commence par des propriétés générales puis on considère séparément les cas de limites finies et de limites infinies.

4.3.1 Composition.

On se place dans le cas général où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Étant donnée une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, on peut la composer à droite par une fonction réelle $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$. Que peut-on dire des limites de $f \circ g$ à partir de celles de f et g ?

Proposition 4.28. *Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}'$ et tel que $\ell' := \lim\limits_{a} g$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Alors ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$. On suppose, de plus, que $\ell := \lim\limits_{\ell'} f$ existe. Alors $\lim\limits_{a} (f \circ g)$ existe et vaut ℓ, i.e.*

$$\lim_{a} (f \circ g) \;=\; \lim_{\left(\lim\limits_{a} g\right)} f \,.$$

Preuve : Vérifions d'abord que ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $W \in \mathcal{V}_{\ell'}$. Comme ℓ' est la limite de g en a, il existe un voisinage U de a tel que $g(U \cap \mathcal{D}') \subset W$. Soit $x \in U \cap \mathcal{D}'$ (qui est non vide car a est adhérent à $\mathcal{D}'$). On a donc $g(x) \in W$ et aussi $g(x) \in \mathcal{D}$. Donc $(W \cap \mathcal{D}) \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour tout voisinage W de ℓ', ℓ' est adhérent à $\mathcal{D}$.
On montre que la limite en a de $f \circ g$ existe et vaut ℓ en utilisant (4.1) avec f remplacée par $f \circ g$.
Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Comme ℓ est la limite de f en ℓ', il existe un voisinage W de ℓ' tel que $f(W \cap \mathcal{D}) \subset V$ (cf. (4.1) avec a remplacé par ℓ'). Comme ℓ' est la limite de g en a, il existe un voisinage U de a tel $g(U \cap \mathcal{D}') \subset W$ (cf. (4.1) avec f remplacée par g et ℓ remplacée par ℓ'). Pour $x \in \mathcal{D}'$ avec $x \in U$, on a $x \in U \cap \mathcal{D}'$ donc $g(x) \in W$. Comme g est à valeurs dans $\mathcal{D}$, $g(x) \in \mathcal{D}$. Donc $g(x) \in W \cap \mathcal{D}$. D'où $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \in V$. On a montré que $\lim\limits_{a}(f \circ g) = \ell$. □

On a vu dans la proposition 4.23 que les translations t_b (pour $b \in \mathbb{R}$) sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. Ceci permet d'obtenir le corollaire suivant pour les limites en un point de $\mathbb{R}$.

Corollaire 4.29. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathbb{R}$*
On suppose que a est un point adhérent à $\mathcal{D}$ et que $\ell = \lim\limits_{a} f$ existe. Alors 0 est un point adhérent au domaine de définition de $f \circ t_{-a}$ et ℓ est aussi la limite en 0 de cette fonction $f \circ t_{-a}$, i.e.

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; \lim_{a} f \;=\; \lim_{0} (f \circ t_{-a}) \;=\; \lim_{h \to 0} f(a + h) \,.$$

Réciproquement, si 0 *est un point adhérent au domaine de définition de* $f \circ t_{-a}$ *et si la limite en* 0 *de* $f \circ t_{-a}$ *existe alors* a *est un point adhérent à* $\mathcal{D}$*, la limite en* a *de* f *existe et les deux limites sont égales.*

Preuve : On remarque tout d'abord que la restriction de t_a à $\mathcal{D}$ est bijective de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_a := t_a(\mathcal{D})$. De plus, sa bijection réciproque est la restriction à $\mathcal{D}_a$ de t_{-a}. On note que $f \circ t_{-a}$ est définie sur $\mathcal{D}_a$.

a). On suppose que a est un point adhérent à $\mathcal{D}$ et que $\ell := \lim_a f$ existe. Comme t_a est continue en a, sa limite en a est $t_a(a) = 0$. Il en est de même de la restriction de t_a à $\mathcal{D}$, d'après le 1 de la proposition 4.21, et 0 est un point adhérent à $t_a(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_a$, d'après la proposition 4.28. Comme t_{-a} est continue en 0, sa limite en 0 est $t_{-a}(0) = a$. Il en est de même de la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, d'après le 1 de la proposition 4.21. Par la proposition 4.28 avec g remplacée par la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, a remplacé par 0 et ℓ' remplacée par a, la limite en 0 de $f \circ t_{-a}$ existe et vaut ℓ.

b). On suppose 0 est un point adhérent à $\mathcal{D}_a$ et que $\ell := \lim_0 (f \circ t_{-a})$ existe. Comme t_{-a} est continue en 0, sa limite en 0 est $t_{-a}(0) = a$. Il en est de même de la restriction de t_{-a} à $\mathcal{D}_a$, d'après le 1 de la proposition 4.21, et a est adhérent à $t_{-a}(\mathcal{D}_a) = \mathcal{D}$, d'après la proposition 4.28. Comme t_a est continue en a, sa limite en a est $t_a(a) = 0$. Il en est de même de la restriction de t_a à $\mathcal{D}$, d'après le 1 de la proposition 4.21. Par la proposition 4.28 avec f remplacée par $f \circ t_{-a}$, g remplacée par t_a, et ℓ' remplacée par 0, la limite en a de $(f \circ t_{-a}) \circ t_a$ existe et vaut ℓ. Comme $(f \circ t_{-a}) \circ t_a = f \circ (t_{-a} \circ t_a) = f$, on en déduit que la limite en a de f existe et vaut ℓ. □

Concernant la continuité, on a le corollaire suivant.

Corollaire 4.30. *Soit* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *deux parties non vides de* $\mathbb{R}$*. Soit* $g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}$ *et* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$*. On suppose que* g *est continue sur une partie* $\mathcal{D}'_0$ *de* $\mathcal{D}'$*, que* f *est continue sur une partie* $\mathcal{D}_0$ *de* $\mathcal{D}$ *et que* $g(\mathcal{D}'_0) \subset \mathcal{D}_0$*. Alors* $f \circ g$ *est continue sur* $\mathcal{D}'_0$*.*

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}'_0$. Par l'hypothèse sur g, g est continue en a. Comme $g(\mathcal{D}'_0) \subset \mathcal{D}_0$ et $a \in \mathcal{D}'_0$, $g(a) \in \mathcal{D}_0$. De plus $\lim_a g = g(a) \in \mathbb{R}$ (cf. proposition 4.13). Par l'hypothèse sur f, f est continue en $g(a)$. Donc $\lim_{g(a)} f$ existe. Par la proposition 4.28, $\lim_a (f \circ g)$ existe donc $f \circ g$ est continue en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathcal{D}'_0$, $f \circ g$ est continue sur $\mathcal{D}'_0$. □

4.3.2 Propriétés générales des limites de fonction.

On rappelle que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Remarque 4.31. *Soit* $\mathcal{D}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ *qui est adhérent à* $\mathcal{D}$*. Soit* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ *et* $\ell \in \mathbb{K}$*. D'après les propositions 4.22 et 4.26,* $(\lim_a f = \ell)$ *est équivalente à*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \big((x \in U) \implies (|f(x) - \ell| < \epsilon)\big)\,. \tag{4.37}$$

Proposition 4.32. *Soit* $\mathcal{D}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ *qui est adhérent à* $\mathcal{D}$*. Soit* $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$*,* $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ *et* $(\lambda; \ell; \ell') \in \mathbb{K}^3$*.*

1. *Théorème des gendarmes. On suppose qu'il existe une fonction* $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tendant vers* 0 *en* a *et un voisinage* U *de* a *tels que*

$$\forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \big((x \in U) \implies \big(|f(x) - \ell| \leq h(x)\big)\,. \tag{4.38}$$

Alors $\lim_a f$ *existe et vaut* ℓ*.*

2. *Propriétés du module (ou de la valeur absolue).*

$$\left(\lim_a f = \ell\right) \iff \left(\lim_a |f - \ell| = 0\right). \tag{4.39}$$

En particulier, quand $\ell = 0$, on a

$$\left(\lim_a f = 0\right) \iff \left(\lim_a |f| = 0\right). \tag{4.40}$$

De plus, on a

$$\left(\lim_a f = \ell\right) \implies \left(\lim_a |f| = |\ell|\right). \tag{4.41}$$

3. *On suppose que $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$. Alors les limites suivantes existent et on a*

$$\lim_a (f+g) = \ell + \ell', \quad \lim_a (\lambda f) = \lambda \cdot \ell, \quad \lim_a (fg) = \ell \cdot \ell'.$$

Si, de plus, $\ell \neq 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que la fonction $1/f$ soit définie sur $U \cap \mathcal{D}$ et on a

$$\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}.$$

4. *On suppose que $a \in \mathcal{D}$ et que f et g sont continues en a. Alors $f+g$, λf et fg sont continues en a. Si, de plus, $f(a) \neq 0$, alors il existe un voisinage U de a tel que la fonction $1/f$ soit définie sur $U \cap \mathcal{D}$, et $1/f$ est continue en a.*
5. *On suppose que f et g sont continues sur une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$. Alors $f+g$, λf et fg sont continues sur $\mathcal{D}'$. Si, de plus, f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}'$, alors $1/f$ est définie et continue sur $\mathcal{D}'$.*

Preuve : On adapte les preuves des propositions 3.45 et 3.46.

1. Sous les hypothèses de l'énoncé, on montre que f tend vers ℓ en a en utilisant (4.37).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme h tend vers 0 en a, il existe, par (4.37) avec f remplacée par h et ℓ remplacée par 0, un voisinage U_0 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_0$, on ait $|h(x)| < \epsilon$. Soit $U_1 = U \cap U_0$. C'est un voisinage de a (cf. proposition 2.15). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on a $x \in U$ donc, par (4.38), $|f(x) - \ell| \leq h(x)$ et, comme $x \in U_0$, $h(x) \leq |h(x)| < \epsilon$. Donc $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que f tend vers ℓ en a.
2. On remarque que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\big||f - \ell|(x) - 0\big| = \big||f(x) - \ell| - 0\big| = |f(x) - \ell|.$$

   Donc (4.37) est identique à (4.37) pour f remplacée $|f - \ell|$ et ℓ remplacée par 0. En utilisant la remarque 4.31 pour f et $|f - \ell|$, on obtient l'équivalence (4.39).
   Montrons (4.41). On suppose que $\lim_a f = \ell$. D'après ce que l'on vient de démontrer, la fonction $|f - \ell|$ tend vers 0 en a. De plus, pour $x \in \mathcal{D}$, on a, par (2.6),

$$\big||f(x)| - |\ell|\big| \leq |f(x) - \ell|$$

   donc, par le théorème des gendarmes appliqué à $|f|$ (cf. 1), $\lim_a |f| = |\ell|$. On a montré (4.41).
3. a). On montre que $\ell + \ell'$ est limite de $f+g$ en a, c'est-à-dire la proposition (4.37) avec f remplacée par $f+g$ et ℓ remplacée par $\ell + \ell'$.
   On remarque tout d'abord que, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$\big|(f+g)(x) - (\ell + \ell')\big| = \big|(f(x) - \ell) + (g(x) - \ell')\big| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - \ell'|, \tag{4.42}$$

   d'après l'inégalité triangulaire (cf. (2.5) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et (2.11) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < (\epsilon/2)$. De même, comme $\lim_a g = \ell'$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_2$, on ait $|g(x) - \ell'| < (\epsilon/2)$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|f(x) - \ell| < (\epsilon/2)$, car $x \in U_1$, et $|g(x) - \ell'| < (\epsilon/2)$, car $x \in U_2$. Donc, par (4.42), $|(f+g)(x) - (\ell + \ell')| < 2(\epsilon/2) = \epsilon$. On a montré que $f+g$ tend vers $\ell + \ell'$ en a.

b). On montre maintenant que $\ell \cdot \ell'$ est limite de $f \cdot g$ en a, c'est-à-dire la proposition (4.37) avec f remplacée par fg et ℓ remplacée par $\ell\ell'$.
On écrit tout d'abord, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$$(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell') = f(x) \cdot (g(x) - \ell') + (f(x) - \ell) \cdot \ell' .$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\big|(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell')\big| \leq |f(x)| \cdot \big|g(x) - \ell'\big| + |f(x) - \ell| \cdot |\ell'| . \tag{4.43}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit

$$\epsilon' \in \left]0 ; \min\left(1; \frac{\epsilon}{|\ell| + |\ell'| + 1}\right)\right] .$$

Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon'$. De même, comme $\lim_a g = \ell'$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_2$, on ait $|g(x) - \ell'| < \epsilon'$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon'$, car $x \in U_1$, et $|g(x) - \ell'| < \epsilon'$, car $x \in U_2$. Donc, par (4.43) et le choix de ϵ',

$$\big|(f \cdot g)(x) - (\ell \cdot \ell')\big| < \big(\epsilon' + |\ell|\big) \cdot \epsilon' + \epsilon'|\ell'| \leq \epsilon' \cdot \big(1 + |\ell| + |\ell'|\big) \leq \epsilon .$$

On a montré que fg tend vers $\ell\ell'$ en a.

c). En remplaçant la fonction v par la fonction constante égale à λ, qui tend en a vers λ, dans le résultat précédent, on obtient $\lim_a(\lambda f) = \lambda\ell$.

d). On suppose maintenant que $\ell \neq 0$. Par la proposition 2.16, il existe un voisinage A de ℓ et un voisinage B de 0 tels que $A \cap B = \emptyset$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_0 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_0$, on ait $f(x) \in A$ (cf. (4.1)). Comme B contient 0 (cf. proposition 2.15) et $A \cap B = \emptyset$, $f(x) \neq 0$. Donc la fonction $1/f$ est bien définie sur $\mathcal{D}_0 := U_0 \cap \mathcal{D}$. De plus, a est adhérent à $\mathcal{D}_0$ (cf. remarque 4.9). Montrons maintenant que $1/\ell$ est la limite en a de $1/f$ en utilisant la proposition (4.37) avec f remplacée par $1/f$ et ℓ remplacée par $1/\ell$.
Comme B est un voisinage de 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que le disque $D(0;\delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et l'intervalle $I(0;\delta_0[\subset B$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathcal{D}_0$, on a $f(x) \notin B$, donc $f(x) \notin D(0;\delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $f(x) \notin I(0;\delta_0[$, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est-à-dire $|f(x)| \geq \delta_0$. De plus, pour $x \in \mathcal{D}_0$,

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell} = \frac{\ell - f(x)}{f(x) \cdot \ell}$$

donc

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{\big|\ell - f(x)\big|}{|f(x)| \cdot |\ell|} \leq \frac{\big|f(x) - \ell\big|}{\delta_0 \cdot |\ell|} . \tag{4.44}$$

Soit $\epsilon > 0$. Soit $\epsilon' \in]0;\ \delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon]$, ce qui est possible car $\delta_0 \cdot |\ell| \cdot \epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = \ell$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x \in U_1$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon'$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in \mathcal{D}_0$ avec $x \in U$, on a $x \in U_1$ et, d'après (4.44),

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| < \frac{\epsilon'}{\delta_0 \cdot |\ell|} \leq \epsilon .$$

On a montré que $\lim_a(1/f) = 1/\ell$.

4. D'après la définition de la continuité en a (cf. définition 4.14), il suffit d'appliquer le 3 avec $\ell = f(a)$ et $\ell' = g(a)$.
5. D'après la définition de la continuité sur $\mathcal{D}'$ (cf. définition 4.14), il suffit d'appliquer le 4. □

On termine ce paragraphe par deux résultats commodes sur les fonctions complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On rappelle que l'on a défini les parties réelle et imaginaire d'une fonction complexe dans la définition 4.5.

Proposition 4.33. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $a \in (\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. On a l'équivalence*

$$\lim_a f \;=\; \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \Big(\big(\lim_a \Re(f) \;=\; \Re(\ell)\big) \quad et \quad \big(\lim_a \Im(f) \;=\; \Im(\ell)\big)\Big)\,.$$

Preuve : On adapte la preuve de la proposition 3.47.
$\Longrightarrow$) : On suppose que $\lim_a f = \ell$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a, d'après (2.7),

$$\big|(\Re(f))(x) - \Re(\ell)\big| \;=\; \big|\Re(f(x)-\ell)\big| \;\leq\; |f(x)-\ell| \quad \text{et} \quad \big|(\Im(f))(x) - \Im(\ell)\big| \;=\; \big|\Im(f(x)-\ell)\big| \;\leq\; |f(x)-\ell|.$$

En appliquant deux fois la propriété des gendarmes de la proposition 4.32 avec $h = |f-\ell|$, qui tend vers 0 d'après l'hypothèse et (4.39), on en déduit que $\lim_a \Re(f)$ existe et vaut $\Re(\ell)$ et que $\lim_a \Im(f)$ existe et vaut $\Im(\ell)$.
$\Longleftarrow$) : On suppose qu'en a, $\Re(f)$ tend vers $\Re(\ell)$ et que $\Im(u)$ tend vers $\Im(\ell)$. Par la proposition 4.32 (avec f remplacée par $\Im(f)$ et $\lambda = i$), $i\Im(f)$ tend vers $i\Im(\ell)$ en a. Par la proposition 4.32 (avec f remplacée par $\Re(f)$ et g remplacée par $i\Im(g)$), $f = \Re(f) + i\Im(f)$ tend vers $\Re(\ell) + i\Im(\ell) = \ell$ en a. □

Corollaire 4.34. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{K}$. On a l'équivalence : f est continue sur $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overline{f}$ est continue sur $\mathcal{D}$.*

Preuve : On procède par double implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose f continue sur $\mathcal{D}$. Soit $a \in \mathcal{D}$. Comme f est continue en a, $\lim_a f = f(a)$ donc, par l'implication "$\Longrightarrow$" de la proposition 4.33, $\lim_a \Re(f) = \Re(f)(a)$ et $\lim_a \Im(f) = \Im(f)(a)$. Par multiplication, $\lim_a(-\Im(f)) \;=\; -\Im(f)(a)$ (cf. proposition 4.32). Donc, par l'implication "$\Longleftarrow$" de la proposition 4.33 appliquée à $\overline{f}$, $\lim_a \overline{f} = \overline{f}(a)$. Donc $\overline{f}$ est continue en a. D'où $\overline{f}$ est continue sur $\mathcal{D}$.
$\Longleftarrow$) : On suppose $\overline{f}$ continue sur $\mathcal{D}$. D'après le cas précédent appliqué à $\overline{f}$, $f = \overline{\overline{f}}$ est continue sur $\mathcal{D}$. □

4.3.3 Propriétés propres aux limites de fonctions réelles.

On reprend le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on établit, pour les fonctions réelles, un pendant de la proposition 4.32 pour des limites infinies et certaines propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Remarque 4.35. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. D'après les propositions 4.24 et 4.27, $(\lim_a f = +\infty)$ est équivalente à*

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \big((x \;\in\; U) \;\Longrightarrow\; (f(x) \;>\; L)\big) \tag{4.45}$$

et $(\lim_a f = -\infty)$ est équivalente à

$$\forall\, L > 0\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_a\,; \quad \big((x \;\in\; U) \;\Longrightarrow\; (f(x) \;<\; -L)\big)\,. \tag{4.46}$$

On commence par des propriétés liées à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. On rappelle la convention adoptée pour les limites de suites : on décide que $+\infty$ est supérieur à tout nombre réel et aussi à $-\infty$; on décide que $-\infty$ est inférieur à tout nombre réel.

Proposition 4.36. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\})$, tels que $\ell = \lim_a f$ et $\ell' = \lim_a g$.*

1. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < \ell$. Alors f est strictement supérieure à b "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > b$.*

2. *Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que $b > \ell$. Alors f est strictement inférieure à b "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < b$.*
3. *Si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est bornée "près de a", i.e. il existe $(m; M) \in \mathbb{R}^2$ et un voisinage U de a tels que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $m \leq f(x) \leq M$.*
4. *On suppose que f est inférieure à g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq g(x)$. Alors $\ell \leq \ell'$.*
5. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est encadrée par f et g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, et que $\ell = \ell' \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{a} h$ existe et vaut $\ell = \ell'$.*
6. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est minorée par f "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \leq h(x)$, et que $\ell = +\infty$. Alors $\lim\limits_{a} h$ existe et vaut $\ell = +\infty$.*
7. *On suppose qu'une fonction réelle $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est majorée par g "près de a", i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour tout $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) \leq g(x)$, et que $\ell' = -\infty$. Alors $\lim\limits_{a} h$ existe et vaut $\ell' = -\infty$.*

Avant de passer à la preuve de cette proposition, faisons quelques commentaires.
On ne peut appliquer la proposition 4.36 à f (ou à f et g) que si l'on sait déjà que f a une limite (ou que f et g ont une limite) en a.
Grâce à la convention précédente, les propriétés ont bien un sens lorsque une (les) limite(s) est (sont) infinie(s). De plus, elles sont encore vraies.
La propriété 1 donne, en particulier, que, si f tend vers une limite strictement positive (y compris $+\infty$) en a, alors f est strictement positive près de a.
La propriété 2 donne, en particulier, que, si f tend vers une limite strictement négative (y compris $-\infty$) en a, alors f est strictement négative près de a.
La propriété 4 s'interprète comme un passage à la limite $x \to a$ dans les inégalités $f(x) \leq g(x)$, qui sont vraies près de a. Si l'on suppose que $f(x) < g(x)$ près de a, on a seulement $\ell \leq \ell'$, en général comme le montre le contre-exemple suivant :
Soit f la fonction nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x) = 1/x$. On a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(x) = 0 < g(x)$ mais $\lim\limits_{+\infty} f = 0 = \lim\limits_{+\infty} g$ (cf. proposition 4.23 et paragraphe 4.2.4). La proposition $(\lim\limits_{+\infty} f < \lim\limits_{+\infty} g)$ est donc fausse.
On peut reformuler ceci en disant que, quand on passe à la limite $x \to a$ dans des inégalités strictes, on récupère une inégalité large.
On utilise souvent cette propriété 4 lorsque l'une des fonctions est constante. Par exemple, si l'on considère une fonction réelle positive qui a une limite en a alors sa limite est positive (en appliquant la propriété 4 avec f constante égale à 0).
La propriété 5 est appelée "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes". Les fonctions f et g jouent le rôle de gendarme. On remarque que, dans le cas où $f = -g$ et $\ell = \ell' = 0$, on a, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, les équivalences

$$(f(x) \leq h(x) \leq g(x)) \iff (-g(x) \leq h(x) \leq g(x)) \iff (|h(x)| \leq g(x)) \,. \tag{4.47}$$

Ceci explique la terminologie utilisée dans la proposition 4.32.
En raison de leur proximité avec la propriété 5, on peut aussi désigner par "propriétés des gendarmes" ou "théorème des gendarmes" les propriétés 6 et 7, même s'il n'y a qu'un seul "gendarme".

Voyons un exemple d'application d'un de ces théorèmes des gendarmes. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2(1 + x^2)^{-1}$. On étudie l'existence de la limite en 0. On devine que la fonction est continue en 0 donc que sa limite en 0 existe et vaut $f(0) = 0$. Pour démontrer cela, on peut utiliser des résultats de la proposition 4.32. On va ici utiliser le théorème des gendarmes.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x^2 \geq 1$, donc $0 \leq (1 + x^2)^{-1} \leq 1$. D'où $0 \leq f(x) \leq x^2$. On a vu que $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ donc,

par le 3 de la proposition 4.32 pour fg avec $f = g = \mathrm{Id}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. Comme on a aussi $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$, on en déduit, par le théorème des gendarmes (cf. le 5 de la proposition 4.36), que $\lim\limits_{0} f$ existe et vaut 0. On remarque que l'on aurait aussi pu utiliser le 1 de la proposition 4.32.

Preuve de la proposition 4.36 :

1. Soit $V :=]b; +\infty[$. C'est un voisinage de ℓ (cf. la preuve de la proposition 3.48). Comme $\ell = \lim\limits_{a} f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ soit $f(x) > b$.
2. Soit $V :=]-\infty; b[$. C'est un voisinage de ℓ (cf. la preuve de la proposition 3.48). Comme $\ell = \lim\limits_{a} f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ soit $f(x) < b$.
3. On suppose $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $m = \ell - 1$ et $M = \ell + 1$. L'intervalle $[m; M]$ est un voisinage de ℓ car il contient $I(\ell; 1[$. Comme $\ell = \lim\limits_{a} f$, il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in [m; M]$. Donc, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a bien $m \leq f(x) \leq M$.
4. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\ell > \ell'$. Dans la preuve de la proposition 3.48, on a vu qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $V :=]b; +\infty[$ est un voisinage de ℓ et $V' :=]-\infty; b[$ est un voisinage de ℓ'. Comme $\ell = \lim\limits_{a} f$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) \in V$. Comme $\ell' = \lim\limits_{a} g$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $g(x) \in V'$. Soit $U_0 = U \cap U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U_0 \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) \in V$ car $x \in U_1$, $g(x) \in V'$ car $x \in U_2$, et $f(x) \leq g(x)$, car $x \in U$. Donc, $g(x) < b < f(x)$ et $f(x) \leq g(x)$. Contradiction. Conclusion $\ell \leq \ell'$.
5. Lorsque $\ell = +\infty$, la propriété est une conséquence de 6. Lorsque $\ell = -\infty$, la propriété est une conséquence de 7. On traite le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. On montre (4.37) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\ell = \lim\limits_{a} f$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Comme $\ell = \lim\limits_{a} g$, il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, on ait $|g(x) - \ell| < \epsilon$. Soit $U' = U \cap U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U' \cap \mathcal{D}$, on a, en utilisant successivement que $x \in U_1$, $x \in U$ et $x \in U_2$, que $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$, $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ et $\ell - \epsilon < g(x) < \ell + \epsilon$, donc
   $$\ell - \epsilon \,<\, f(x) \,\leq\, h(x) \,\leq\, g(x) \,<\, \ell + \epsilon\,,$$
   c'est-à-dire $|h(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que h tend vers ℓ en a.
6. On montre (4.45) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $L > 0$. Comme $\lim\limits_{a} f = +\infty$, il existe, par (4.45), un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $f(x) > L$. Soit $U' = U \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) \geq f(x)$, car $x \in U$, et $f(x) > L$, car $x \in U_1$. Donc $h(x) > L$. On a montré que $\lim\limits_{a} h$ existe et vaut $+\infty$.
7. On montre (4.46) avec f remplacée par h et U remplacé par U' (U étant déjà défini dans l'hypothèse).
   Soit $L > 0$. Comme $\lim\limits_{a} g = -\infty$, il existe, par (4.45), un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, on ait $g(x) < -L$. Soit $U' = U \cap U_1$. C'est un voisinage de a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) \leq g(x)$, car $x \in U$, et $g(x) < -L$, car $x \in U_1$. Donc $h(x) < -L$. On a montré que $\lim\limits_{a} h$ existe et vaut $-\infty$. □

Maintenant, on revient sur les propriétés du 3 de la proposition 4.32 mais pour des fonctions réelles et seulement lorsque au moins l'une des limites ℓ et ℓ' est infinie.

Proposition 4.37. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et $\ell' \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$, tels que $\ell = \lim_a f$ et $\ell' = \lim_a g$. Alors, dans les cas suivants, les limites suivantes existent et on a :*

a). Si $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $\lim_a (f+g) = \ell$;

b). Si $\ell' = \ell$ alors $\lim_a (f+g) = \ell$;

c). Si $\lambda > 0$ alors $\lim_a (\lambda f) = \ell$ et si $\lambda < 0$ alors $\lim_a (\lambda f) = -\ell$;

d). Si $\lambda = 0$ alors $\lim_a (\lambda f) = 0$;

e). Si $\ell' > 0$ alors $\lim_a (fg) = \ell$ et si $\ell' < 0$ alors $\lim_a (fg) = -\ell$;

f). La fonction $1/f$ est définie "près de a" et tend vers 0 en a, i.e. il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) \neq 0$ et $\lim_a (1/f) = 0$.

g). Si $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, à valeurs strictement positives "près de a", i.e. il existe un voisinage réel U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) > 0$, et qui tend vers 0 en a, alors $1/h$ est bien définie "près de a", i.e. sur $U \cap \mathcal{D}$, et $\lim_a (1/h) = +\infty$.

h). Si $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle, à valeurs strictement négatives "près de a", i.e. il existe un voisinage réel U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $h(x) < 0$, et qui tend vers 0 en a, alors $1/h$ est bien définie "près de a", i.e. sur $U \cap \mathcal{D}$, et $\lim_a (1/h) = -\infty$.

Comme dans la proposition 3.49, les cas non considérés sont indéterminés.

Preuve de la proposition 4.37 :

a). On sépare les cas où $\ell = +\infty$ de ceux où $\ell = -\infty$.
Cas $\ell = +\infty$: On montre que $\lim_a (f+g) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.45) avec f remplacée par $f+g$. Soit $L > 0$. Soit $L' = \max(1; L - \ell' + 1) > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par cette même proposition (4.45), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition (4.37) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$, car $x \in U_1$, et $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) > L' + \ell' - 1 \geq L$. On a montré que $\lim_a (f+g) = +\infty$.
Cas $\ell = -\infty$: On montre que $\lim_a (f+g) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par $f+g$. Soit $L > 0$. Soit $L' = \max(1; L + \ell' + 1) > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par cette même proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition (4.37) (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$, car $x \in U_1$, et $\ell' - 1 < g(x) < \ell' + 1$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) < -L' + \ell' + 1 \leq -L$. On a montré que $\lim_a (f+g) = -\infty$.

b). On sépare le cas où $\ell = \ell' = +\infty$ du cas où $\ell = \ell' = -\infty$.
Cas $\ell = \ell' = +\infty$: On montre que $\lim_a (f+g) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.45) avec f remplacée par $f+g$. Soit $L > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.45), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L$. Comme $\lim_a g = +\infty$, on sait, par le 1 de la proposition 4.36 (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $g(x) > 0$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L$, car $x \in U_1$, et $g(x) > 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x) + g(x) > L + 0 = L$. On a montré que $\lim_a (f+g) = +\infty$.
Cas $\ell = \ell' = -\infty$: On montre que $\lim_a (f+g) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par $f+g$. Soit $L > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.46), qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L$. Comme $\lim_a g = -\infty$, on sait, on sait, par le 2 de la proposition 4.36 (avec f remplacée par g), qu'il existe un voisinage U_2 de a tel

que, pour $x \in U_2 \cap \mathcal{D}$, $g(x) < 0$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L$, car $x \in U_1$, et $g(x) < 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)+g(x) < -L+0 = -L$. On a montré que $\lim_a(f+g) = -\infty$.

c). On distingue quatre cas.
Cas où $\lambda > 0$ et $\ell = +\infty$: On montre que $\lim_a(\lambda f) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.45) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.45), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$ et $\lambda > 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) > \lambda L' = L$. On a montré que $\lim_a(\lambda f) = +\infty$.
Cas où $\lambda < 0$ et $\ell = +\infty$: On montre que $\lim_a(\lambda f) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = -L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition (4.45), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > L'$ et $\lambda < 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) < \lambda L' = -L$. On a montré que $\lim_a(\lambda f) = -\infty$.
Cas où $\lambda > 0$ et $\ell = -\infty$: On montre que $\lim_a(\lambda f) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.45) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = L/\lambda > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.45), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$ et $\lambda > 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) < -\lambda L' = -L$.
Cas où $\lambda < 0$ et $\ell = -\infty$: On montre que $\lim_a(\lambda f) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.46) avec f remplacée par (λf). Soit $L > 0$. Soit $L' = L/(-\lambda) > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition (4.45), qu'il existe un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -L'$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -L'$ et $\lambda < 0$ donc $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) > -\lambda L' = L$.

d). Comme (λu) est constante égale à 0, elle tend vers 0 en a.

e). On distingue quatre cas.
Cas où $\ell' > 0$ et $\ell = +\infty$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) > \ell'/2 > 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) > (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.36), $\lim_a(fg) = +\infty$.
Cas où $\ell' < 0$ et $\ell = +\infty$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) < \ell'/2 < 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) < (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.36), $\lim_a(fg) = -\infty$.
Cas où $\ell' > 0$ et $\ell = -\infty$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement supérieure à $\ell'/2 > 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) > \ell'/2 > 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) < (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = -\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.36), $\lim_a(fg) = -\infty$.
Cas où $\ell' < 0$ et $\ell = -\infty$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Comme $\lim_a g = \ell'$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_2 de a tel que g est strictement inférieure à $\ell'/2 < 0$ sur $U_2 \cap \mathcal{D}$. Soit $U = U_1 \cap U_2$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < 0$, car $x \in U_1$, et $g(x) < \ell'/2 < 0$, car $x \in U_2$. Donc $f(x)g(x) > (\ell'/2)f(x)$. Par c), $\lim_a((\ell'/2)f) = +\infty$. Par le théorème des gendarmes (cf. le 6 de la proposition 4.36), $\lim_a(fg) = +\infty$.

f). On distingue deux cas.
Cas où $\ell > 0$: Comme $\lim_a f = +\infty$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement positive sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Donc $1/f$ est bien définie sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Montrons que $\lim_a(1/f) = 0$ en utilisant la proposition (4.37).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = +\infty$, il existe, par la proposition (4.45), un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) > (1/\epsilon)$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) > (1/\epsilon) > 0$ donc $0 < (1/f(x)) < \epsilon$. On a montré que $\lim_a(1/f) = 0$.
Cas où $\ell < 0$: Comme $\lim_a f = -\infty$, on sait, par la proposition 4.36, qu'il existe un voisinage U_1 de a tel que f est strictement négative sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Donc $1/f$ est bien définie sur $U_1 \cap \mathcal{D}$. Montrons que $\lim_a(1/f) = 0$ en utilisant la proposition (4.37).
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_a f = -\infty$, il existe, par la proposition (4.45), un voisinage U de a tel que, pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, $f(x) < -(1/\epsilon)$. Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $f(x) < -(1/\epsilon) < 0$ donc $-\epsilon < (1/f(x)) < 0$. On a montré que $\lim_a(1/f) = 0$.

g). Soit U_0 un voisinage de a sur lequel h est strictement positive. Donc $(1/h)$ est bien définie sur U_0. Montrons que $\lim_a(1/h) = +\infty$ en utilisant la proposition (4.45).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim_a h = 0$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $|h(x)| < (1/L)$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) > 0$, car $x \in U_0$, et $|h(x)| < (1/L)$, car $x \in U_1$. Donc $0 < h(x) < (1/L)$. D'où $(1/h(x)) > L$. On a montré que $\lim_a(1/h) = +\infty$.

h). Soit U_0 un voisinage de a sur lequel h est strictement négative. Donc $(1/h)$ est bien définie sur U_0. Montrons que $\lim_a(1/h) = -\infty$ en utilisant la proposition (4.46).
Soit $L > 0$. Comme $1/L > 0$ et $\lim_a h = 0$, il existe un voisinage U_1 de a tel que, pour $x \in U_1 \cap \mathcal{D}$, $|h(x)| < (1/L)$. Soit $U = U_0 \cap U_1$. C'est un voisinage a (cf. remarque 4.9). Pour $x \in U \cap \mathcal{D}$, on a $h(x) < 0$, car $x \in U_0$, et $|h(x)| < (1/L)$, car $x \in U_1$. Donc $0 < -h(x) < (1/L)$. Comme $L > 0$, on a $-Lh(x) < 1$ et, comme $h(x) < 0$, $(1/h(x)) < -L$. On a montré que $\lim_a(1/h) = -\infty$. □

On s'intéresse maintenant aux fonctions monotones. On commence par les limites à l'infini.

Proposition 4.38. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \{-\infty; +\infty\}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Alors $\lim_a f$ existe. On pose $\sup f := \sup f(\mathcal{D})$ et $\inf f = \inf f(\mathcal{D})$.*

1. *Si f est croissante et $a = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = \sup f$.*
2. *Si f est décroissante et $a = +\infty$, $\lim_{+\infty} f = \inf f$.*
3. *Si f est croissante et $a = -\infty$, $\lim_{-\infty} f = \inf f$.*
4. *Si f est décroissante et $a = -\infty$, $\lim_{-\infty} f = \sup f$.*

Preuve :

1. On suppose f croissante et $a = +\infty$.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$. On montre que $\lim_{+\infty} f = +\infty$ en utilisant (4.26).
   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$, L n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > L$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est croissante et $A \geq x_0$, $f(x) \geq f(A) \geq f(x_0) > L$. On a montré $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim_{+\infty} f = \ell$ en utilisant (4.20).
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$.

Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est croissante et $A \geq x_0$, $f(x) \geq f(A) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. Donc $\ell - \epsilon < f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

2. On suppose f décroissante et $a = +\infty$.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ en utilisant (4.29).

   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$, $-L$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < -L$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est décroissante et $A \geq x_0$, $f(x) \leq f(A) \leq f(x_0) < -L$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$ en utilisant (4.20).

   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme $+\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A \in]1 + |x_0|; +\infty[\cap \mathcal{D}$. On a $A > 0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x > A$, on a, puisque f est décroissante et $A \geq x_0$, $f(x) \leq f(A) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. Donc $\ell + \epsilon > f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

3. On suppose f croissante et $a = -\infty$.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ en utilisant (4.35).

   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = -\infty$, $-L$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < -L$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est croissante, $f(x) \leq f(A') \leq f(x_0) < -L$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ en utilisant (4.23).

   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est croissante, $f(x) \leq f(A') \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. Donc $\ell + \epsilon > f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$.

4. On suppose f décroissante et $a = -\infty$.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ en utilisant (4.32).

   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = +\infty$, L n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > L$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est décroissante, $f(x) \geq f(A') \geq f(x_0) > L$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.

   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$ en utilisant (4.23).

   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D})$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme $-\infty$ est adhérent à $\mathcal{D}$, il existe $A' \in]-\infty; -1 - |x_0|[\cap \mathcal{D}$. On a $A := -A' > 0$ et $A' < -|x_0| \leq x_0$. Pour $x \in \mathcal{D}$ avec $x < -A = A'$, on a, puisque f est décroissante, $f(x) \geq f(A') \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D})$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. Donc $\ell - \epsilon < f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$. □

Donnons un exemple simple d'application. La fonction $\mathrm{Id} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{Id}(x) = x$, est strictement croissante et $\mathrm{Id}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Donc, par la proposition 4.38, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{Id}(x) = \sup \mathbb{R} = +\infty$.

Passons maintenant aux limites en un point de $\mathbb{R}$ de fonctions monotones.

Proposition 4.39. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ qui est adhérent à $\mathcal{D}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone.*

1. *Si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^- =]-\infty; a[\cap \mathcal{D}$ alors $\lim\limits_{a^-} f$ existe et vaut $\sup f(\mathcal{D}_a^-)$, si f est croissante, et $\inf f(\mathcal{D}_a^-)$, si f est décroissante.*

2. *Si a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+ =]a;+\infty[\cap \mathcal{D}$ alors $\lim\limits_{a^+} f$ existe et vaut $\inf f(\mathcal{D}_a^+)$, si f est croissante, et $\sup f(\mathcal{D}_a^+)$, si f est décroissante.*

Attention : Il se peut que, pour $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone, $\lim\limits_{a} f$ n'existe pas, même si $a \in \mathcal{D}$. Reprenons l'exemple de la fonction réelle $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x > 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$. f est croissante et définie en 0 mais on a vu que $\lim\limits_{0} f$ n'existe pas.

Preuve de la proposition 4.39 :

1. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$ et f croissante.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$ en utilisant (4.14) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = +\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) > L$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > L$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.
   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ en utilisant (4.11) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^-) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D}_a^-)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D}_a^-)$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$.
2. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^-$ et f décroissante.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$ en utilisant (4.17) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = -\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) < -L$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < -L$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = -\infty$.
   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$ en utilisant (4.11) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^-}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^-) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D}_a^-)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^-$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; a - x_0]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^-$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x > a - \delta \geq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D}_a^-)$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^-} f = \ell$.
3. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et f croissante.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = -\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$ en utilisant (4.17) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = -\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) < -L$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < -L$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = -\infty$.
   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ en utilisant (4.11) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D}_a^+)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x - a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D}_a^+)$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$.
4. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et f décroissante.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = +\infty$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$ en utilisant (4.14) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.

Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = +\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) > L$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x-a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > L$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$.

b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$ en utilisant (4.11) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D}_a^+)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x-a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D}_a^+)$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim\limits_{a^+} f = \ell$. □

4.4 Limite de suite et limite à l'infini de fonction.

Il se trouve que l'on peut voir les suites infinies étudiées au chapitre 3 comme des fonctions particulières. Ainsi on peut déduire les propriétés des limites de suites, vues dans le chapitre 3, de celles des limites en $+\infty$ des fonctions. On explique ici ce point.

Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. On note tout d'abord que $+\infty$ est adhérent à D dans le sens de la définition 2.12. Vérifions cela.
Soit V un voisinage réel de $+\infty$. Par définition, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A; +\infty[\subset V$. Par la propriété d'Archimède (cf. (1.4)), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq |A| + 1$. Comme D est infinie, il existe $d \in D$ tel que $d > N$, par la proposition 1.10. Donc $d > N > |A| \geq A$ soit $d \in]A; +\infty[$. Comme $]A; +\infty[\subset V$, $d \in V$ et $D \cap V$ est non vide.
Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $u : D \longrightarrow \mathbb{K}$ une suite infinie. C'est aussi une fonction de domaine de définition $D \subset \mathbb{R}$. Comme $+\infty$ est adhérent à D, on peut donc étudier la limite de la fonction u en $+\infty$. On va montrer que la suite u admet une limite si et seulement si la fonction u admet une limite en $+\infty$ et que, dans ce cas, les deux limites coïncident.
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on considère un $\ell \in \mathbb{C}$ et, lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère un $\ell \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\})$. On rappelle que la suite u tend vers ℓ si la proposition (3.23), donnée par

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}\,; \quad \forall n \in D\,, \quad \big((n \geq N) \implies (u_n \in V)\big)\,, \tag{4.48}$$

est vraie. On rappelle que la fonction u tend vers ℓ en $+\infty$ si la proposition (4.1), donnée par

$$\forall\, V \in \mathcal{V}_\ell\,, \quad \exists\, U \in \mathcal{V}_{+\infty}\,; \quad \forall x \in D\,, \quad \big((x \in U) \implies (u(x) \in V)\big)\,, \tag{4.49}$$

est vraie. Pour réaliser notre objectif, il nous suffit de vérifier que les propositions (4.48) et (4.49) sont équivalentes. Vérifions cela.
Si la suite u n'a pas de limite alors, pour tout ℓ possible, la proposition (4.48) est fausse et, par l'équivalence, la proposition (4.49) est aussi fausse, donc la fonction u n'a pas de limite en $+\infty$.
De même, si la fonction u n'a pas de limite en $+\infty$ alors, pour tout ℓ possible, la proposition (4.49) est fausse et, par l'équivalence, la proposition (4.48) est aussi fausse, donc la suite u n'a pas de limite.
Si maintenant la suite u admet un certain ℓ pour limite alors, pour cet ℓ, la proposition (4.48) est vraie et, par l'équivalence, la proposition (4.49) est aussi vraie, donc la fonction u admet ℓ pour limite en $+\infty$. Les deux limites sont bien égales.
De même, si la fonction u admet un certain ℓ pour limite en $+\infty$ alors, pour cet ℓ, la proposition (4.49) est vraie et, par l'équivalence, la proposition (4.48) est aussi vraie, donc la suite u tend vers ℓ. Les deux limites sont bien égales.

Il nous reste donc à montrer la

Proposition 4.40. *Dans le cadre précédent, les propositions* (4.48) *et* (4.49) *sont équivalentes.*

Preuve : On montre successivement ((4.48) $\Longrightarrow$ (4.49)) et ((4.49) $\Longrightarrow$ (4.48)).
(4.48) $\Longrightarrow$ (4.49) : On suppose (4.48) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que V contienne tous les termes de la suite u à partir du rang N. Soit $U := [N; +\infty[$. C'est un voisinage de $+\infty$. Soit $x \in D \cap U$. On a $x \in D$ et $x \geq N$, donc $u(x) \in V$. On a montré (4.49).
(4.49) $\Longrightarrow$ (4.48) : On suppose (4.49) vraie. Soit $V \in \mathcal{V}_\ell$. Par hypothèse, il existe un voisinage U de $+\infty$ tel que $u(D \cap U) \subset V$. Par définition des voisinages de $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $]A; +\infty[\subset U$. Par la propriété d'Archimède (cf. (1.4)), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq |A| + 1$. Soit $n \in D$ avec $n \geq N$. On a $n \geq N > |A| \geq A$ donc $n \in]A; +\infty[\subset U$. Comme $n \in D \cap U$, on a $u_n = u(n) \in V$. On a montré (4.48). □

Du fait de cette équivalence, un bon nombre de résultats sur les limites de suites sont en fait des cas particuliers de résultats sur les limites de fonctions. Dans de nombreux cas, on remarque que la preuve du résultat sur les suites est une simple adaptation de la preuve du résultat correspondant sur les fonctions.

On termine cette partie en donnant une liste de propriétés sur les limites de suites qui se déduisent de propriétés sur les limites de fonctions.

La proposition 3.35 est une conséquence des propostions 4.11 et 4.18.
La proposition 3.40 est une conséquence de la proposition 4.26.
La proposition 3.43 est une conséquence de la proposition 4.27.
La proposition 3.45 est une conséquence de la proposition 4.32.
La proposition 3.46 est une conséquence de la proposition 4.32.
La proposition 3.47 est une conséquence de la proposition 4.33.
La proposition 3.48 est une conséquence de la proposition 4.36.
La proposition 3.49 est une conséquence de la proposition 4.37.
La proposition 3.51 est une conséquence de la proposition 4.38.

5 Continuité sur un intervalle de fonctions réelles.

Dans cette partie, on va s'intéresser aux fonctions réelles continues sur un intervalle. On établit d'abord le théorème des valeurs intermédiaires. On montre ensuite la bornitude des fonctions continues sur un segment. Enfin, on s'intéresse à la notion de continuité uniforme qui est importante pour définir l'intégrale de Riemann des fonctions continues.

5.1 Théorème des valeurs intermédiaires.

On rappelle que la notion de continuité sur un intervalle a été définie dans la définition 4.14. On montre ici le théorème des valeurs intermédiaires qui dit essentiellement que l'image par une fonction continue d'un intervalle n'a pas de "trou".

Théorème 5.1. Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, I un intervalle non vide inclu dans $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle qui est continue sur I. Alors, pour tout $(a; b) \in I^2$, pour tout réel ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in I$ compris entre a et b tel que $\ell = f(x)$.*

Preuve : Soit $(a; b) \in I^2$ et ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Si $\ell = f(a)$ (resp. $\ell = f(b)$), $x = a$ (resp. $x = b$) convient.
Si $f(a) = f(b)$, $\ell = f(a)$ donc $x = a$ convient.
Si $a = b$, on a encore $f(a) = f(b)$ donc $\ell = f(a)$ et $x = a$ convient encore.
On suppose désormais que $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$, $\ell \neq f(a)$ et $\ell \neq f(b)$. On traite séparément les trois cas suivants : ($a < b$ et $f(a) > f(b)$) ; ($a < b$ et $f(a) < f(b)$) ; $a > b$.

a). Cas où $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Soit $\ell \in]f(b); f(a)[$. Soit

$$A := \left\{x \in [a; b]\,; \quad f(x) > \ell\right\}.$$

A est non vide car $a \in A$, par hypothèse. On a $A \subset [a; b] \subset I$. Soit $s = \sup A$. Comme A est majorée par b, $s \leq b$. Comme $a \in A$, $a \leq s$. Donc $s \in [a; b] \subset I$. Par la proposition 3.50, il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $s = \lim\limits_n s_n$. Comme f est continue sur I, elle est continue en s donc, par la proposition 4.15, $\lim\limits_n f(s_n)$ existe et vaut $f(s)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in A$ donc $f(s_n) > \ell$. Par passage à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités (cf. proposition 3.48), on obtient $f(s) \geq \ell$.
Supposons $f(s) > \ell$. On a forcément $s \neq b$ car $f(b) < \ell$ et, comme $s \leq b$, on a en fait $s < b$. Comme $\lim\limits_{x\to s} f(x) = f(s)$, on a, pour $\epsilon = (f(s) - \ell) > 0$, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - s| < \delta$, on ait $|f(x) - f(s)| < \epsilon$ (cf. (4.11)). Soit $x_0 = s + (1/2)\min(b - s; \delta) > s$. On a $|x_0 - s| < \delta$ et $x_0 \in]s; b] \subset [a; b] \subset I \subset \mathcal{D}$. Donc $x_0 \in \mathcal{D}$. On a donc $|f(x_0) - f(s)| < \epsilon$ soit, en particulier, $f(x_0) > f(s) - \epsilon = \ell$. Comme $x_0 \in [a; b]$, on a donc $x_0 \in A$. Par définition de s, $s \geq x_0$. Contradiction avec $x_0 = s + (1/2)\min(b - s; \delta) > s$.
L'hypothèse $f(s) > \ell$ est donc fausse. On a donc $f(s) \leq \ell$. Comme $f(s) \geq \ell$, on obtient $f(s) = \ell$ avec $s \in [a; b]$.

b). Cas où $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Soit $\ell \in]f(a); f(b)[$. On considère la fonction $g = -f$, qui est définie sur $\mathcal{D}$. Comme f est continue sur I, g est continue sur I par la proposition 4.32. De plus, $g(a) = -f(a) > -f(b) = g(b)$. D'après le a) appliqué à g, tout réel ℓ' compris entre $g(a)$ et $g(b)$ est l'image par g d'un certain $x' \in [a; b]$. Comme $-\ell \in] - f(b); -f(a)[=]g(b); g(a)[$, il existe donc un $x \in [a; b]$ tel que $g(x) = -\ell$. D'où $f(x) = -g(x) = \ell$.

c). Cas où $a > b$. Soit ℓ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On considère $h : [-b; -a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(-x)$. On sait que l'application Id est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par la proposition 4.32, il en est de même de $-\mathrm{Id}$. Comme $-\mathrm{Id}$ envoie $[-b; -a]$ sur $[a; b]$, où f est continue, on a, par composition, la continuité de h (cf. corollaire 4.30). De plus, ℓ est compris entre $f(a) = h(-a)$ et $f(b) = h(-b)$. On applique à h avec $(a; b)$ remplacé par $(-b; -a)$ le a) si $h(-b) > h(-a)$ ou le b) si $h(-b) < h(-a)$. Il existe donc y compris entre $-b$ et $-a$ tel que $h(y) = \ell$. D'où $\ell = h(y) = f(-y)$ avec $-y$ compris entre a et b. □

Une application classique de ce résultat est la suivante. Si un fonction continue sur un intervalle prend une valeur positive et une valeur négative sur cet intervalle, alors elle s'annule sur cet intervalle. Il suffit d'appliquer le théorème 5.1 avec $f(a)$ une valeur positive et $f(b)$ une valeur négative.

Voyons maintenant une conséquence importante du théorème 5.1. L'image par une fonction continue d'un intervalle n'a pas de "trou".

Corollaire 5.2. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et continue sur I. Alors l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve : Comme I est non vide, $f(I)$ est aussi non vide. Soit $v_- := \inf f(I) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ et $v_+ := \sup f(I) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On montre d'abord l'inclusion $]v_-; v_+[\subset f(I)$ puis que $f(I)$ est un intervalle.

1. Si $v_- = v_+$, l'intervalle $]v_-; v_+[$ est vide donc inclu dans $f(I)$. On suppose désormais que $v_- \neq v_+$. On a forcément $v_- < v_+$, par la proposition 1.12. Soit $y \in]v_-; v_+[$. Comme $y > v_-$, y ne minore pas $f(I)$. Il existe donc $x_- \in I$ tel que $f(x_-) < y$. Comme $y < v_+$, y ne majore pas $f(I)$. Il existe donc $x_+ \in I$ tel que $y < f(x_+)$. Par le théorème 5.1 avec $\mathcal{D}$ remplacé par I, $(a; b)$ remplacé par $(x_-; x_+)$ et ℓ remplacé par y, il existe x compris entre x_- et x_+ tel que $y = f(x)$. Comme I est un intervalle, $x \in I$, donc $y \in f(I)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in]v_-; v_+[$, on a montré que $]v_-; v_+[\subset f(I)$.
2. On montre que $f(I)$ est l'un des intervalles suivants : $]v_-; v_+[$, $]v_-; v_+]$, $[v_-; v_+[$ et $[v_-; v_+]$.
   a). Cas où $(v_-; v_+) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de v_- et v_+, on a, pour tout $x \in I$, $v_- \leq f(x) \leq v_+$. Donc $f(I) \subset [v_-; v_+]$. D'après le 1, $]v_-; v_+[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]v_-; v_+[$, $]v_-; v_+]$, $[v_-; v_+[$ et $[v_-; v_+]$, qui sont tous des intervalles.

b). Cas où $v_- \in \mathbb{R}$ et $v_+ = +\infty$. Par définition de v_-, on a, pour tout $x \in I$, $v_- \leq f(x)$. Donc $f(I) \subset [v_-; +\infty[$. D'après le 1, $]v_-; +\infty[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]v_-; +\infty[$ et $[v_-; +\infty[$, qui sont tous des intervalles.

c). Cas où $v_- = -\infty$ et $v_+ \in \mathbb{R}$. Par définition de v_+, on a, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq v_+$. Donc $f(I) \subset]-\infty; v_+]$. D'après le 1, $]-\infty; v_+[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]-\infty; v_+[$ et $]-\infty; v_+]$, qui sont tous des intervalles.

d). Cas où $v_- = -\infty$ et $v_+ = +\infty$. Par 1, $]-\infty; +\infty[\subset f(I)$ donc $f(I) =]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$, qui est bien un intervalle. □

Attention : Le résultat ne dit pas que I et $f(I)$ sont forcément des intervalles de même nature. Il est possible que I soit un intervalle ouvert tandis que $f(I)$ est un intervalle fermé. Voyons un exemple. Soit $I =]-2; 2[$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x+2$ si $x \in]-2; -1]$, $f(x) = -x$ si $x \in]-1; 1[$, et $f(x) = x-2$ si $x \in [1; 2[$. On vérifie que f est bien continue.
On montre maintenant que $f(I) = [-1; 1]$.
Sur $]-2; -1]$, f est croissante donc, pour $x \in]-2; -1]$, on a $0 = \lim\limits_{-2} f \leq f(x) \leq f(-1) = 1$ donc $f(x) \in [0; 1]$. Sur $]-1; 1[$, f est décroissante donc, pour $x \in]-1; 1[$, on a $1 = f(-1) = \lim\limits_{(-1)^+} f \geq f(x) \geq \lim\limits_{1^-} f = f(1) = -1$ donc $f(x) \in [-1; 1]$. Sur $[1; 2[$, f est croissante donc, pour $x \in [1; 2[$, on a $-1 = f(1) \leq f(x) \leq \lim\limits_{2} f = 0$ donc $f(x) \in [-1; 0]$. On a montré que $f(I) \subset [-1; 1]$.
Soit $y \in [-1; 1]$. Si $y = 1$ alors $y = f(-1)$. Si $y = -1$ alors $y = f(1)$. Si $y \in]-1; 1[$, $y = f(-y)$. Donc $y \in f(I)$. On a montré que $[-1; 1] \subset f(I)$.
Donc $f(I) = [-1; 1]$, qui est bien un intervalle fermé.
On peut aussi avoir I non borné et $f(I)$ borné. C'est le cas pour $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On vérifie que, dans ce cas, $f(I) =]0; 1]$.

5.2 Bornitude sur un segment.

On vient de voir que l'image par une fonction continue d'un intervalle est un intervalle mais pas forcément de même nature. Il y a cependant un cas particulier important : le cas où I est un intervalle fermé et borné. Dans ce cas, on a aussi plus de précisions sur le comportement de la fonction continue.

Théorème 5.3. Théorème de Heine.
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. l'image $f([a; b])$ de $[a; b]$ par f est bornée et il existe $(c; d) \in [a; b]^2$ tel que

$$f(c) \;=\; \inf f \;:=\; \inf f\big([a;\, b]\big) \quad \textit{et} \quad f(d) \;=\; \sup f \;:=\; \sup f\big([a;\, b]\big)\,.$$

En particulier, $f(c)$ est le minimum de $f([a; b])$ et $f(d)$ est le maximum de $f([a; b])$. De plus, $f([a; b]) = [\inf f; \sup f]$.

Preuve :

1. On montre d'abord par l'absurde que f est bornée.
   a). Supposons que f ne soit pas majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n ne majore pas $f([a; b])$ donc il existe $x_n \in [a; b]$ tel que $f(x_n) > n$. Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a; b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.59), il existe une extractrice $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{N}$ (où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in D$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.48), $a \leq \ell \leq b$. Comme f est continue sur $[a; b]$, elle est continue au point ℓ. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ converge vers $f(\ell)$.
   Par ailleurs, on a, pour tout $n \in D$, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n)$. On sait que φ est une suite tendant vers

$+\infty$ (cf. proposition 3.54). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48), on déduit des inégalités précédentes que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ tend vers $+\infty$. Contradiction puisqu'on a montré que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
La fonction f est donc majorée.

b). Supposons que f ne soit pas minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ ne minore pas $f([a;b])$ donc il existe $x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) < -n$. Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a;b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.59), il existe une extractrice $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{N}$ (où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in D$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.48), $a \leq \ell \leq b$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue au point ℓ. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ converge vers $f(\ell)$.
Par ailleurs, on a, pour tout $n \in D$, $f(x_{\varphi(n)}) < -\varphi(n)$. On sait que φ est une suite tendant vers $+\infty$ (cf. proposition 3.54) donc $-\varphi$ tend vers $-\infty$ (cf. proposition 3.49). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48), on déduit des inégalités précédentes que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ tend vers $-\infty$. Contradiction puisqu'on a vu que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
La fonction f est donc minorée.

2. On montre maintenant que les bornes supérieure et inférieure de f sont des valeurs de f.

a). Notons $m_+ = \sup f$. On sait, par 1, que $m_+ \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure (cf. proposition 3.50), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_+, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_+. En procédant comme au 1.a), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x\circ\varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_+ \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_+. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_+ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_+)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_+ (cf. proposition 3.55). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.35), on a donc $m_+ = f(\ell_+)$.

b). Notons $m_- = \inf f$. On sait, par 1, que $m_- \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure (cf. proposition 3.50), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_-, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_-. En procédant comme au 1.b), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_- \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_-. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_- de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_-)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_- (cf. proposition 3.55). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.35), on a donc $m_- = f(\ell_-)$.

3. On montre que $f([a;b]) = [\inf f; \sup f]$.
Par définition des bornes supérieure et inférieure, on a $f([a;b]) \subset [\inf f; \sup f]$. Par 1 et 2, on sait que $\inf f \in f([a;b])$ et $\sup f \in f([a;b])$. Par le corollaire 5.2, on sait que $f([a;b])$ est un intervalle. Donc $f([a;b])$ contient $[\inf f; \sup f]$. On a montré l'égalité souhaitée par double inclusion. □

5.3 Continuité uniforme.

Dans cette partie, on se propose d'introduire une notion de continuité uniforme, qui est plus forte que la continuité (elles sont cependant équivalentes sur un segment, comme on va le voir). Cette notion de continuité uniforme est utile pour définir l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur un segment.

Avant de définir la continuité uniforme, faisons un petit jeu : chercher l'erreur ? On sait que la fonction $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui à $x > 0$ associe $1/x$, est continue sur $]0;+\infty[$ (cf. propositions 4.23 et 4.32). Donc, pour chaque $a \in]0;+\infty[$, elle est continue au point a. Ceci veut dire en particulier que, pour $\epsilon = 1$, on peut

trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]0;+\infty[\cap]a-\delta; a+\delta[$, on ait $|f(x)-f(a)| < 1$ (cf. propositions 4.13 et 4.22). En prenant $x = a + \delta/2 > 0$, on a donc

$$1 \;>\; \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\delta/2}\right| \;=\; \frac{\delta}{a(2a+\delta)}\,. \tag{5.1}$$

D'après les opérations sur les limites (cf. proposition 4.37), la limite à droite, quand $a \to 0^+$, du membre de droite de l'inégalité précédente (5.1) est $+\infty$ alors que ce terme est majoré par 1 ! ? Où est la faute ?

Dans le raisonnement précédent, on a fait comme si δ ne dépendait pas de a lorsqu'on a affirmé, à l'aide de la proposition 4.37, que la fraction de droite dans (5.1) tend vers $+\infty$, quand a tend vers 0^+. Puisque l'on a obtenu une contradiction, cette indépendance supposée de δ par rapport à a est fausse.

Dire qu'une fonction est uniformément continue signifie essentiellement que "le δ peut être choisi indépendant du a". Le raisonnement précédent montre donc la fonction f n'est pas uniformément continue. Précisément, on a la

Définition 5.4. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'elle est* uniformément continue (sur $\mathcal{D}$) *si*

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall (x;x') \in \mathcal{D}^2\,, \quad \Big(|x-x'| \,<\, \delta \implies \big|f(x) \,-\, f(x')\big| \,<\, \epsilon\Big)\,. \tag{5.2}$$

Il se trouve que cette notion est plus forte que la continuité sur $\mathcal{D}$ (on exige plus de la fonction que pour avoir la continuité sur $\mathcal{D}$) comme l'établit la

Proposition 5.5. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si une fonction $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}$.*

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}$. On montre que f est continue en a. Pour ce faire, on montre (4.11) avec $\ell = f(a)$. Soit $\epsilon > 0$. D'après (5.2), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x;x') \in \mathcal{D}^2\,, \Big(|x-x'| \,<\, \delta \implies \big|f(x) \,-\, f(x')\big| \,<\, \epsilon\Big)\,. \tag{5.3}$$

Soit $x \in \mathcal{D} \cap]a-\delta; a+\delta[$. D'après la propriété (5.3) avec $x' = a$, on a $|f(x)-f(a)| < \epsilon$, puisque $|x-a| < \delta$. On a montré (4.11) donc la continuité de f en a. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathcal{D}$, on a montré la continuité de f sur $\mathcal{D}$. □

On vient en fait de montrer que la continuité uniforme, qui est caractérisée par (5.2), implique la continuité sur $\mathcal{D}$ est caractérisée par

$$\forall a \in \mathcal{D}\,, \quad \forall \epsilon > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall x \in \mathcal{D}\,, \quad \Big(|x-a| \,<\, \delta \implies \big|f(x) \,-\, f(a)\big| \,<\, \epsilon\Big)\,. \tag{5.4}$$

On remarque que la différence entre (5.2) et (5.4) (en posant $x' = a$) réside dans la position du terme "$\forall x' \in \mathcal{D}$". Dans (5.2), ce terme apparaît après δ tandis que dans (5.4), il figure avant δ. Lorsqu'on a (5.4) avec un δ indépendant de a alors on récupère (5.2). Cela ne se produit pas toujours comme le montre l'exemple plus haut mais c'est ce qu'il se produit pour les fonctions continues sur un segment, comme l'atteste la suite de Théorème de Heine (cf. théorème 5.3) :

Théorème 5.6. Théorème de Heine (suite).
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue alors elle est uniformément continue.

Démonstration : On suppose f continue. On procède par l'absurde. On suppose donc que f n'est pas uniformément continue. La négation

$$\exists \epsilon > 0\,; \quad \forall \delta > 0\,, \quad \exists (x;x') \in [a;b]^2\,; \quad \Big(|x-x'| < \delta \quad \text{et} \quad \big|f(x)-f(x')\big| \geq \epsilon\Big) \tag{5.5}$$

de la proposition (5.2) est donc vraie. Soit $\epsilon_0 > 0$ un tel ϵ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\delta = 2^{-n}$, (5.5) nous permet de trouver $(u_n; v_n) \in [a; b]^2$ tel que $|u_n - v_n| < \delta$ et $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \epsilon_0$. On a ainsi construit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a; b]$, donc bornées. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.59), on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (avec $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une injection croissante). Soit c sa limite. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_{\varphi(n)} \leq b$, on obtient, par passage à la limite dans les inégalités (cf. proposition 3.48), $c \in [a; b]$.
Comme $(2^{-\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suite géométrique $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$, de raison $1/2 \in [0; 1[$, $\lim 2^{-\varphi(n)} = 0$ par les propositions 3.58 et 3.55. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{\phi(n)} - 2^{-\phi(n)} < v_{\phi(n)} < u_{\phi(n)} + 2^{-\phi(n)}$, $(v_{\phi(n)})_n$ avec $\lim u_{\phi(n)} - 2^{-\phi(n)} = 0 = \lim u_{\phi(n)} + 2^{-\phi(n)}$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48), la suite $(v_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers c.
Comme f est continue au point c, les suites $(f(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $f(c)$ (cf. proposition 4.15) donc, par différence, $\lim(f(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}} - f(v_{\phi(n)}) = 0$ (cf. proposition 3.46). Par la proposition 3.45, la suite $(|f(u_{\phi(n)}) - f(v_{\phi(n)})|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers 0. Par passage à la limite dans les inégalités, vraies pour tout n, $|f(u_{\varphi(n)}) - f(v_{\varphi(n)})| \geq \epsilon_0$ (cf. proposition 3.48), on obtient $0 \geq \epsilon_0$, c'est-à-dire une contradiction.
On a donc montré que f est uniformément continue. □

Un autre exemple de fonctions uniformément continues sur un intervalle est fourni par les fonctions lipschitziennes que l'on va voir maintenant.

Définition 5.7. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Soit $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que f est k-lipschitzienne (sur I) si*
$$\forall (x; x') \in I^2 \,, \quad \big|f(x) - f(x')\big| \leq k \cdot |x - x'| \,. \tag{5.6}$$
2. *On dit que f est lipschitzienne (sur I) s'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

Étant donné un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$, on voit que la fonction identité $\mathrm{Id} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est 1-lipschitzienne. D'après (2.12), la fonction valeur absolue est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. On remarque aussi que les fonctions 0-lipschitziennes sur I sont les fonctions constantes sur I.

Proposition 5.8. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Une fonction lipschitzienne sur I est uniformément continue sur I (en particulier continue sur I).*

Preuve : L'affirmation entre parathèse découle de la proposition 5.5. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Il existe donc un $k \in \mathbb{R}^+$ tel que f soit k-lipschitzienne. On montre (5.2) avec $\mathcal{D}$ remplacé par I.
Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \epsilon/(k + 1)$. Soit $(x; x') \in I^2$ avec $|x - x'| < \delta$. D'après (5.6),
$$\big|f(x) - f(x')\big| \leq k \cdot |x - x'| \leq k \cdot \frac{\epsilon}{k+1} < \epsilon$$
On a bien montré (5.2). □

6 Dérivabilité.

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de dérivabilité pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.1 Nombres dérivés, dérivée.

Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Près de a, on cherche à approcher "le mieux possible" le graphe de f par une droite non verticale passant par le point $(a; f(a))$.

Les droites de ce type se distinguent les unes des autres par leur pente. S'il existe une telle droite qui approche "mieux" le graphe de f que les autres, on dira que f est dérivable en a et la pente p de cette droite sera le nombre dérivé de f en a. Dans ce cas, le nombre dérivé en a donne une idée du comportement de f près de a puisque le graphe de f y ressemble à la droite d'équation $y = f(a) + p(x - a)$. Cette dernière sera appelée la tangente à f en a.
Si $\mathcal{D} = \{0\} \cup [1; +\infty[$ et $a = 0$, par exemple, on sent qu'aucune droite passant par $(a; f(a))$ n'approchera le graphe de f mieux que les autres. On remarque que, dans ce cas, 0 n'est pas adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. On ne peut pas s'approcher de 0 en restant dans $\mathcal{D} \setminus \{0\}$.
Pour éviter ce phénomène, on imposera que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$.
Comment exprimer que le graphe de f est proche d'une droite, près de a ? Cela revient essentiellement à dire que, près de a, f est proche de g, où g est la fonction dont le graphe est la droite en question. Comment exprimer que f est proche de g, près de a ? Une façon naturelle est de dire que, près de a, la différence $f - g$ doit être négligeable devant $g - g(a)$. Bref, on demande que $f(x) - g(x)$ soit un petit "o" de $x - a$, c'est-à-dire le produit de $(x - a)$ par une fonction qui tend vers 0 en a.
Voyons un peu ce que veut dire cette dernière propriété. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 6.1. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $\ell \in \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe un voisinage U_0 de 0 et une fonction $\eta : U_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ tels que $\lim_0 \eta = 0$ et, pour tout $h \in U_0$ avec $a + h \in \mathcal{D}$,*
$$f(a + h) \;=\; f(a) \,+\, h \cdot \ell \,+\, h \cdot \eta(h)\,. \tag{6.1}$$
2. $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ *existe et vaut ℓ.*
3. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *existe et vaut ℓ.*

Remarque 6.2. *On rappelle que la notion de translation a été introduite dans la proposition 4.23 et utilisée dans la preuve du corollaire 4.29. Dans le cadre de la proposition 6.1, soit U_0 un voisinage de 0. L'ensemble $\{h \in U_0; a + h \in \mathcal{D}\}$ est égal à $t_a(\mathcal{D}) \cap U_0$ et est aussi égal au domaine de définition de la restriction à U_0 de la fonction $f(a + \cdot)$. D'après la preuve en question, 0 est adhérent à $t_a(\mathcal{D})$ donc 0 est aussi adhérent à $\{h \in U_0; a + h \in \mathcal{D}\}$. De même, l'ensemble $\{h \in U_0 \setminus \{0\}; a + h \in \mathcal{D}\}$ est égal à $t_a(\mathcal{D}) \cap (U_0 \setminus \{0\})$ et, comme a est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$, la preuve mentionnée établit que 0 est adhérent à $\{h \in U_0 \setminus \{0\}; a + h \in \mathcal{D}\}$. Cet ensemble est aussi le domaine de définition de la restriction à U_0 de la fonction $h \mapsto (f(a + h) - f(a))/h$.*

Preuve de la proposition 6.1 : L'équivalence $(2 \iff 3)$ découle du corollaire 4.29. On montre l'équivalence $(1 \iff 2)$.
$1 \implies 2$: On suppose 1 vraie. Pour étudier la limite du 2, on peut restreindre h à U_0 (cf. proposition 4.18). Pour $h \in U_0 \setminus \{0\}$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a, d'après l'hypothèse,
$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} \;=\; \ell \,+\, \eta(h)\,.$$
Comme $\lim_0 \eta = 0$, le membre de gauche tend vers ℓ en 0, par somme (cf. proposition 4.32). On a donc montré 2.
$2 \implies 1$: On suppose 2 vraie. Soit $\eta :]-1; 1[\longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $\eta(h) = 0$ si $a + h \notin \mathcal{D}$, par $\eta(0) = 0$ et par
$$\eta(h) \;=\; \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \,-\, \ell\,,$$
si $h \neq 0$ et $a + h \in \mathcal{D}$.
$U_0 :=]-1; 1[$ est bien un voisinage de 0. De plus, pour $h \in]-1; 1[$ tel que $a + h \in \mathcal{D}$, on a bien (6.1) (y compris pour $h = 0$). Il reste à montrer que $\lim_0 \eta = 0$. On le fait en utilisant (4.11).
Soit $\epsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $\delta' > 0$ tel que, pour $h \in]-\delta'; \delta'[$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on ait
$$\left| \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \,-\, \ell \right| \;<\; \epsilon\,.$$

Soit $\delta = \min(1;\delta')$. Pour $h \in]-\delta;\delta[\subset]-1;1[$, on a, si $a+h \notin \mathcal{D}$, $|\eta(h)| = 0 < \epsilon$, et, si $a+h \in \mathcal{D}$, on a $h \in]-\delta';\delta'[$ et, d'après ce qui précède, $|\eta(h)| < \epsilon$. On a montré 1. □

Définition 6.3. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Lorsqu'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s), on dit que f est dérivable en a et que ℓ est le nombre dérivé de f en a. On note ce dernier par $f'(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la tangente à f en a.*
Lorsque a est adhérent à $]a;+\infty[\cap\mathcal{D}$ et que l'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s) avec f remplacée par sa restriction $f_{|]a;+\infty[\cap\mathcal{D}}$ à $]a;+\infty[\cap\mathcal{D}$, on dit que f est dérivable à droite en a et que ℓ est le nombre dérivée de f en a à droite. On note ce dernier par $f'_d(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la demi-tangente à f en a à droite.
Lorsque a est adhérent à $]-\infty;a[\cap\mathcal{D}$ et que l'une (donc toutes les) propriété(s) de la proposition 6.1 est (sont) vérifiée(s) avec f remplacée par sa restriction $f_{|]-\infty;a]\cap\mathcal{D}}$ à $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$, on dit que f est dérivable à gauche en a et que ℓ est le nombre dérivée de f en a à gauche. On note ce dernier par $f'_g(a)$. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est appelée la demi-tangente à f en a à gauche.
Soit $\mathcal{D}'$ une partie de $\mathcal{D}$. On dit que f est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) sur $\mathcal{D}'$ si, pour tout $a \in \mathcal{D}'$, f est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en a. Dans ce cas, la dérivée (resp. dérivée à droite, resp. dérivée à gauche) de f sur $\mathcal{D}'$ est la fonction $f' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$ (resp. $f'_d : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$, resp. $f'_g : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{K}$) qui, à $x \in \mathcal{D}'$ associe $f'(x)$ (resp. $f'_d(x)$, resp. $f'_g(x)$).

Remarque 6.4. *Dans le cadre de la définition 6.3, on suppose que f est dérivable en a. Pour $p \in \mathbb{K}$, soit $g_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par $g_p(x) = f(a) + p(x-a)$. On a $g_p(a) = f(a)$. Le graphe de g_p est donc une droite non verticale qui passe par le point $(a;f(a))$. On a, pour $h \in U_0$ avec $a+h \in \mathcal{D}$,*

$$f(a+h) \;-\; g_p(a+h) \;=\; h \cdot \big(f'(a) \;-\; p \;+\; \eta(h)\big)\,.$$

Si $p = f'(a)$ alors $|f(a+h) - g_p(a+h)| \leq |h| \cdot |\eta(h)|$ avec h et $\eta(h)$ tendant vers 0 quand h tend vers 0. Si $p \neq f'(a)$ alors, comme $\eta(h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $h \in U_0 \cap]-\delta;\delta[$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on ait

$$|\eta(h)| \;<\; \frac{|p \;-\; f'(a)|}{2}\,.$$

Pour $h \in U_0 \cap]-\delta;\delta[$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a donc

$$\big|f(a+h) \;-\; g_p(a+h)\big| \;\geq\; |h| \cdot \frac{|p \;-\; f'(a)|}{2}\,.$$

Le terme de droite tend certes vers 0 en 0 mais comme h, donc "moins vite" que $h\eta(h)$. C'est dans ce sens que la tangente à f en a (i.e. $g_{f'(a)}$) est plus proche de f que les autres droites g_p.

Voyons quelques exemples simples. Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$ tel que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Soit $c \in \mathbb{K}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a $f(a+h) = c = f(a) = f(a) + h \cdot 0 + h \cdot \eta(h)$ où $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Par le 1 de la proposition 6.1, f est dérivable en a de nombre dérivé 0.
Vérifions que la fonction $\mathrm{Id}_\mathcal{D} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Id}_\mathcal{D}(x) = x$ est dérivable en a de nombre dérivé 1. Pour $h \in \mathbb{R}$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on a $\mathrm{Id}_\mathcal{D}(a+h) = a+h = \mathrm{Id}_\mathcal{D}(a)+h = \mathrm{Id}_\mathcal{D}(a)+h\cdot 1+h\cdot\eta(h)$ où $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction nulle. Par le 1 de la proposition 6.1, $\mathrm{Id}_\mathcal{D}$ est dérivable en a de nombre dérivé 1.
En particulier, si $\mathcal{D}$ est un intervalle, tout point a de $\mathcal{D}$ est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$ donc f est dérivable sur $\mathcal{D}$ de dérivée nulle sur $\mathcal{D}$ et $\mathrm{Id}_\mathcal{D}$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ de dérivée la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{D}$.
On a montré la

Proposition 6.5. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Soit $c \in \mathbb{K}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ la fonction constante égale à c. Alors f est dérivable en a de nombre dérivé 0. L'application $\mathrm{Id}_\mathcal{D} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Id}_\mathcal{D}(x) = x$, est dérivable en a de nombre dérivé 1.*
Dans le cas où $\mathcal{D}$ est un intervalle, f' est la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ et $\mathrm{Id}'_\mathcal{D}$ est la fonction constante égale à 1 sur $\mathcal{D}$.

Voyons maintenant un lien entre continuité et dérivabilité.

Proposition 6.6. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{D}$ qui est adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$. Si f est dérivable en a alors f est continue en a. En particulier, si f est dérivable sur une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ alors elle est continue sur $\mathcal{D}'$.*

Remarque 6.7. *On a aussi une version "à droite" et une version "à gauche" de la proposition 6.6.*
Lorsque a est adhérent à $]a;+\infty[\cap\mathcal{D}$, on peut appliquer la proposition 6.6 à la restriction $f_{|[a;+\infty[\cap\mathcal{D}}$ de f à $[a;+\infty[\cap\mathcal{D}$. Cela donne l'implication : si f est dérivable en a à droite alors f est continue en a à droite.
Lorsque a est adhérent à $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$, on peut appliquer la proposition 6.6 à la restriction $f_{|]-\infty;a]\cap\mathcal{D}}$ de f à $]-\infty;a]\cap\mathcal{D}$. Cela donne l'implication : si f est dérivable en a à gauche alors f est continue en a à gauche.

Preuve de la proposition 6.6 : Par hypothèse, la propriété 1 de la proposition 6.1 est vraie. On sait que $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$ et, comme $\lim\limits_{h\to 0}\eta(h) = 0$, on a, par produit (cf. proposition 4.32), $\lim\limits_{h\to 0} h\eta(h) = 0$. Chacun des termes du membre de droite de l'égalité (6.1) a donc une limite en 0, à savoir $f(a)$, 0 et 0, respectivement. Par somme (cf. proposition 4.32), on en déduit que le membre de droite de (6.1) tend vers $f(a)$, ce qui démontre que f a une limite en a donc f est continue en a. □

Attention : la réciproque est fausse. Une fonction continue en un point peut ne pas être dérivable en ce point. C'est ce qui se produit avec la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On peut vérifier qu'elle est continue en 0, dérivable à droite en 0 de nombre dérivé à droite 1, dérivable à gauche en 0 de nombre dérivé à gauche -1, mais qu'elle n'est pas dérivable en 0.

Proposition 6.8. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $g : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *Alors les fonctions $f+g$, $f\cdot g$ et λf sont dérivables sur $\mathcal{D}$ de dérivée $f'+g'$, $f'\cdot g + f\cdot g'$ et $\lambda f'$, respectivement.*
2. *Si, de plus, f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors $1/f$ est définie et dérivable sur $\mathcal{D}$, de dérivée $-f'/f^2$.*
3. *L'application $\overline{f} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$, définie par, pour $x \in \mathcal{D}$, $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$, est dérivable sur $\mathcal{D}$ et $(\overline{f})' = \overline{f'}$.*

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}$. Par hypothèse, a est adhérent à $\mathcal{D}\setminus\{a\}$ et on sait que le 1 de la proposition 6.1 est vrai pour f et pour g. Il existe donc un voisinage U_1 de 0 et une fonction $\eta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_1$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on ait (6.1) avec η remplacée par η_1, c'est-à-dire

$$f(a+h) \;=\; f(a) \;+\; h\cdot f'(a) \;+\; h\cdot\eta_1(h)\,. \tag{6.2}$$

Il existe un voisinage U_2 de 0 et une fonction $\eta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_2$ avec $a+h \in \mathcal{D}$, on ait (6.1) avec f remplacée par g et η remplacée par η_2, c'est-à-dire

$$g(a+h) \;=\; g(a) \;+\; h\cdot g'(a) \;+\; h\cdot\eta_2(h)\,. \tag{6.3}$$

Soit $U_0 = U_1\cap U_2$. C'est un voisinage de 0 (cf. proposition 2.15). Pour $h \in U_0$ avec $a+h\in\mathcal{D}$, on a donc, par (6.2),

$$(\lambda\cdot f)(a+h) \;=\; (\lambda\cdot f)(a) \;+\; h\cdot\big(\lambda\cdot f'(a)\big) \;+\; h\cdot(\lambda\cdot\eta_1)(h)\,,$$

où la fonction $\lambda\eta_1$ tend vers 0 en 0 (cf. proposition 4.32). Donc λf est dérivable en a de nombre dérivée $\lambda f'(a)$.
Pour $h \in U_0$ avec $a+h\in\mathcal{D}$, on a, par (6.2) et (6.3),

$$(f\,+\,g)(a+h) \;=\; (f\,+\,g)(a) \;+\; h\cdot\big(f'(a)\,+\,g'(a)\big) \;+\; h\cdot(\eta_1\,+\,\eta_2)(h)\,,$$

où la fonction $\eta_1 + \eta_2$ tend vers 0 en 0 (cf. proposition 4.32). Donc $f + g$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a) + g'(a)$.
Pour $h \in U_0$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2) et (6.3),

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(a+h) \;&= (f \cdot g)(a) + h \cdot \big(f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)\big) \\ &\quad + h \cdot \big(hf'(a)g'(a) + (g(a) + hg'(a))\eta_1(h) + (f(a) + hf'(a))\eta_2(h) + h\eta_1(h)\eta_2(h)\big)\,,\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{h\to 0} \big(hf'(a)g'(a) + (g(a) + hg'(a))\eta_1(h) + (f(a) + hf'(a))\eta_2(h) + h\eta_1(h)\eta_2(h)\big) \;=\; 0\,,$$

d'après la proposition 4.32. Donc fg est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
On suppose de plus que f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$. Donc f ne s'annule pas en a. Comme f est dérivable en a, elle est continue en a (cf. proposition 6.6). Donc, par le corollaire 4.29, on a

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) \;=\; \lim_{x\to a} f(x) \;=\; f(a) \;\neq\; 0\,.$$

Pour $h \in U_1$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, on a, par (6.2),

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{f}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{f}\right)(a) \;&= -\frac{f(a+h) - f(a)}{f(a+h)f(a)} \;=\; -h \cdot \frac{f'(a) + \eta_1(h)}{f(a+h)f(a)} \\ &= -h \cdot \big(f'(a) + \eta_1(h)\big) \cdot \frac{1}{f(a)} \left(\frac{1}{f(a)} + \frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}\right) \\ &= -h \cdot \frac{f'(a)}{f(a)^2} - h \cdot \left(\frac{\eta_1(h)}{f(a)^2} + \frac{f'(a) + \eta_1(h)}{f(a)} \cdot \left(\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}\right)\right)\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{\eta_1(h)}{f(a)^2} + \frac{f'(a) + \eta_1(h)}{f(a)} \cdot \left(\frac{1}{f(a+h)} - \frac{1}{f(a)}\right)\right) \;=\; 0\,,$$

d'après la proposition 4.32. Donc $1/f$ est dérivable en a de nombre dérivé $-f'(a)/f(a)^2$.
Soit $a \in \mathcal{D}$. Comme f est dérivable en a, on a, pour $h \in U_1$ avec $a + h \in \mathcal{D}$, d'après (6.2), $\overline{f}(a+h) = \overline{f}(a) + h \cdot \overline{f'(a)} + h \cdot \overline{\eta_1(h)}$. Comme η_1 tend vers 0 en 0, il en est de même de $|\eta_1|$ d'après (4.40). Or, $|\overline{\eta_1}| = |\eta_1|$, donc $\overline{\eta_1}$ tend aussi vers 0 en 0, par (4.40). Par la proposition 6.1, $\overline{f}$ est dérivable en a de dérivée $\overline{f'(a)}$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathcal{D}$, on a montré le résultat annoncé. □

Dans le cadre de cette proposition 6.8, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $f/g = f \cdot (1/g)$ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et on obtient, pour $a \in \mathcal{D}$,

$$(f/g)'(a) \;=\; f'(a) \cdot \frac{1}{g(a)} + f(a) \cdot \frac{-g'(a)}{g(a)^2} \;=\; \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}\,. \tag{6.4}$$

On termine ce paragraphe par la composition.

Proposition 6.9. *Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux parties infinies de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}_1$. Soit $f : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ une fonction réelle, qui est dérivable sur $\mathcal{D}'$, et $g : \mathcal{D}_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur l'image $f(\mathcal{D}')$ de $\mathcal{D}'$ par f. Alors $g \circ f$ est dérivable sur $\mathcal{D}'$ et, pour $a \in \mathcal{D}'$,*

$$(g \circ f)'(a) \;=\; g'\big(f(a)\big) \cdot f'(a)\,. \tag{6.5}$$

Preuve : Soit $a \in \mathcal{D}'$. On montrer que $g \circ f$ est dérivable en a. Comme f est dérivable en a, il existe un voisinage U_1 de 0 et une fonction $\eta_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in U_1$ avec $a + h \in \mathcal{D}_1$, on ait (6.1) avec η remplacée par η_1, c'est-à-dire (6.2). Comme $a \in \mathcal{D}'$, $f(a) \in f(\mathcal{D}')$ et,

comme g est dérivable sur $f(\mathcal{D}')$, g est dérivable en $f(a)$. Il existe donc un voisinage U_2 de 0 et une fonction $\eta_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{K}$, tendant vers 0 en 0, tels que, pour $k \in U_2$ avec $f(a)+k \in \mathcal{D}_2$, on ait (6.1) avec a remplacée par $f(a)$, f remplacée par g et η remplacée par η_2, c'est-à-dire

$$g\big(f(a)+k\big) \;=\; g\big(f(a)\big) \;+\; k\cdot g'\big(f(a)\big) \;+\; k\cdot\eta_2(k)\,. \tag{6.6}$$

Soit $V_2 = \{t \in \mathbb{R}; t - f(a) \in U_2\}$. C'est un voisinage de $f(a)$. Comme f est dérivable en a, elle y est continue (cf. proposition 6.6). Donc, par le corollaire 4.29, on a

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) \;=\; \lim_{x\to a} f(x) \;=\; f(a)\,.$$

Il existe donc un voisinage U_1' de 0 tel que, pour $h \in U_1'$ avec $a+h \in \mathcal{D}_1$, on ait $f(a+h) \in V_2$. Soit $U_1'' = U_1 \cap U_1'$. C'est un voisinage de a (cf. proposition 2.15).
Pour $h \in U_1''$ avec $a+h \in \mathcal{D}_1$, on a $h \in U_1'$ donc $f(a+h) \in V_2$ et $k := f(a+h) - f(a) \in U_2$. On a aussi $f(a+h) \in \mathcal{D}_2$. Donc, par (6.6),

$$g\big(f(a+h)\big) \;=\; g\big(f(a)+k\big) \;=\; g\big(f(a)\big) \;+\; k\cdot g'\big(f(a)\big) \;+\; k\cdot\eta_2(k)\,.$$

Comme $h \in U_1$ et $a+h \in \mathcal{D}_1$, on a, par (6.2),

$$\begin{aligned} g\big(f(a+h)\big) \;&= g\big(f(a)\big) \;+\; h\cdot\big(f'(a) \;+\; \eta_1(h)\big)\cdot g'\big(f(a)\big) \;+\; k\cdot\eta_2(k) \\ &= g\big(f(a)\big) \;+\; h\cdot f'(a)\cdot g'\big(f(a)\big) \;+\; h\cdot\Big(g'\big(f(a)\big)\eta_1(h) \;+\; \big(f'(a) \;+\; \eta_1(h)\big)\eta_2\big(f(a+h)-f(a)\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

D'après les propositions 4.28 et 4.32,

$$\lim_{h\to 0}\Big(g'\big(f(a)\big)\eta_1(h) \;+\; \big(f'(a) \;+\; \eta_1(h)\big)\eta_2\big(f(a+h)-f(a)\big)\Big) \;=\; 0$$

donc $g\circ f$ est dérivable en a de nombre dérivé $f'(a)\cdot g'\big(f(a)\big)$. □

6.2 Fonctions réelles dérivables et théorème des accroissements finis.

Dans ce paragraphe, on se penche sur les fonctions réelles dérivables. On s'intéresse aux extréma de telles fonctions. On montre ensuite le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. On termine en justifiant le fait qu'une fonction dérivable de dérivée positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle.

Définition 6.10. *Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}$.*
On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un voisinage U de a tel que $f(a)$ majore l'ensemble non vide $f(U\cap\mathcal{D}) = \{f(x); x \in U\cap\mathcal{D}\}$ (dans le sens de la définition 1.9). Dans ce cas, le réel $f(a)$ est le maximum de $f(U\cap\mathcal{D})$ et est appelée valeur maximale locale de f.
On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un voisinage U de a tel que $f(a)$ minore l'ensemble non vide $f(U\cap\mathcal{D}) = \{f(x); x \in U\cap\mathcal{D}\}$ (dans le sens de la définition 1.9). Dans ce cas, le réel $f(a)$ est le minimum de $f(U\cap\mathcal{D})$ et est appelée valeur minimale locale de f.
Lorsque $f(a)$ majore $f(\mathcal{D})$, $f(a)$ est alors le maximum de $f(\mathcal{D})$ et on dit que f admet un maximum global en a. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée valeur maximale de f.
Lorsque $f(a)$ minore $f(\mathcal{D})$, $f(a)$ est alors le minimum de $f(\mathcal{D})$ et on dit que f admet un minimum global en a. Dans ce cas, $f(a)$ est appelée valeur minimale de f.
On dif que f admet un extrémum (resp. extrémum local) en a si elle admet un maximum (resp. maximum local) en a ou bien si elle admet un minimum (resp. minimum local) en a.

On remarque qu'un extrémum global est aussi un extrémum local (il suffit de prendre $\mathbb{R}$ comme voisinage de a). La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$ admet un minimum global en 0. Elle n'admet aucun maximum local. La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = |x|$ si $x \in [-1;1]$ et $g(x) = -|x|$ si $x \notin [-1;1]$.

Elle admet un minimum local en 0 mais n'a pas de minimum global. Elle admet de maxima locaux : en 1 et -1. Ces deux maxima sont en fait globaux.

Voyons maintenant l'influence de la dérivabilité sur les extréma locaux.

Proposition 6.11. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extrémum local en $a \in I$ et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.*

Attention : Si, dans cette proposition 6.11, l'intervalle n'est pas ouvert, le résultat peut être faux. C'est le cas pour la fonction Id : $[0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in [0;1]$, associe x. Elle est dérivable sur $[0;1]$ de dérivée constante égale à 1 sur $[0;1]$. Elle admet un minimum global en 0 mais on a $\mathrm{Id}'(0) = 1 \neq 0$.
Dans le cadre de la proposition 6.11, un point a qui vérifie $f'(a) = 0$ (on appelle cela un point critique de f), n'est pas forcément un extrémum de f. C'est le cas pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $\mathbb{R} \ni x \mapsto 3x^2$. Le point 0 est un point critique de f puisque $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. Mais 0 n'est pas un extrémum local de f.

Preuve de la proposition 6.11 : Soit $a \in I$ un extrémum local de f. Comme I est un intervalle ouvert, a est adhérent aux ensembles $I_a^+ =]a; +\infty[\cap I$ et $I_a^- =]-\infty; a[\cap I$.

a). On suppose que a est un maximum local de f. Il existe donc un voisinage U de a tel que $f(a)$ majore $f(U \cap I)$. En particulier, pour $x \in U \cap I_a^+$, on a $x - a > 0$ et $f(x) \leq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à droite en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), on obtient $f'(a) \leq 0$.
Comme $f(a)$ majore $f(U \cap I)$, on a aussi, pour $x \in U \cap I_a^-$, $x - a < 0$ et $f(x) \leq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à gauche en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), on obtient $f'(a) \geq 0$.
Conclusion : $f'(a) = 0$.

b). On suppose que a est un minimum local de f. Il existe donc un voisinage U de a tel que $f(a)$ minore $f(U \cap I)$. En particulier, pour $x \in U \cap I_a^+$, on a $x - a > 0$ et $f(x) \geq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à droite en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), on obtient $f'(a) \geq 0$.
Comme $f(a)$ minore $f(U \cap I)$, on a aussi, pour $x \in U \cap I_a^-$, $x - a < 0$ et $f(x) \geq f(a)$ donc

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0 .$$

Comme f est dérivable en a, la limite à gauche en a du membre de gauche de l'inégalité précédente existe et vaut $f'(a)$ (cf. proposition 4.21) donc, par passage à la limite dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), on obtient $f'(a) \leq 0$.
Conclusion : $f'(a) = 0$. □

Cette proposition 6.11 va nous permettre de démontrer un cas particulier du futur théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), à savoir :

Théorème 6.12. Théorème de Rolle.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et qui vérifie $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

En particulier, pour une fonction dérivable (donc continue), il existe un point critique entre de points prenant la même valeur par f. Pour préparer la preuve de ce théorème 6.12, on le montre dans un cas particulier.

Lemme 6.13. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, et qui vérifie $g(a) = g(b) = 0$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.*

Preuve : Soit $m_+ = \sup g([a;b])$ et $m_- = \inf g([a;b])$. Comme g est continue, on sait, d'après le théorème 5.3, m_+ et m_- sont réelles et sont des valeurs de g. Comme $g(a) = 0$, on a $m_- \leq 0 \leq m_+$.

a). Cas où $m_- = 0 = m_+$. Par définition des bornes supérieure et inférieure, g est nulle. Sa dérivée est donc nulle aussi. Tout point $c \in]a;b[$ vérifie $g'(c) = 0$.

b). Cas où $0 < m_+$. Soit $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = m_+$. Comme $g(a) = 0 < m_+$ et $g(b) = 0 < m_+$, c est différent de a et de b, donc $c \in]a;b[$. De plus, g admet un maximum (local) en c et, comme g est dérivable sur $]a;b[$, g est dérivable en c. Par la proposition 6.11, $g'(c) = 0$.

c). Cas où $m_- < 0$. Soit $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = m_-$. Comme $g(a) = 0 > m_-$ et $g(b) = 0 > m_-$, c est différent de a et de b, donc $c \in]a;b[$. De plus, g admet un minimum (local) en c et, comme g est dérivable sur $]a;b[$, g est dérivable en c. Par la proposition 6.11, $g'(c) = 0$. □

Preuve du théorème 6.12 : Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(a)$. Par hypothèse, f est continue sur $[a;b]$ et la fonction constante égale à $-f(a)$ y est aussi continue. Par somme (cf. proposition 4.32), g est continue sur $[a;b]$. Par hypothèse, f est dérivable sur $]a;b[$ et la fonction constante égale à $-f(a)$ y est aussi dérivable. Par somme (cf. proposition 6.8), g est dérivable sur $]a;b[$ et $g' = f' - 0 = f'$. De plus, comme $f(a) = f(b)$, on a $g(a) = f(a) - f(a) = 0$ et $g(b) = f(b) - f(a) = 0$. Par le lemme 6.13, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme $g' = f'$, on a aussi $f'(c) = 0$. □

On établit maintenant la généralisation suivante du théorème de Rolle.

Théorème 6.14. Théorème des accroissements finis.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Si l'on applique ce théorème dans le cas où $f(a) = f(b)$, on trouve un point $c \in]a;b[$ tel que $f'(c)(b-a) = 0$. Comme $a \neq b$, on en déduit que $f'(c) = 0$, c'est-à-dire le résultat du théorème de Rolle.

Preuve du théorème 6.14 : Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) \;=\; f(x) \;-\; \left(f(a) \;+\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \right) .$$

D'après la proposition 4.32, g est continue sur $[a;b]$. D'après la proposition 6.8, g est dérivable sur $]a;b[$ et, pour $x \in]a;b[$,

$$g'(x) \;=\; f'(x) \;-\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a} .$$

De plus,

$$\begin{aligned} g(b) \;&= f(b) \;-\; \left(f(a) \;+\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a} \cdot (b-a) \right) \;=\; f(b) \;-\; \big(f(a) \;+\; f(b) \;-\; f(a) \big) \;=\; 0 \,, \\ g(a) \;&= f(a) \;-\; \left(f(a) \;+\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a} \cdot (a-a) \right) \;=\; f(a) \;-\; f(a) \;=\; 0 \,. \end{aligned}$$

Par le théorème de Rolle (cf. théorème 6.12) appliqué à g, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc

$$0 \;=\; f'(c) \;-\; \frac{f(b) \;-\; f(a)}{b-a}$$

et donc $(b-a)f'(c) = f(b) - f(a)$. □

On peut maitenant démontrer le résultat suivant qui permet de dresser le tableau de variations d'une fonction dérivable lorsqu'on connait le signe de sa dérivée.

Corollaire 6.15. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ (en particulier $\inf I < \sup I$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, qui est dérivable sur $]\inf I; \sup I[$.*

1. *Si f' est positive sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est croissante sur I.*
2. *Si f' est strictement positive sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est strictement croissante sur I.*
3. *Si f' est négative sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est décroissante sur I.*
4. *Si f' est strictement négative sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est strictement décroissante sur I.*
5. *Si f' est nulle sur $]\inf I; \sup I[$ alors f est constante sur I.*

Remarque 6.16. *Insistons sur ce que dit ce résultat.*
Si, par exemple, $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, dérivable sur $]a;b[$ de dérivée positive, alors f est croissante sur $[a;b]$. En particulier, pour $x \in [a;b]$, $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, même si $f'(a)$ n'est pas défini, même si $f'(b)$ n'est pas défini.
Pour dresser le tableau des variations d'une fonction dérivable sur des intervalles, on utilise souvent ce corollaire 6.15 en conjonction avec le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) ou son corollaire (cf. corollaire 5.2) ou encore avec le théorème de Heine (cf. théorème 5.3).

Preuve du corollaire 6.15 : Soit $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$. Par hypothèse, on sait que f est continue sur $[x_-; x_+]$, dérivable sur $]x_-; x_+[$, donc, par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), il existe $c \in]x_-; x_+[$, tel que $f(x_+) - f(x_-) = f'(c)(x_+ - x_-)$. On a $c \in]\inf I; \sup I[$.

1. On suppose que f' est positive sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) \geq 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) \geq f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ et aussi lorsque $x_+ = x_-$. Donc f est croissante sur I.
2. On suppose que f' est strictement positive sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) > 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) > f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est strictement croissante sur I.
3. On suppose que f' est négative sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) \leq 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) \leq f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ et aussi lorsque $x_+ = x_-$. Donc f est décroissante sur I.
4. On suppose que f' est strictement négative sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) < 0$. Comme $x_+ - x_- > 0$, on en déduit que $f(x_+) < f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est strictement décroissante sur I.
5. On suppose que f' est nulle sur $]\inf I; \sup I[$. Donc $f'(c) = 0$ et $f(x_+) = f(x_-)$. Ceci est valide pour tout $(x_-; x_+) \in I^2$ avec $x_+ > x_-$ donc f est constante sur I. □

6.3 Classes de fonctions.

On se place de nouveau dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On introduit des classes de régularité pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

6.3.1 Classes C^0 et C^1.

Définition 6.17. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté par $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.*

Proposition 6.18. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
L'ensemble $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{\mathcal{D}};+;\cdot)$. En particulier, si $(f;g)\in(C^0(\mathcal{D};\mathbb{K}))^2$ alors $f+g\in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ et, si $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda f\in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.
Pour $(f;g)\in(C^0(\mathcal{D};\mathbb{K}))^2$, le produit fg appartient à $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.
Si $f\in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ et f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors $(1/f)$ est bien définie sur $\mathcal{D}$ et $(1/f)\in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.
Si $f\in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ alors $\overline{f}$ appartient à $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$.
Si $\mathcal{D}'$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, $h:\mathcal{D}'\longrightarrow\mathcal{D}$ avec $h\in C^0(\mathcal{D}';\mathbb{K})$, et si $g\in C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$, alors $g\circ h$, la composée de g par h appartient à $C^0(\mathcal{D}';\mathbb{K})$.

Preuve : On a vu que la fonction nulle sur $\mathcal{D}$ est continue. Elle appartient donc à $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$. D'après la proposition 4.32, la somme de deux éléments de $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ est encore dans $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$, le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ par un élément de $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ est encore dans $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$. Donc $C^0(\mathcal{D};\mathbb{K})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathcal{D}}$.
Les deux propriétés suivantes sont une reformulation du 5 de la proposition 4.32.
L'avant-dernière propriété est une conséquence du corollaire 4.34.
Le dernier résultat est une conséquence immédiate de la proposition 4.28. □

Définition 6.19. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions, à valeurs dans $\mathbb{K}$, définies et dérivables sur $\mathcal{D}$, dont la dérivée est continue sur $\mathcal{D}$, est noté par $C^1(\mathcal{D};\mathbb{K})$.*

Proposition 6.20. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$.*
L'ensemble $C^1(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. En particulier, si $(f;g)\in(C^1(I;\mathbb{K}))^2$ alors $f+g\in C^1(I;\mathbb{K})$ et, si $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda f\in C^1(I;\mathbb{K})$.
On a l'inclusion $C^1(I;\mathbb{K})\subset C^0(I;\mathbb{K})$.
Pour $(f;g)\in(C^1(I;\mathbb{K}))^2$, le produit fg appartient à $C^1(I;\mathbb{K})$.
Si $f\in C^1(I;\mathbb{K})$ et f ne s'annule pas sur I, alors $(1/f)$ est bien définie sur I et $(1/f)\in C^1(I;\mathbb{K})$.
Si $f\in C^1(I;\mathbb{K})$ alors $\overline{f}$ appartient à $C^1(I;\mathbb{K})$.
Si I' un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $h:I'\longrightarrow I$ avec $h\in C^1(I';\mathbb{K})$, et si $g\in C^1(I;\mathbb{K})$, alors $g\circ h$, la composée de g par h appartient à $C^1(I';\mathbb{K})$.

Preuve : On a vu que la fonction nulle sur I est dérivable sur I de dérivée nulle, donc continue sur I. Elle appartient donc à $C^1(I;\mathbb{K})$. D'après la proposition 6.8, la somme de deux éléments de $C^1(I;\mathbb{K})$ est encore dans $C^1(I;\mathbb{K})$, le produit d'un scalaire de $\mathbb{K}$ par un élément de $C^1(I;\mathbb{K})$ est encore dans $C^1(I;\mathbb{K})$. Donc $C^1(I;\mathbb{K})$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.
Soit $g\in C^1(I;\mathbb{K})$. Par définition, g est donc dérivable sur I. D'après la proposition 6.6, g est continue sur I donc $g\in C^0(I;\mathbb{K})$. On a bien $C^1(I;\mathbb{K})\subset C^0(I;\mathbb{K})$.
Soit $(f;g)\in(C^1(I;\mathbb{K}))^2$. D'après la proposition 6.8, fg est dérivable sur I et $(fg)'=f'g+fg'$. Par définition de $C^1(I;\mathbb{K})$, $f'\in C^0(I;\mathbb{K})$ et $g'\in C^0(I;\mathbb{K})$. D'après $C^1(I;\mathbb{K})\subset C^0(I;\mathbb{K})$, $f\in C^0(I;\mathbb{K})$ et $g\in C^0(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.18, $f'g+fg'\in C^0(I;\mathbb{K})$ donc $(fg)'\in C^0(I;\mathbb{K})$. On a montré que $(fg)\in C^1(I;\mathbb{K})$.
Soit $f\in C^1(I;\mathbb{K})$ telle que f ne s'annule pas sur I. D'après la proposition 6.8, $1/f$ est dérivable sur I et $(1/f)'=-f'/f^2$. On a $f'\in C^0(I;\mathbb{K})$ et, d'après $C^1(I;\mathbb{K})\subset C^0(I;\mathbb{K})$, $f\in C^0(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.18, $-f'/f^2\in C^0(I;\mathbb{K})$ soit $(1/f)'\in C^0(I;\mathbb{K})$. On a montré que $(1/f)\in C^1(I;\mathbb{K})$.
Soit $f\in C^1(I;\mathbb{K})$. D'après la proposition 6.8, $\overline{f}$ est dérivable sur I et $(\overline{f})'=\overline{f'}$ sur I. Comme f' est continue sur I, on a la continuité de $(\overline{f})'$ sur I par le corollaire 4.34. Donc $\overline{f}\in C^1(I;\mathbb{K})$.
Soit $h:I'\longrightarrow I$ de classe C^1 sur I' et $g\in C^1(I;\mathbb{K})$. Par la proposition 6.9, $g\circ h$ est dérivable et $(g\circ h)'=(g'\circ h)\cdot h'$. Par hypothèse, on a $g'\in C^0(I;\mathbb{K})$ et $h'\in C^0(I';\mathbb{K})$. Comme $C^1(I';\mathbb{K})\subset C^0(I';\mathbb{K})$, $h\in C^0(I';\mathbb{K})$. Par la proposition 6.18, $(g'\circ h)\cdot h'\in C^0(I';\mathbb{K})$ donc $(g\circ h)'\in C^0(I';\mathbb{K})$. On a montré que $(g\circ h)\in C^1(I';\mathbb{K})$. □

Voici une famille d'exemples de fonctions de classe C^1.

Définition 6.21. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par, pour $x \in I$, $f_n(x) = x^n$. On a $f_n \in \mathbb{K}^I$. On note par $P(I;\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ engendrée par la famille $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. C'est l'espace des fonctions polynômiales sur I à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

On rappelle que $P(I;\mathbb{K})$ est le plus petit $\mathbb{K}$-espace vectoriel contenant l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Comme $\mathbb{K}^I$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel contenant l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$, $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. Un élément de $P(I;\mathbb{K})$ est donc une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $(i_1;\cdots;i_p) \in \mathbb{N}^p$, $(\lambda_1;\cdots;\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot f_{i_k}(x)\,.$$

Si $d = \max\{i_k; k \in [\![1;p]\!]\}$, on peut trouver $(a_0;\cdots;a_d) \in \mathbb{K}^{d+1}$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot f_k(x) \;=\; \sum_{k=0}^{d} a_k \cdot x^k\,.$$

Proposition 6.22. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$ (et donc aussi de $C^0(I;\mathbb{K})$). De plus, $f_0' = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n' = n f_{n-1}$.*

Preuve : Comme la fonction f_0 est la fonction constante égale à 1 sur I et comme on a vu qu'une fonction constante sur un intervalle est C^1 sur cet intervalle de dérivée nulle, $f_0 \in C^1(I;\mathbb{K})$ et $f_0' = 0$. Comme f_1 est la fonction identité sur I, elle y est dérivable de dérivée constante égale à 1 donc elle est aussi de classe C^1 sur I de $f_1' = f_0$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = (f_n \in C^1(I;\mathbb{K})\,\text{et}\,f_n' = n f_{n-1})$. Comme $f_1 \in C^1(I;\mathbb{K})$ et $f_1' = f_0 = 1 \cdot f_0$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $f_{n+1} = f_1 \cdot f_n$, comme $f_1 \in C^1(I;\mathbb{K})$, comme $f_n \in C^1(I;\mathbb{K})$ par hypothèse de récurrence, on déduit de la proposition 6.8 que $f_{n+1} \in C^1(I;\mathbb{K})$ et que

$$f_{n+1}' \;=\; f_1' \cdot f_n \,+\, f_1 \cdot f_n' \;=\; f_n \,+\, n \cdot f_1 \cdot f_{n-1} \;=\; (n+1) \cdot f_n\,.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $C^1(I;\mathbb{K})$ contient donc l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$. Par définition de $P(I;\mathbb{K})$, $P(I;\mathbb{K})$ est donc un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$. □.

6.3.2 Classes C^N, pour N entier naturel ou infini.

On introduit maintenant des classes de régularités supérieures à C^1. Pour un intervalle non réduit à un point I de $\mathbb{R}$, on va construire par récurrence une suite $(C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$. En particulier, on retrouvera l'espace $C^1(I;\mathbb{K})$ introduit dans le paragraphe précédent.

Proposition 6.23. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Il existe une suite $C = (C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$, de premier terme $C^0(I;\mathbb{K})$ et vérifiant la relation de récurrence :*

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad C^n(I;\mathbb{K}) \;=\; \left\{f \in \mathbb{K}^I\,;\; f \text{ est dérivable et } f' \in C^{n-1}(I;\mathbb{K})\right\}. \tag{6.7}$$

Preuve : Voir le paragraphe 9.2.3. □

On note que la définition de $C^1(I;\mathbb{K})$ donnée par cette proposition 6.23 est identique à celle donnée dans la définition 6.19 avec $\mathcal{D} = I$. On montre que la suite $(C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Proposition 6.24. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. La suite $C = (C^n(I;\mathbb{K}))_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces vectoriels de $C^0(I;\mathbb{K})$, de premier terme $C^0(I;\mathbb{K})$ et vérifiant la relation de récurrence* (6.7) *est décroissante, i.e.*

$$\forall\,(m;n)\in\mathbb{N}^2\,,\quad \big(m\geq n\implies C^m(I;\mathbb{K})\ \subset\ C^n(I;\mathbb{K})\big)\,. \tag{6.8}$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. On montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n) = (C^{n+1}\subset C^n)$.
Par la proposition 6.20, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}$. Soit $f\in C^{n+2}$. Par définition, f est dérivable et $f'\in C^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, $f'\in C^n$. Comme f est dérivable et $f'\in C^n$, $f\in C^{n+1}$, par définition de C^{n+1}. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Pour prouver (6.8), on montre par récurrence la proposition $\mathcal{Q}(q)$ donnée, pour $q\in\mathbb{N}$, par

$$\mathcal{Q}(q)\ =\ \big(\forall p\in\mathbb{N}\,,\quad C^{p+q}\ \subset\ C^p\big)\,.$$

$\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(q)$ soit vraie pour un $q\in\mathbb{N}$. Soit $p\in\mathbb{N}$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à $p+1$, on a $C^{p+q+1} = C^{(p+1)+q}\subset C^{p+1}$. D'après $\mathcal{P}(p)$, $C^{p+1}\subset C^p$. Donc $C^{p+q+1}\subset C^p$. Ceci étant vrai pour tout $p\in\mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q\in\mathbb{N}$.
Soit $(m;n)\in[\![n_0;+\infty[\![^2$ avec $m\geq n$. Comme $\mathcal{Q}(m-n)$ est vraie, on a $C^m = C^{n+(m-n)}\subset C^n$. On a montré (6.8). □

Définition 6.25. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. On pose*

$$C^\infty(I;\mathbb{K})\ :=\ \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(I;\mathbb{K})\,.$$

Soit $f : I\longrightarrow\mathbb{K}$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, on dit que f est (de classe) C^n sur I si $f\in C^n(I;\mathbb{K})$.
On dit que f est (de classe) C^∞ sur I si $f\in C^\infty(I;\mathbb{K})$.

Proposition 6.26. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$.*

1. *L'ensemble $C^\infty(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^0(I;\mathbb{K})$.*
2. *Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $C^\infty(I;\mathbb{K})\subset C^n(I;\mathbb{K})$.*
3. *La formule* (6.7) *est encore valable pour n remplacé par $+\infty$ avec la convention $+\infty-1=+\infty$:*

$$C^\infty(I;\mathbb{K})\ =\ \big\{f\in\mathbb{K}^I\,;\ f\text{ est dérivable et }f'\in C^\infty(I;\mathbb{K})\big\}\,. \tag{6.9}$$

Preuve : Comme $C^\infty(I;\mathbb{K})$ est une intersection de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Par sa définition, $C^\infty(I;\mathbb{K})$ est contenu dans chaque $C^k(I;\mathbb{K})$, pour $k\in\mathbb{N}$, et en particulier dans $C^0(I;\mathbb{K})$. Il reste à montrer (6.9). On note par $\mathcal{E}$ l'ensemble à droite dans l'égalité (6.9).
Soit $g\in C^\infty(I;\mathbb{K})$. Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Par définition de $C^\infty(I;\mathbb{K})$, $g\in C^k(I;\mathbb{K})$. D'après (6.7), g est dérivable et $g'\in C^{k-1}(I;\mathbb{K})$. Ceci étant vrai pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$g'\ \in\ \bigcap_{k=1}^{\infty} C^{k-1}(I;\mathbb{K})\ =\ \bigcap_{\ell=0}^{\infty} C^\ell(I;\mathbb{K})\ =\ C^\infty(I;\mathbb{K})\,.$$

Donc $g\in\mathcal{E}$. On a montré que $C^\infty(I;\mathbb{K})\subset\mathcal{E}$.
Soit $g\in\mathcal{E}$. On a donc g dérivable et $g'\in C^\infty(I;\mathbb{K})$. Soit $k\in\mathbb{N}$. Par définition de $C^\infty(I;\mathbb{K})$, $g'\in C^k(I;\mathbb{K})$ donc, par (6.7), $g\in C^{k+1}(I;\mathbb{K})$. Ceci étant vrai pour tout $k\in\mathbb{N}$,

$$g\ \in\ \bigcap_{k=0}^{\infty} C^{k+1}(I;\mathbb{K})\ =\ \bigcap_{\ell=1}^{\infty} C^\ell(I;\mathbb{K})\,.$$

Comme g est dérivable, elle est continue, par la proposition 6.6. Donc $g \in C^0(I;\mathbb{K})$. D'où

$$g \in C^0(I;\mathbb{K}) \bigcap \left(\bigcap_{\ell=1}^{\infty} C^\ell(I;\mathbb{K}) \right) = \bigcap_{\ell=0}^{\infty} C^\ell(I;\mathbb{K}) = C^\infty(I;\mathbb{K}) .$$

On a montré que $\mathcal{E} \subset C^\infty(I;\mathbb{K})$.
On a donc montré (6.9). □

Pour une fonction $f \in C^N(I;\mathbb{K})$ avec $N \in (\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$, on voudrait définir la suite (éventuellement finie) de ses dérivées successives, tant qu'elles existent : dérivée (première), dérivée seconde = dérivée de la dérivée, dérivée troisième = dérivée de la dérivée de la dérivée, etc .... Afin d'inclure le cas $N = 0$, on décide qu'une fonction est aussi sa dérivée 0ième. On va procéder par récurrence. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 6.27. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $f \in C^N(I;\mathbb{K})$. Soit $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Il existe une unique application $d : D_N \longrightarrow C^0(I;\mathbb{K})$ telle que $d(0) = f$ et*

$$\forall\, n \in \left(\mathbb{N}^* \cap D_N\right), \quad \Big(d(n) = \big(d(n-1)\big)' \quad et \quad d(n) \in C^{N-n}(I;\mathbb{K}) \Big), \tag{6.10}$$

avec la convention selon laquelle, pour $n \in \mathbb{N}$, $\infty - n = \infty$. Ici "$(g)'$" désigne la dérivée d'une fonction dérivable $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$.

Preuve : Voir le paragraphe 9.2.4. □

Définition 6.28. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $f \in C^N(I;\mathbb{K})$. Soit $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Pour $n \in D_N$, on appelle dérivée nième de f sur I la fonction $d(n) \in C^{N-n}(I;\mathbb{K})$ construite dans la proposition 6.27. On la note $f^{(n)}$.*
On a donc $f^{(0)} = f$ et

$$\forall\, n \in \left(\mathbb{N}^* \cap D_N\right), \quad \Big(f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \quad et \quad f^{(n)} \in C^{N-n}(I;\mathbb{K}) \Big), \tag{6.11}$$

Il est commode de pouvoir repérer les fonctions de classe C^N sur I (pour un $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) en appliquant successivement l'opération de dérivation en partant de f. C'est ce que donne le résultat suivant.

Proposition 6.29. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On considère les propositions*

$$\mathcal{D}(p) := \Big(\exists\, (g_0; \cdots; g_{p-1}; g_p) \in \left(C^1(I;\mathbb{K})\right)^p \times C^0(I;\mathbb{K}) ; \ \big(g_0 = f\big) \text{ et } \big(\forall j \in [\![0; p-1]\!] , g_j' = g_{j+1}\big) \Big)$$

et

$$\mathcal{E}(p) := \Big(\big(f \in C^p(I;\mathbb{K})\big) \quad et \quad \big(\forall j \in [\![0;p]\!] , f^{(j)} = g_j\big) \Big) .$$

On a l'implication : $(\mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$.

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ soit $\mathcal{P}(p) = (\forall f \in \mathbb{K}^I, \mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$.
Soit $f \in \mathbb{K}^I$. Supposons $\mathcal{D}(1)$ vraie. Il existe donc $g_0 \in C^1$ et $g_1 = g_0' \in C^0$. De plus $f = g_0$. Donc f est dérivable et $f' = g_1 \in C^0$. Par (6.7) avec $n = 1$, $f \in C^1$ et $\mathcal{E}(1)$ est vraie. On a montré $\mathcal{P}(1)$.
Supposons $\mathcal{P}(p)$ pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathbb{K}^I$. On suppose $\mathcal{D}(p+1)$ vraie. Il existe donc $(g_0; \cdots; g_p) \in (C^1)^p$ et $g_{p+1} \in C^0$ telles que $g_0 = f$ et, pour $j \in [\![0;p]\!]$, $g_j' = g_{j+1}$. Comme $C^1 \subset C^0$, $\mathcal{D}(p)$ vraie. Par l'hypothèse de récurrence, $f \in C^p$ et, $j \in [\![0;p]\!]$, $f^{(j)} = g_j$. Donc $f' = g_1$ et, en prenant les fonctions $g_1; \cdots; g_{p+1}$, on voit que $\mathcal{D}(p)$ est vraie avec f remplacée par f'. Par l'hypothèse de récurrence avec f remplacée par f', $f' \in C^p$. Par (6.7), $f \in C^{p+1}$. De plus, $f^{(p+1)} = (f^{(p)})' = (g_p)' = g_{p+1}$. On a montré $\mathcal{E}(p+1)$.
Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et toute $f \in \mathbb{K}^I$, l'implication $(\mathcal{D}(p) \Longrightarrow \mathcal{E}(p))$ est vraie. □

Remarque 6.30. *Prenons la fonction nulle sur un intervalle I, notée f. On sait qu'elle y est continue, dérivable de dérivée nulle. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $(g_0;\cdots;g_{p-1};g_p) = (f;\cdots;f) \in \big(C^1(I;\mathbb{K})\big)^p \times C^0(I;\mathbb{K})$, la propriété $\mathcal{D}(p)$ de la proposition 6.29 est vraie donc $\mathcal{E}(p)$ est aussi vraie. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction nulle appartient à $C^\infty(I;\mathbb{K})$, d'après la définition 6.25, et ses dérivées successives sont nulles (i.e. égales à f).*

Pour une fonction $f \in C^\infty(I;\mathbb{K})$, par exemple, on obtient donc ses dérivées de proche en proche : $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')'$ notée aussi f'', $f^{(3)} = ((f')')' = (f'')'$, etc ... On vérifie que $f^{(3)}$ est aussi $(f')^{(2)}$. On va voir que c'est un fait général.

Proposition 6.31. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $(p;q) \in \mathbb{N}^2$. On considère les propositions $\mathcal{P}_1 = (f \in C^p(I;\mathbb{K})$ et $f^{(p)} \in C^q(I;\mathbb{K}))$, $\mathcal{P}_2 = (f \in C^{p+q}(I;\mathbb{K}))$ et*

$$\mathcal{P}_3 = \big(f \in C^p(I;\mathbb{K}) \text{ et } f^{(p)} \in C^q(I;\mathbb{K}) \text{ et } (f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}\big)\,.$$

On a les implications : $\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3$.
Comme $\mathcal{P}_3$ implique $\mathcal{P}_1$, on a $\mathcal{P}_1 \Longleftrightarrow \mathcal{P}_2$ et, quand l'une des deux est vraie, les deux sont vraies et on a $(f^{(p)})^{(q)} = f^{(p+q)}$.

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. Pour $q \in \mathbb{N}$ soit

$$\mathcal{Q}(q) \;:=\; \Big(\forall\, f \in \mathbb{K}^I\,,\, \forall\, p \in \mathbb{N}\,,\quad \big(\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2\big) \quad \text{et} \quad \big(\mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3\big)\Big)\,.$$

Pour $q = 0$, l'implication $\big(\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2\big)$ s'écrit

$$\big(f \in C^p \text{ et } f^{(p)} \in C^0\big) \;\Longrightarrow\; \big(f \in C^{p+0}\big)\,.$$

Elle est vraie. Toujours pour $q = 0$, l'implication $\big(\mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3\big)$ s'écrit

$$\big(f \in C^{p+0}\big) \;\Longrightarrow\; \big(f \in C^p \text{ et } f^{(p)} \in C^0 \text{ et } (f^{(p)})^{(0)} = f^{(p+0)}\big)\,.$$

Elle est aussi vraie, d'après la proposition 6.27. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{Q}(q)$ vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $p \in \mathbb{N}$.
On montre l'implication $\big(\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2\big)$ avec q remplacé par $q+1$. On suppose $f \in C^p$ et $f^{(p)} \in C^{q+1}$. Par (6.7) avec $n = q+1$, $f^{(p)}$ est dérivable et $(f^{(p)})' \in C^q$. En prenant les fonctions $g_j = f^{(j)} \in C^1$, pour $j \in [\![0;p]\!]$, et $g_{p+1} = (f^{(p)})' \in C^0$, la proposition $\mathcal{D}(p+1)$ de proposition 6.29 est vraie. On obtient donc, par cette proposition 6.29, que $f \in C^{p+1}$. Comme $f' = f^{(1)} = g_1$ et $\mathcal{D}(p+1)$ est vraie, la proposition $\mathcal{D}(p)$, avec f remplacée par f' et $(g_0;\cdots;g_p)$ remplacé par $(g_1;\cdots;g_{p+1})$, est vraie. Donc, encore par la proposition 6.29, $f' \in C^p$ et $(f')^{(p)} = g_{p+1} = (f^{(p)})' \in C^q$. Par l'hypothèse de récurrence pour f', on a $f' \in C^{p+q}$. Par définition de C^{p+q+1} (cf. (6.7)), on obtient $f \in C^{p+q+1}$. On a montré $\big(\mathcal{P}_1 \Longrightarrow \mathcal{P}_2\big)$ avec q remplacé par $q+1$.
On montre l'implication $\big(\mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3\big)$ avec q remplacé par $q+1$. On suppose que $f \in C^{p+(q+1)}$. Comme $f \in C^{(p+1)+q}$, on sait, par la seconde implication de $\mathcal{Q}(q)$, que $f \in C^{p+1}$ et $f^{(p+1)} \in C^q$ et $(f^{(p+1)})^{(q)} = f^{((p+1)+q)}$. Donc $f^{(p)}$ est dérivable et $(f^{(p)})' = f^{(p+1)} \in C^q$. Par (6.7) avec $n = q+1$, $f^{(p)} \in C^{q+1}$. De plus,

$$f^{(p+(q+1))} \;=\; f^{((p+1)+q)} \;=\; \big(f^{(p+1)}\big)^{(q)} \;=\; \Big(\big(f^{(p)}\big)'\Big)^{(q)} \;=\; \big(f^{(p)}\big)^{(q+1)}$$

d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{Q}(q)$ appliquée à $f^{(p)}$. On a montré $\big(\mathcal{P}_2 \Longrightarrow \mathcal{P}_3\big)$ avec q remplacé par $q+1$.
Donc $\mathcal{Q}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$. □

Comme les ensembles $C^N(I;\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^I$, on sait que la somme de deux fonctions de classe C^N est de classe C^N et le produit d'une fonction de classe C^N par un élément de $\mathbb{K}$ est aussi de classe C^N. Qu'en est-il d'autres opérations ? C'est l'objet du résultat suivant.

Proposition 6.32. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Soit $(f;g) \in (C^N(I;\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*

1. *On sait déjà que $(f + \lambda g) \in C^N(I;\mathbb{K})$ (cf. propostion 6.23). Pour tout $n \in D_N$, sa dérivée nième est $f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$.*
2. *Le produit fg appartient à $C^N(I;\mathbb{K})$ et, pour tout $n \in D_N$, sa dérivée nième est donnée par la formule de Leibnitz suivante :*

$$\big(f \cdot g\big)^{(n)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}\,, \tag{6.12}$$

   où, pour $0 \leq k \leq n$, les C_k^n sont les coefficients du binôme de Newton définis par

$$C_k^n \;=\; \frac{n!}{(k!) \cdot ((n-k)!)} \quad \textit{et aussi notés par} \quad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right).$$

3. *Si, de plus, f ne s'annule pas sur I, alors $1/f$ est bien définie sur I et $(1/f) \in C^N(I;\mathbb{K})$.*
4. *La fonction conjuguée $\overline{f}$ appartient à $C^N(I;\mathbb{K})$ et, pour tout $n \in D_N$, sa dérivée nième est $\overline{f^{(n)}}$.*
5. *Si J un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $h : J \longrightarrow I$ et $h \in C^N(J;\mathbb{K})$ alors la composée $g \circ h$ de g par h est de classe C^N sur J.*

Preuve : Tout d'abord, on remarque que, pour $(k;n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$, on a les propriétés $C_k^n = C_{n-k}^n$, $C_n^n = C_0^n = 1$ et, pour $k \geq 1$, $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$.
Soit I et J deux intervalles non réduits à un point de $\mathbb{R}$. On rappelle que, pour $n \leq N$, $C^N(I;\mathbb{K}) \subset C^n(I;\mathbb{K})$ et $C^N(J;\mathbb{K}) \subset C^n(J;\mathbb{K})$, d'après les propositions 6.24 et 6.26.
Pour $n \in D_N$, soit $\mathcal{S}(n)$ la proposition : $((f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)})$.
$\mathcal{S}(0)$ est vraie car, par définition, $(f + \lambda g)^{(0)} = f + \lambda g = f^{(0)} + \lambda g^{(0)}$.
Supposons $\mathcal{S}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \leq N - 1$ (avec la convention $N - 1 = +\infty$ si $N = +\infty$). On a $(f + \lambda g)^{(n)} = f^{(n)} + \lambda g^{(n)}$. Puisque $n + 1 \leq N$, $(f + \lambda g)^{(n)}$ est dérivable (cf. (6.11)) et, par la proposition 6.8,

$$\Big((f + \lambda g)^{(n)}\Big)' \;=\; \Big(f^{(n)}\Big)' + \lambda\Big(g^{(n)}\Big)'.$$

En utilisant encore (6.11), on obtient $(f + \lambda g)^{(n+1)} = f^{(n+1)} + \lambda g^{(n+1)}$. Donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence éventuellement finie (cf. théorème 9.17 avec $n_b = N + 1$), $\mathcal{S}(n)$ est vraie pour tout $n \in D_N$.
On montre les autres résultats d'un seul coup.
Pour $n \in D_N$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante :
Pour tout $(f;g) \in (C^N(I;\mathbb{K}))^2$, pour tout $f_0 \in C^N(I;\mathbb{K})$ ne s'annulant pas sur I, pour toute application $h : J \longrightarrow I$ avec $h \in C^N(J;\mathbb{K})$, on a $\overline{f} \in C^n(I;\mathbb{K})$, $fg \in C^n(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0) \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $(g \circ h) \in C^n(J;\mathbb{K})$. De plus, on a $(\overline{f})^{(n)} = \overline{f^{(n)}}$ et la formule (6.12).
On remarque que, pour $n = 0$, la formule (6.12) s'écrit : $fg = fg$, car $f^{(0)} = f$ et $g^{(0)} = g$. Pour $n = 1$, cette formule s'écrit : $(fg)' = f'g + fg'$. D'après la proposition 6.18, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Si $N = 0$, on a terminé. On suppose désormais que $N \geq 1$. D'après la proposition 6.20, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \leq N - 1$. Soit $(f;g) \in (C^N(I;\mathbb{K}))^2$, $f_0 \in C^N(I;\mathbb{K})$ ne s'annulant pas sur I et $h : J \longrightarrow I$ avec $h \in C^N(J;\mathbb{K})$. Toutes ces fonctions sont dérivables. Par la proposition 6.8, $\overline{f}$, fg, $(1/f_0)$ et $g \circ h$ sont dérivables et on a $(\overline{f})' = \overline{f'}$, $(fg)' = f'g + fg'$, $(1/f_0)' = -f_0'/(f_0)^2$ et $(g \circ h)' = (g' \circ h)h'$. Par (6.7), on a $f' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $g' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $f_0' \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $h' \in C^n(J;\mathbb{K})$.
Par l'hypothèse de récurrence, on a $(\overline{f})' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $(fg)' = f'g + fg' \in C^n(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0)' = -f_0'/(f_0)^2 \in C^n(I;\mathbb{K})$ et $(g \circ h)' = (g' \circ h)h' \in C^n(J;\mathbb{K})$. Par (6.7), on a donc $\overline{f} \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$, $fg \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$, $(1/f_0) \in C^{n+1}(I;\mathbb{K})$ et $(g \circ h) \in C^{n+1}(J;\mathbb{K})$. De plus, $(\overline{f})^{(n+1)} = ((\overline{f})^{(n)})' = (\overline{f^{(n)}})' = \overline{f^{(n+1)}}$, d'après l'hypothèse de récurrence et la proposition 6.8. En dérivant une fois chaque membre de l'égalité (6.12),

on obtient, en utilisant les propositions 6.8 et 3.9,

$$\begin{aligned}
\big(f\cdot g\big)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} C_k^n\cdot\big(f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}\big)' = \sum_{k=0}^{n} C_k^n\cdot\big(f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} + f^{(n-k)}\cdot g^{(k+1)}\big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} + \sum_{\ell=1}^{n+1} C_{\ell-1}^n\cdot f^{(n-\ell+1)}\cdot g^{(\ell)}\\
&= C_0^n\cdot f^{(n+1)}\cdot g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n}\big(C_k^n + C_{k-1}^n\big)\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} + C_n^n\cdot f^{(0)}\cdot g^{(n+1)}\\
&= C_0^{n+1}\cdot f^{(n+1)}\cdot g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} + C_{n+1}^{n+1}\cdot f^{(0)}\cdot g^{(n+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1}\cdot f^{(n+1-k)}\cdot g^{(k)} = \sum_{\ell=0}^{n+1} C_{n+1-\ell}^{n+1}\cdot f^{(\ell)}\cdot g^{(n+1-\ell)}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n+1} C_\ell^{n+1}\cdot f^{(\ell)}\cdot g^{(n+1-\ell)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1}\cdot f^{(k)}\cdot g^{(n+1-k)}\,.
\end{aligned}$$

On a montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence éventuellement finie (cf. théorème 9.17 avec $n_b = N+1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in D_N$. □

On a vu dans le paragraphe 6.3.1 précédent que l'espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ des fonctions polynômiales sur I à coefficients dans $\mathbb{K}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I;\mathbb{K})$ (cf. proposition 6.22). On a bien mieux comme le montre le résultat suivant. On rappelle (cf. définition 6.21) que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est définie par $f_n(x) = x^n$.

Proposition 6.33. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $P(I;\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(I;\mathbb{K})$. De plus, pour tout $(n;p) \in \mathbb{N}^2$,*

$$f_n^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!}\cdot f_{n-p} \quad si \quad p \le n \quad et \quad f_n^{(p)} = 0 \quad si \quad p > n\,. \tag{6.13}$$

Preuve : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n et $P(I;\mathbb{K})$ par P. Pour $(n;p) \in \mathbb{N}^2$, soit $g_{n;p} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$g_{n;p} := \frac{n!}{(n-p)!}\cdot f_{n-p} \quad \text{si} \quad p \le n \quad \text{et} \quad g_{n;p} = 0 \quad \text{si} \quad p > n\,.$$

D'après la proposition 6.22, on sait que $f_q \in C^1$, pour tout $q \in \mathbb{N}$, et $0 \in C^1$. Donc, toujours grâce à cette proposition 6.22, on a, pour $(n;p) \in \mathbb{N}^2$,
si $p > n$, $g'_{n;p} = 0 = g_{n;p+1}$,
si $p = n$, $g'_{n;p} = (n!)((n-p)!)^{-1}(f_0)' = 0 = g_{n;p+1}$,
et si $p < n$,

$$\begin{aligned}
g'_{n;p} &= \frac{n!}{(n-p)!}\cdot\big(f_{n-p}\big)' = \frac{n!}{(n-p)!}\cdot(n-p)\cdot f_{n-p-1} = \frac{n!}{(n-p-1)!}\cdot f_{n-p-1}\\
&= \frac{n!}{(n-(p+1))!}\cdot f_{n-(p+1)} = g_{n;p+1}\,.
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a, en prenant $f = f_n$ et $(g_0;\cdots;g_p) = (g_{n;0};\cdots;g_{n;p})$, la validité de la proposition $\mathcal{D}(p)$ de la proposition 6.29. Par cette proposition 6.29, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in C^p$ et, pour $j \in [\![0;p]\!]$, $f_n^{(j)} = g_{n;j}$.
Comme $f_n \in C^1$ et $C^1 \subset C^0$ (cf. (6.8)), on a aussi $f_n \in C^0$. Par la définition 6.25, $f_n \in C^\infty$. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f_n^{(j)} = g_{n;j}$, ce qui démontre (6.13).

L'espace vectoriel C^∞ contient l'ensemble $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ donc il contient le sous-espace vectoriel engendré par cet ensemble, à savoir P. □

On a vu, au paragraphe 4.2.3, la notion de prolongement par continuité. On va introduire ici une notion de prolongement à la classe C^N, pour $N \in (\mathbb{N} \cup \{+\infty\})$.

Proposition 6.34. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$. On pose $I_a^- :=]-\infty; a[\cap I$, $I_a^+ =]a; +\infty[\cap I$ et $D_N := \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction dont la restriction $f_{|I_a^-}$ à I_a^- est de classe C^N sur I_a^- et la restriction $f_{|I_a^+}$ à I_a^+ est de classe C^N sur I_a^+. On suppose, de plus, que*

$$\forall\, p \in D_N\,, \quad \exists\, \ell_p \in \mathbb{K}\,; \quad \lim_a (f_{|I_a^-})^{(p)} \;=\; \ell_p \;=\; \lim_a (f_{|I_a^+})^{(p)}\,. \tag{6.14}$$

Alors f admet un prolongement par continuité g en a, $g \in C^N(I; \mathbb{K})$ et

$$\forall\, p \in D_N\,, \quad g^{(p)}(a) \;=\; \ell_p\,. \tag{6.15}$$

Dans le cadre de cette proposition 6.34, on dit que le prolongement par continuité g de f en a prolonge f à la classe C^N.

Preuve de la proposition 6.34 : Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Par l'hypothèse (6.14) avec $p = 0$, on sait que les limites à gauche et à droite de f en a existent dans $\mathbb{K}$ et coïncident. Par la proposition 4.21, f admet ℓ_0 pour limite en a. On peut donc définir le prolongement g par continuité de f (cf. définition 4.25) et $g(a) = \ell_0$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : pour toute fonction $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$, dont la restriction à I_a^- est de classe C^n sur I_a^- et dont la restriction à I_a^+ est de classe C^n sur I_a^+, telle que (6.14) avec N remplacé par n soit vraie, son prolongement g par continuité en a est de classe C^n sur I et vérifie (6.15) avec N remplacé par n.
$\mathcal{P}(0)$ est vraie par la proposition 4.21 et la définition 4.25.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{K}$ dont la restriction à I_a^- est de classe C^{n+1} sur I_a^- et dont la restriction à I_a^+ est de classe C^{n+1} sur I_a^+, telle que (6.14) avec N remplacé par $n+1$ soit vraie. On sait que f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et que la restriction de f' à I_a^- (resp. I_a^+) est $(f_{|I_a^-})'$ (resp. $(f_{|I_a^+})'$). Par (6.7), $f_{|I_a^-}$ (resp. $f_{|I_a^+}$) est de classe C^n sur I_a^- (resp. I_a^+). Pour $p \in D_n$, on a, d'après la proposition 6.31,

$$\big(f_{|I_a^+}\big)^{(p+1)} \;=\; \Big(\big(f_{|I_a^+}\big)'\Big)^{(p)} \;=\; \big((f')_{|I_a^+}\big)^{(p)} \;=\; \Big(\big(f'\big)^{(p)}\Big)_{|I_a^+}\,,$$

puisque f et $f_{|I_a^+}$ coïncident sur I_a^+ et puisque f' et $(f')_{|I_a^+}$ coïncident sur I_a^+. De même, on a

$$\big(f_{|I_a^-}\big)^{(p+1)} \;=\; \Big(\big(f_{|I_a^-}\big)'\Big)^{(p)} \;=\; \big((f')_{|I_a^-}\big)^{(p)} \;=\; \Big(\big(f'\big)^{(p)}\Big)_{|I_a^-}\,.$$

Par (6.14) avec N remplacé par $n+1$,

$$\forall\, p \in D_n\,, \quad \lim_a (f_{|I_a^-})^{(p+1)} \;=\; \ell_{p+1} \;=\; \lim_a (f_{|I_a^+})^{(p+1)}$$

donc

$$\forall\, p \in D_n\,, \quad \lim_a ((f')_{|I_a^-})^{(p)} \;=\; \ell_{p+1} \;=\; \lim_a ((f')_{|I_a^+})^{(p)}\,.$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à f'. Elle admet donc un prolongement g_1 par continuité en a, g_1 est C^n sur I et on a

$$\forall\, q \in D_n\,, \quad g_1^{(q)}(a) \;=\; \ell_{q+1}\,. \tag{6.16}$$

Pour montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, il suffit de montrer que le prolongement g par continuité de f en a est dérivable sur I et que $g' = g_1$. En effet, dans ce cas, g sera C^{n+1} sur I car g_1 y est C^n (cf. (6.7)) et

(6.16) donnera (6.15) avec N remplacé par $n+1$.
Sur I_a^- (resp. I_a^+), $g = f$ et f est de classe C^{n+1}, donc dérivable. De plus, sur I_a^- (resp. I_a^+), $f' = g_1$, donc $g' = g_1$ sur cet intervalle. Il reste à montrer que g est dérivable en a et que $g'(a) = g_1(a)$.
Comme g est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$, on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x;a]$ ou $[a;x]$, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$. Soit $x \in I \setminus \{a\}$, il existe donc un $c_x \in I$ strictement compris entre x et a tel que $g(x) - g(a) = g'(c_x)(x-a)$. De plus, comme g_1 est continue en a, on a, par la proposition 4.21,

$$\lim_{\neq a} g' \;=\; \lim_{\neq a} g_1 \;=\; g_1(a) \;=\; \ell_1 \,.$$

Soit $\epsilon > 0$. D'après l'existence de la limite précédente, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $y \in]a-\delta; a+\delta[\cap (I \setminus \{a\})$, $|g'(y) - \ell_1| < \epsilon$. Pour $x \in I \setminus \{a\}$ avec $x \in]a-\delta; a+\delta[$, on a donc

$$\left| \frac{g(x) \,-\, g(a)}{x-a} \;-\; \ell_1 \right| \;=\; \big| g'(c_x) \,-\, \ell_1 \big| \;<\; \epsilon$$

car $c_x \in]a-\delta; a+\delta[\cap (I \setminus \{a\})$. On a montré que g est dérivable en a de nombre dérivé $\ell_1 = g_1(a)$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Pour $N \in \mathbb{N}$, les résultats de la proposition 6.34 sont valables d'après $\mathcal{P}(N)$. Comme ces résultats sont valables pour tout $N \in \mathbb{N}$, ils le sont pour $N = \infty$. □

7 Fonctions réciproques.

Dans cette partie, on donne quelques propriétés basiques sur les bijections. Ensuite, on conjugue la stricte monotonie et la continuité d'une fonction réelle pour établir la bijectivité d'une telle fonction et la continuité de sa bijection réciproque. Enfin, lorsque la fonction en question est plus régulière, on montre qu'il en est de même pour la bijection réciproque.

7.1 Bijections.

On rappelle brièvement ici les notions d'injection, de surjection et de bijection (cf. paragraphe 1.1). On renvoie au paragraphe 9.1.1 pour plus d'informations à ce sujet.

Définition 7.1. *Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.*
On dit que f est injective si

$$\forall\, (x;x') \in E^2 \,, \quad \big((f(x) \,=\, f(x')) \implies (x \,=\, x') \big) \,. \tag{7.1}$$

On dit que f est est surjective si

$$\forall\, y \in F \,, \quad \exists\, x \in E \,; \quad y \,=\, f(x) \,. \tag{7.2}$$

On dit que f est bijective si f est injective et f est surjective.
Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est bijective, l'application $h : F \longrightarrow E$, qui vérifie $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, est appelée bijection réciproque de f et est notée par $f^{\langle -1 \rangle} := h$.
Lorsque $f : E \longrightarrow F$ est injective, on dira que f est bijective de E sur $f(E)$. Cela se réfère au fait que l'application $\tilde{f}$ dans la proposition 9.2 est bijective. De manière abusive, on dira que la bijection réciproque $(\tilde{f})^{\langle -1 \rangle}$ de $\tilde{f}$ est la bijection réciproque de f et on la notera $f^{\langle -1 \rangle}$.

7.2 Fonctions continues strictement monotones.

Dans ce paragraphe, on revient sur les fonctions réelles monotones. On travaille donc avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour une fonction monotone sur un intervalle, on dispose d'une condition suffisante étonnante pour avoir la continuité de la fonction.

Proposition 7.2. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction monotone. Si l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$ alors f est continue sur I.*

Preuve : Si l'intervalle $f(I)$ est un singleton $\{c\}$, avec $c \in \mathbb{R}$, alors f est constante égale à c donc continue sur I. On suppose désormais que $f(I)$ est un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. On montre que f est continue en a en utilisant (4.11). On rappelle que $\sup f := \sup f(I)$ et $\inf f := \inf f(I)$. Comme $f(I)$ est un intervalle, on remarque que $]\inf f; \sup f[\subset f(I)$.

1. Cas où f est croissante. On distingue les trois cas suivants : $f(a) = \inf f$, $\inf f < f(a) < \sup f$ et $f(a) = \sup f$.
   a). On suppose $f(a) = \inf f$. Dans ce cas, $f(a) = \min f(I)$ et il existe $m \in (]f(a); +\infty[\cup \{+\infty\})$ tel que $f(I) = [f(a); m[$ ou $f(I) = [f(a); m]$.
   Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a); f(a) + \epsilon[$. Comme f est croissante, on a forcément $b > a$. Soit $\delta = b - a > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $f(a) = \inf f$, $f(a) \leq f(x) \leq f(a + \delta) = f(b) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
   b). On suppose que $f(a) = \sup f$. Dans ce cas, $f(a) = \max f(I)$ et il existe $m \in (]-\infty; f(a)[\cup \{-\infty\})$ tel que $f(I) = [m; f(a)]$ ou $f(I) =]m; f(a)]$.
   Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a) - \epsilon; f(a)[$. Comme f est croissante, on a forcément $b < a$. Soit $\delta = a - b > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $f(a) = \sup f$, $f(a) \geq f(x) \geq f(a - \delta) = f(b) > f(a) - \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
   c). On suppose $\inf f < f(a) < \sup f$. Il existe donc $(m_-; m_+) \in (f(I))^2$ tel que $m_- < f(a) < m_+$. En particulier, $[m_-; m_+] \subset f(I)$.
   Soit $\epsilon > 0$. Les ensembles $[m_-; m_+] \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ et $[m_-; m_+] \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ sont non vides. Donc il existe $(c_-; c_+) \in I^2$ tel que $f(a) - \epsilon < f(c_-) < f(a) < f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Comme f est croissante, on a forcément $c_- < a < c_+$. Soit $\delta = \min(a - c_-; c_+ - a) > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est croissante et $c_- \leq a - \delta < x < a + \delta \leq c_+$, $f(a) - \epsilon < f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
2. Cas où f est décroissante. On distingue aussi les trois cas suivants : $f(a) = \inf f$, $\inf f < f(a) < \sup f$ et $f(a) = \sup f$.
   a). On suppose $f(a) = \inf f$. Dans ce cas, $f(a) = \min f(I)$ et il existe $m \in (]f(a); +\infty[\cup \{+\infty\})$ tel que $f(I) = [f(a); m[$ ou $f(I) = [f(a); m]$.
   Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a); f(a) + \epsilon[$. Comme f est décroissante, on a forcément $b < a$. Soit $\delta = a - b > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $f(a) = \inf f$, $f(a) \leq f(x) \leq f(a - \delta) = f(b) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
   b). On suppose que $f(a) = \sup f$. Dans ce cas, $f(a) = \max f(I)$ et il existe $m \in (]-\infty; f(a)[\cup \{-\infty\})$ tel que $f(I) = [m; f(a)]$ ou $f(I) =]m; f(a)]$.
   Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $f(I) \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ est non vide donc il existe $b \in I$ tel que $f(b) \in]f(a) - \epsilon; f(a)[$. Comme f est décroissante, on a forcément $b > a$. Soit $\delta = b - a > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $f(a) = \sup f$, $f(a) \geq f(x) \geq f(a + \delta) = f(b) > f(a) - \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a.
   c). On suppose $\inf f < f(a) < \sup f$. Il existe donc $(m_-; m_+) \in (f(I))^2$ tel que $m_- < f(a) < m_+$. En particulier, $[m_-; m_+] \subset f(I)$.
   Soit $\epsilon > 0$. Les ensembles $[m_-; m_+] \cap]f(a) - \epsilon; f(a)[$ et $[m_-; m_+] \cap]f(a); f(a) + \epsilon[$ sont non

vides. Donc il existe $(c_-; c_+) \in I^2$ tel que $f(a) - \epsilon < f(c_-) < f(a) < f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Comme f est décroissante, on a forcément $c_- > a > c_+$. Soit $\delta = \min(a - c_+; c_- - a) > 0$. Pour $x \in I$ avec $|x - a| < \delta$, on a, comme f est décroissante et $c_+ \leq a - \delta < x < a + \delta \leq c_-$, $f(a) - \epsilon < f(c_-) \leq f(x) \leq f(c_+) < f(a) + \epsilon$. Donc $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. On a montré que f est continue en a. □

Maintenant, voyons ce que l'on peut dire des fonctions réelles continues et strictement monotones sur un intervalle.

Proposition 7.3. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Alors $f(I)$ est un intervalle et f est bijective de I sur $f(I)$. De plus, sa bijection réciproque $f^{\langle -1 \rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f.*

Preuve : Par le corollaire 5.2, on sait que $f(I)$ est un intervalle. Vérifions que f est injective.
Soit $(x; x') \in I^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Si $x > x'$ alors, comme f est strictement monotone, on a soit $f(x) > f(x')$ soit $f(x) < f(x')$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse. Si $x < x'$ alors, comme f est strictement monotone, on a soit $f(x) > f(x')$ soit $f(x) < f(x')$, ce qui est aussi contradictoire avec l'hypothèse. Donc $x = x'$. On a montré que f est injective.
D'après la définition 7.1, f est bijective de I sur $f(I)$. Vérifions que sa bijection réciproque $f^{\langle -1 \rangle}$: $f(I) \longrightarrow I$ est strictement monotone de même sens de variation que f.

a). Cas où f est strictement croissante. Soit $(y; y') \in (f(I))^2$ avec $y < y'$. Soit $x = f^{\langle -1 \rangle}(y) \in I$ et $x' = f^{\langle -1 \rangle}(y') \in I$. Si $x = x'$ alors $y = f(x) = f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. Si $x > x'$ alors, comme f est strictement croissante, $y = f(x) > f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. D'où $x < x'$ soit $f^{\langle -1 \rangle}(y) < f^{\langle -1 \rangle}(y')$. On a montré que $f^{\langle -1 \rangle}$ est strictement croissante.

b). Cas où f est strictement décroissante. Soit $(y; y') \in (f(I))^2$ avec $y < y'$. Soit $x = f^{\langle -1 \rangle}(y) \in I$ et $x' = f^{\langle -1 \rangle}(y') \in I$. Si $x = x'$ alors $y = f(x) = f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. Si $x < x'$ alors, comme f est strictement décroissante, $y = f(x) > f(x') = y'$. Contradiction avec $y < y'$. D'où $x > x'$ soit $f^{\langle -1 \rangle}(y) > f^{\langle -1 \rangle}(y')$. On a montré que $f^{\langle -1 \rangle}$ est strictement décroissante.

L'application $f^{\langle -1 \rangle}$ est définie sur un intervalle, à savoir $f(I)$, son image est un intervalle, à savoir I. De plus, elle est strictement monotone donc monotone. Par la proposition 7.2, elle est continue sur $f(I)$. □

Dans le cadre de la proposition 7.3, on peut se demander si l'on a des informations sur l'image $f(I)$ de I par f. Lorsque I est un segment (c'est-à-dire un intervalle fermé et borné), on a déjà une réponse donnée par le théorème de Heine (cf. théorème 5.3).
Prenons $I = [a; b]$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante et continue. Alors, par ce théorème, $f(I)$ s'écrit $[m; M]$ où $m = \inf f$ et $M = \sup f$. Comme f est croissante, on a bien sûr $m = f(a)$ et $M = f(b)$. Donc $f(I) = [f(a); f(b)]$.
Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement décroissante et continue, on voit de même que $f(I) = [f(b); f(a)]$.
Qu'en est-il si I n'est pas un segment ?

Proposition 7.4. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue. Soit $a = \inf I \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ et $b = \sup I \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On rappelle que les limites $\lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b f$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ (cf. propositions 4.38 et 4.39). Alors,*

1. *si f est strictement croissante,*

$$f\big(]a; b[\big) \;=\; \big]\lim_a f\,;\,\lim_b f\big[\,,$$

2. *si f est strictement décroissante,*

$$f\big(]a; b[\big) \;=\; \big]\lim_b f\,;\,\lim_a f\big[\,.$$

Dans le cadre de la proposition 7.3, cette proposition 7.4 s'applique, puisque qu'une fonction strictement monotone est aussi monotone. De plus, pour déterminer complètement $f(I)$, il suffit de calculer $f(a)$ si

$a \in I$ et $f(b)$ si $b \in I$. En effet,
si $a \notin I$ et $b \notin I$, alors $I =]a;b[$ et $f(I) = f(]a;b[)$,
si $a \in I$ et $b \notin I$, alors $I = [a;b[= \{a\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(a)\} \cup f(]a;b[)$,
si $a \notin I$ et $b \in I$, alors $I =]a;b] = \{b\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(b)\} \cup f(]a;b[)$,
si $a \in I$ et $b \in I$, alors $I = [a;b] = \{a;b\} \cup]a;b[$ et $f(I) = \{f(a);f(b)\} \cup f(]a;b[)$.

Preuve de la proposition 7.4 : Soit g la restriction de f à $]a;b[$. On a $f(]a;b[) = g(]a;b[)$. Comme f est continue, g est continue, d'après la proposition 4.21. Comme f est strictement monotone, g est strictement monotone de même sens de variation que f. Comme f et g sont monotones, on sait, par les propositions 4.38 et 4.39, que $\lim\limits_a f$, $\lim\limits_a g$, $\lim\limits_b f$ et $\lim\limits_b g$ existent dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$. Par la proposition 4.21, $\lim\limits_a g = \lim\limits_a f$ et $\lim\limits_b g = \lim\limits_b f$.

1. Cas où f est strictement croissante. Par les propositions 4.38 et 4.39 appliquées à g, on sait que $\lim\limits_a g = \inf g(]a;b[)$ et $\lim\limits_b g = \sup g(]a;b[)$.
   Soit $x_0 \in]a;b[$. Il existe $(x_-;x_+) \in]a;b[^2$ tel que $x_- < x_0 < x_+$ (cf. remarque 1.8). Comme g est strictement croissante, on a $g(x_-) < g(x_0) < g(x_+)$. Pour $x \leq x_-$, on a $g(x) \leq g(x_-)$ donc, par passage à la limite $x \to a$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), $\lim\limits_a g \leq g(x_-) < g(x_0)$.
   Pour $x \geq x_+$, on a $g(x) \geq g(x_+)$ donc, par passage à la limite $x \to b$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), $\lim\limits_b g \geq g(x_+) > g(x_0)$. Donc $g(x_0) \in]\lim\limits_a g;\lim\limits_b g[$. On a montré que $g(]a;b[) \subset]\lim\limits_a g;\lim\limits_b g[$.
   Soit $y \in]\lim\limits_a g;\lim\limits_b g[$. On a donc $y \in]\inf g(]a;b[);\sup g(]a;b[)[$. Comme y ne majore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_+ \in]a;b[$ tel que $y < g(x_+)$. Comme y ne minore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_- \in]a;b[$ tel que $y > g(x_-)$. On a donc $g(x_-) < y < g(x_+)$ et, comme g est croissante, $x_- < x_+$. Comme g est continue, on a, par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) appliqué à g sur $[x_-;x_+]$, $y \in g([x_-;x_+]) \subset g(]a;b[)$. On a montré que $]\lim\limits_a g;\lim\limits_b g[\subset g(]a;b[)$.
   Conclusion : $g(]a;b[) =]\lim\limits_a g;\lim\limits_b g[$. Donc $f(]a;b[) = g(]a;b[) =]\lim\limits_a g;\lim\limits_b g[=]\lim\limits_a f;\lim\limits_b f[$.
2. Cas où f est strictement décroissante. Par les propositions 4.38 et 4.39 appliquées à g, on sait que $\lim\limits_a g = \sup g(]a;b[)$ et $\lim\limits_b g = \inf g(]a;b[)$.
   Soit $x_0 \in]a;b[$. Il existe $(x_-;x_+) \in]a;b[^2$ tel que $x_- < x_0 < x_+$ (cf. remarque 1.8). Comme g est strictement décroissante, on a $g(x_-) > g(x_0) > g(x_+)$. Pour $x \leq x_-$, on a $g(x) \geq g(x_-)$ donc, par passage à la limite $x \to a$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), $\lim\limits_a g \geq g(x_-) > g(x_0)$.
   Pour $x \geq x_+$, on a $g(x) \leq g(x_+)$ donc, par passage à la limite $x \to b$ dans ces inégalités (cf. proposition 4.36), $\lim\limits_b g \leq g(x_+) < g(x_0)$. Donc $g(x_0) \in]\lim\limits_b g;\lim\limits_a g[$. On a montré que $g(]a;b[) \subset]\lim\limits_b g;\lim\limits_a g[$.
   Soit $y \in]\lim\limits_b g;\lim\limits_a g[$. On a $y \in]\inf g(]a;b[);\sup g(]a;b[)[$. Comme y ne majore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_+ \in]a;b[$ tel que $y < g(x_+)$. Comme y ne minore pas $g(]a;b[)$, il existe $x_- \in]a;b[$ tel que $y > g(x_-)$. On a donc $g(x_-) < y < g(x_+)$ et, comme g est décroissante, $x_- > x_+$. Comme g est continue, on a, par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1) appliqué à g sur $[x_+;x_-]$, $y \in g([x_+;x_-]) \subset g(]a;b[)$. On a montré que $]\lim\limits_b g;\lim\limits_a g[\subset g(]a;b[)$.
   Conclusion : $g(]a;b[) =]\lim\limits_b g;\lim\limits_a g[$. Donc $f(]a;b[) = g(]a;b[) =]\lim\limits_b g;\lim\limits_a g[=]\lim\limits_b f;\lim\limits_a f[$. □

7.3 Fonctions dérivables strictement monotones.

Dans ce paragraphe, on continue l'étude des fonctions réelles monotones en considérant l'influence de la dérivabilité.

Proposition 7.5. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et dérivable. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque*

$f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f. De plus, pour tout point $y_0 \in f(I)$ tel que $f'(f^{\langle -1\rangle}(y_0)) \neq 0$, $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 de nombre dérivé

$$\big(f^{\langle -1\rangle}\big)'(y_0) \;=\; \frac{1}{f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)}\,.$$

Preuve : Comme f est dérivable sur I, elle y est continue, d'après la proposition 6.6. On peut donc appliquer la proposition 7.3. Ceci prouve que $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue et strictement monotone de même sens de variation que f.
Soit $y_0 \in f(I)$ tel que $f'(f^{\langle -1\rangle}(y_0)) \neq 0$. On montre que $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 en utilisant la proposition 6.1.
Pour $y \in f(I) \setminus \{y_0\}$, on a, par l'injectivité de $f^{\langle -1\rangle}$, $f^{\langle -1\rangle}(y) \neq f^{\langle -1\rangle}(y_0)$ donc

$$\frac{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}{y - y_0} \;=\; \left(\frac{y - y_0}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}\right)^{-1} \;=\; \left(\frac{f\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \,-\, f\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)}\right)^{-1}\,. \tag{7.3}$$

Comme $f^{\langle -1\rangle}$ est continue en y_0, on a $\lim\limits_{y_0} f^{\langle -1\rangle} = f^{\langle -1\rangle}(y_0)$ et, d'après la proposition 4.21, $\lim\limits_{\neq y_0} f^{\langle -1\rangle} = f^{\langle -1\rangle}(y_0)$. Comme f est dérivable en $f^{\langle -1\rangle}(y_0)$, on a

$$\lim_{x \to f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \frac{f(x) \,-\, f\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)}{x \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \;=\; f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)\,.$$

Par composition de limites (cf. proposition 4.28), on a

$$\lim_{\substack{y \to y_0 \\ \neq}} \frac{f\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \,-\, f\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)}{f^{\langle -1\rangle}(y) \,-\, f^{\langle -1\rangle}(y_0)} \;=\; f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big) \;\neq\; 0\,,$$

par hypothèse. Par inversion de limite (cf. proposition 4.28) et (7.3), on en déduit que $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable en y_0 de nombre dérivé

$$\Big(f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y_0)\big)\Big)^{-1}\,. \qquad \square$$

Corollaire 7.6. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et de classe C^1 sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I, de classe C^1 sur tout sous-intervalle, non réduit à un point, J de $f(I)$ vérifiant*

$$J \;\subset\; \big\{y \in f(I)\,;\quad f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \;\neq\; 0\big\} \;=:\; \mathcal{P}(f)\,.$$

Preuve : On note $\mathcal{P}(f)$ par F. La dérivée f' de f ne s'annule donc pas sur $f^{\langle -1\rangle}(F)$.
Par la proposition 7.5, on sait que $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur $f(I)$ et sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I. De plus, $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable sur F et sa dérivée est $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$.
Soit J un intervalle, non réduit à un point, inclu dans F. Comme $f^{\langle -1\rangle}$ est continue sur J et f' est continue sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$, $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ est continue sur J, par composition (cf. proposition 6.18). Comme $f^{\langle -1\rangle}(J) \subset f^{\langle -1\rangle}(F)$, f' ne s'annule pas sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$ donc, par inversion (cf. proposition 6.18), $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$ est aussi continue sur J. Par la définition 6.19, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^1 sur J. $\square$

Lorsque la fonction f est plus régulière, il en est de même de sa bijection réciproque.

Corollaire 7.7. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $N \in (\mathbb{N}^* \cup \{\infty\})$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et de classe C^N sur I. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est bijective de I sur*

$f(I)$, sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I, de classe C^N sur tout sous-intervalle, non réduit à un point, J de $f(I)$ vérifiant

$$J \ \subset \ \big\{ y \in f(I) ; \quad f'\big(f^{\langle -1\rangle}(y)\big) \ \neq \ 0 \big\} \ =: \ \mathcal{P}(f) \, .$$

Preuve : On note $\mathcal{P}(f)$ par F. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et dérivable sur I. On sait, par la proposition 7.5, qu'elle est bijective de I sur $f(I)$ et que sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle} : f(I) \longrightarrow I$ est continue sur I et dérivable sur tout intervalle non réduit à un point $J \subset F$.
Soit J un intervalle, non réduit à un point, inclu dans F. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ l'implication

$$\big(f \text{ est } C^n \text{ sur } I \big) \Longrightarrow \big(f^{\langle -1\rangle} \text{ est } C^n \text{ sur } J \big) \, .$$

Par le corollaire 7.6, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Pour montrer $\mathcal{P}(n+1)$, on suppose que f est C^{n+1} sur I. Par la définition 6.25, f' est C^n sur I et donc aussi sur $f^{\langle -1\rangle}(J)$. Par la proposition 6.24, on sait que f est C^n sur I et donc, par l'hypothèse de récurrence, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^n sur J. Par la proposition 7.5, on sait que $(f^{\langle -1\rangle})'$ est donnée par $(f' \circ f^{\langle -1\rangle})^{-1}$. Par composition (cf. proposition 6.32), $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ est C^n sur J et, comme $f' \circ f^{\langle -1\rangle}$ ne s'annule pas sur J, puisque $J \subset F$, on en déduit que, par inversion (cf. proposition 6.32), $(f^{\langle -1\rangle})'$ est C^n sur J. D'après la définition 6.25, $f^{\langle -1\rangle}$ est C^{n+1} sur J. On a montré donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(N)$ prouve que $f^{\langle -1\rangle}$ est C^N sur J. Ceci étant vrai pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a le résultat aussi pour $N = \infty$. □

8 Fonctions usuelles et fonctions plates.

Dans cette partie, on procède à la construction de plusieurs fonctions usuelles. On en donne des propriétés. On classe ces fonctions en quatre familles : fonction exponentielle et logarithmes, fonctions puissance, fonctions circulaires, fonctions hyperboliques. On termine par la construction de fonctions régulières "plates".

8.1 Fonction exponentielle complexe.

Dans ce paragraphe, on donne la définition de la fonction exponentielle complexe ainsi que certaines propriétés de cette fonction. La justification complète de la construction et des propriétés est renvoyée au paragraphe 9.7.

Définition 8.1. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on* **admet** *que la suite complexe*

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

converge dans $\mathbb{C}$. On note par $\exp(z)$ sa limite, i.e.

$$\exp(z) \ := \ \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \, .$$

L'application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}$, associe $\exp(z)$ est appelée fonction exponentielle complexe. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $e^z := \exp(z)$.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on a défini la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence (cf. définition 3.13). Si $z \neq 0$, cette suite ne s'annule pas, d'après la proposition 3.14. Pour $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $z^{-n} = 1/z^n$.
La fonction exponentielle complexe possède les propriétés remarquables suivantes.

Proposition 8.2. *Soit $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. On a les propriétés suivantes :*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \overline{\exp(z)} \;=\; \exp\big(\overline{z}\big)\,, \tag{8.1}$$

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad \exp(z_1 + z_2) \;=\; \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)\,, \tag{8.2}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) \;\neq\; 0 \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\exp(z)} \;=\; \exp(-z)\,, \tag{8.3}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \exp(p\cdot z) \;=\; \big(\exp(z)\big)^p\,, \tag{8.4}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(x) \;\in \mathbb{R}^{+*}\,, \tag{8.5}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(ix) \;\in \mathcal{U}\,. \tag{8.6}$$

Preuve : Voir la proposition 9.61 au paragraphe 9.7. □

On a aussi le résultat de régularité suivant.

Proposition 8.3. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(\alpha t)$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \alpha\exp(\alpha t)$.*

Preuve : Voir la proposition 9.62 au paragraphe 9.7. □

On donne la proposition suivante qui permettra d'étudier les fonctions sinus et cosinus au paragraphe 8.4.

Proposition 8.4. *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$, donnée par $\varphi(t) = \exp(it)$, est surjective.*
L'image réciproque $\varphi^{-1}(\{1\})$ du singleton $\{1\}$ par φ est donnée par $\varphi^{-1}(\{1\}) = 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi\cdot k;\, k \in \mathbb{Z}\}$.
En particulier, on a

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \big(\varphi(x_1) \;=\; \varphi(x_2)\big) \iff \big(x_1 - x_2 \in 2\pi\mathbb{Z}\big)\,. \tag{8.7}$$

L'application φ est 2π-périodique i.e.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \varphi(x \,+\, 2\pi) \;=\; \varphi(x)\,.$$

Enfin, on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\pi/2) = i$, $\varphi(\pi) = -1$ et $\varphi(3\pi/2) = -i$.

Preuve : Voir les propositions 9.63 et 9.66 au paragraphe 9.7. □

Corollaire 8.5. *Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble $\mathcal{A}_z := \{t \in \mathbb{R};\; z = |z|\exp(it)\}$ est infini et s'écrit $\mathcal{A}_z = \{\theta + 2\pi k;\, k \in \mathbb{Z}\}$, pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. De plus, l'ensemble $\mathcal{A}_z \cap]-\pi;\pi]$ a exactement un élément.*

Preuve : Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a $|z| \neq 0$ et $z/|z| \in \mathcal{U}$. Par la proposition 8.4, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(\theta) = z/|z|$ donc $z = |z|\exp(i\theta)$ et $\theta \in \mathcal{A}_z$.
Soit $\theta' \in \mathcal{A}_z$. On a $\varphi(\theta) = z/|z| = \varphi(\theta')$ et, d'après (8.7), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta' = \theta + 2\pi k$. Donc $\mathcal{A}_z \subset \{\theta + 2\pi k;\, k \in \mathbb{Z}\}$.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi(\theta + 2\pi k) = \varphi(2\pi k)\varphi(\theta)$, d'après (8.2). Comme $2\pi\mathbb{Z} = \varphi^{-1}(\{1\})$ (cf. proposition 8.4), $\varphi(2\pi k) = 1$ et $\varphi(\theta + 2\pi k) = \varphi(\theta) = z/|z|$. Donc $\{\theta + 2\pi k;\, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{A}_z$.
On a montré que $\mathcal{A}_z = \{\theta + 2\pi k;\, k \in \mathbb{Z}\}$.
On note par E la fonction partie entière définie dans la proposition 9.8.
Par la proposition 9.8, $(\theta/(2\pi)) - E(\theta/(2\pi)) \in [0;1[$.
Si $(\theta/(2\pi)) - E(\theta/(2\pi)) \in [0;1/2]$, on a, pour $k = -E(\theta/(2\pi)) \in \mathbb{Z}$, $(\theta/(2\pi)) + k \in [0;1/2]$ donc aussi $(\theta/(2\pi)) + k \in]-(1/2);1/2]$. D'où $\theta + 2\pi k \in]-\pi;\pi]$ et $\mathcal{A}_z \cap]-\pi;\pi]$ contient au moins un élément.

Si $(\theta/(2\pi)) - E(\theta/(2\pi)) \in]1/2;1[$, on a, pour $k = -1 - E(\theta/(2\pi)) \in \mathbb{Z}$, $(\theta/(2\pi)) + k \in]-(1/2);0[$ donc $(\theta/(2\pi)) + k \in]-(1/2);1/2]$. D'où $\theta + 2\pi k \in]-\pi;\pi]$ et $\mathcal{A}_z \cap]-\pi;\pi]$ contient au moins un élément.
Dans tous les cas, on a vérifié que $\mathcal{A}_z \cap]-\pi;\pi]$ contient au moins un élément.
Soit $(k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\theta + 2\pi k_1 \in]-\pi;\pi]$ et $\theta + 2\pi k_2 \in]-\pi;\pi]$. Par la remarque 1.5, on a donc $0 \leq |2\pi k_1 - 2\pi k_2| < 2\pi$ soit $0 \leq |k_1 - k_2| < 1$. Comme $(k_1;k_2) \in \mathbb{Z}^2$, on a forcément $k_1 = k_2$. Donc, il y a au plus un élément dans $\mathcal{A}_z \cap]-\pi;\pi]$.
On a montré que $\mathcal{A}_z \cap]-\pi;\pi]$ a exactement un élément. □

Définition 8.6. *Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on dit qu'un réel t vérifiant $z = |z|\exp(it)$ est un argument de z. L'ensemble $\mathcal{A}_z$, défini dans le corollaire 8.5, est donc l'ensemble infini des arguments de z. L'unique élément de $\mathcal{A}_z$ qui appartient à $]-\pi;\pi]$ est appelé argument principal de z et est noté par* $\mathrm{Arg}(z)$.

D'après la proposition 8.4, 0 est l'argument principal de 1, $\pi/2$ est l'argument principal de i, π est l'argument principal de -1, $3\pi/2$ est un argument de $-i$ mais c'est $3\pi/2 - 2\pi = -\pi/2$ qui est l'argument principal de $-i$.

Remarque 8.7. *Il se trouve que l'on peut donner une formule pour l'argument principal de z lorsque z n'appartient pas à l'ensemble $\{z \in \mathbb{C};\ \Re(z) \leq 0 \text{ et } \Im(z) = 0\}$. Cette formule fait intervenir la fonction* Arctan *définie dans la proposition 8.24. On renvoie à la proposition 8.26 à ce sujet.*
Pour terminer, on signale que l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est surjective, comme on le verra dans la proposition 8.9 du paragraphe 8.2.*

8.2 Fonction exponentielle réelle et logarithmes.

Dans ce paragraphe, on se concentre sur l'exponentielle réelle, la restriction à $\mathbb{R}$ de l'exponentielle complexe du paragraphe 8.1.

Tout d'abord, on remarque que, pour $x \in \mathbb{R}^+$, la suite

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

est en fait réelle positive croissante et de premier terme 1. Donc, par la proposition 3.51, sa limite $\exp(x)$ est réelle et vérifie

$$\exp(x) \;=\; \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \;=\; \sup\left\{\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}\ ;\ N \in \mathbb{N}\right\} \;\geq\; 1\,. \tag{8.8}$$

De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)$ est non nul et $\exp(-x) = 1/\exp(x)$, cf. (8.3) et (8.5).

Proposition 8.8. *La fonction exponentielle réelle est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, i.e. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même, i.e. $\exp' = \exp$. Elle est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa bijection réciproque $\exp^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1, strictement croissante et on a, pour $x > 0$,*

$$\left(\exp^{\langle -1\rangle}\right)'(x) \;=\; \frac{1}{x}\,. \tag{8.9}$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} x^m \cdot \exp(x) \;=\; 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{-m} \cdot \exp(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.10}$$

Preuve : Le fait que $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ vient de (8.5). Le fait que l'exponentielle réelle soit C^1 sur $\mathbb{R}$ de dérivée elle-même découle de la proposition 8.3 pour $\alpha = 1$. En particulier, l'exponentielle réelle est continue sur

$\mathbb{R}$ (cf. proposition 6.20).
Comme la dérivée de l'exponentielle réelle est une fonction strictement positive (à savoir l'exponentielle réelle), l'exponentielle réelle est strictement croissante, d'après le corollaire 6.15. D'après la proposition 7.3, exp est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\exp(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque $\exp^{\langle -1\rangle} : \exp(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante. Comme la dérivée de l'exponentielle réelle ne s'annule jamais, on sait, par le corollaire 7.6, que $\exp^{\langle -1\rangle}$ est de classe C^1 sur $\exp(\mathbb{R})$ et on a, pour $x \in \exp(\mathbb{R})$,

$$\big(\exp^{\langle -1\rangle}\big)'(x) \;=\; \frac{1}{\big((\exp') \circ \exp^{\langle -1\rangle}\big)(x)} \;=\; \frac{1}{\big(\exp \circ \exp^{\langle -1\rangle}\big)(x)} \;=\; \frac{1}{x}\,,$$

ce qui donne (8.9) sur $\exp(\mathbb{R})$.
Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour $x > 0$ et $N \geq m+1$, on a, par la proposition 3.9,

$$\frac{1}{x^m} \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \;=\; \frac{1}{x^m} \cdot \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{m+1}}{x^m \cdot \big((m+1)!\big)} + \frac{1}{x^m} \cdot \sum_{n=m+2}^{N} \frac{x^n}{n!} \;\geq\; \frac{x}{(m+1)!}$$

donc, par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.48), on obtient

$$\frac{1}{x^m} \cdot \exp(x) \;\geq\; \frac{x}{(m+1)!}\,.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, on a, d'après les propositions 4.37 et 4.36,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-m} \cdot \exp(x) \;=\; +\infty\,.$$

Par inversion (cf. proposition 4.37) et produit (cf. proposition 4.32),

$$\lim_{x\to+\infty} (-1)^m x^m \cdot \frac{1}{\exp(x)} \;=\; 0\,.$$

Comme $\lim\limits_{t\to-\infty} (-t) = +\infty$, on a, par composition (cf. proposition 4.28),

$$\lim_{t\to-\infty} t^m \cdot \frac{1}{\exp(-t)} \;=\; 0\,.$$

Comme $\exp(-t) = 1/\exp(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que

$$\lim_{x\to-\infty} x^m \cdot \exp(x) \;=\; 0\,.$$

On a montré (8.10).
Il reste à vérifier que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$.
D'après (8.10) avec $m = 0$, on sait que

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) \;=\; +\infty\,.$$

Par la proposition 7.4, on en déduit que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$. □

Grâce à cette proposition 8.8, on peut montrer la surjectivité de l'exponentielle complexe, étudiée dans le paragraphe 8.1.

Proposition 8.9. *L'exponentielle complexe* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *est surjective i.e. tout complexe* $z \in \mathbb{C}^*$ *s'écrit* $\exp(c)$ *pour un* $c \in \mathbb{C}$.

Preuve : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a donc $|z| \neq 0$ et $z/|z| \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$ étant défini dans la proposition 8.2). Par la proposition 8.4, il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $z/|z| = \varphi(\beta) = \exp(i\beta)$. Comme $|z| > 0$, il existe, par la proposition 8.8, un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\exp(\alpha) = |z|$. D'où

$$z \;=\; |z| \cdot \frac{z}{|z|} \;=\; \exp(\alpha) \cdot \exp(i\beta) \;=\; \exp(\alpha + i\beta)\,,$$

d'après (8.2). □

On introduit maintenant les logarithmes.

Définition 8.10. *La bijection réciproque* $\exp^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de l'exponentielle réelle est appelée logarithme népérien et est noté* ln. *Pour* $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, $\ln(a) \neq 0$ *car* $\exp(0) = 1$ *et le logarithme de base* a *est la fonction* $\mathrm{Log}_a : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x > 0$, $\mathrm{Log}_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$.

Proposition 8.11. *La fonction logarithme népérien* $\ln :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est de classe* C^1*, strictement croissante, bijective. Sa dérivée* $\ln' :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est donnée par, pour* $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$. *On a*

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) \;=\; -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.11}$$

On a

$$\lim_{x\to 0} x\ln(x) \;=\; 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \;=\; 0\,. \tag{8.12}$$

Pour $(x_1;x_2) \in]0;+\infty[^2$*, on a* $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

Preuve : Par la proposition 8.8, on sait que $\ln = \exp^{\langle -1\rangle}$ est C^1, strictement croissante et bijective $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. De plus, (8.9) donne une expression de sa dérivée.
Comme $\ln(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$ et comme ln est strictement croissante, on a, par les propositions 4.38 et 4.39,

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) \;=\; \inf\mathbb{R} \;=\; -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) \;=\; \sup\mathbb{R} \;=\; +\infty\,,$$

ce qui donne (8.11).
Pour $x > 0$, on a $x\ln(x) = \exp(\ln(x)) \cdot \ln(x)$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to-\infty} t \cdot \exp(t) = 0$, d'après (8.10) avec $m = 1$, on a, par composition (cf. proposition 4.28), $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$. De plus, pour $x > 0$, on a $(\ln(x))/x = (\ln(x))/\exp(\ln(x))$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t/\exp(t) = 0$, d'après (8.10) avec $m = 1$ et par inversion (cf. proposition 4.37), on a, par composition (cf. proposition 4.28), $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x))/x = 0$.
On a montré (8.12).
Pour $(x_1;x_2) \in]0;+\infty[^2$, soit $z_1 = \ln(x_1)$ et $z_2 = \ln(x_2)$. Par (8.2), $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$ et, en appliquant la fonction ln, on obtient $z_1 + z_2 = \ln(\exp(z_1+z_2)) = \ln(\exp(z_1)\cdot\exp(z_2)) = \ln(x_1 \cdot x_2)$ soit $\ln(x_1 \cdot x_2) = z_1 + z_2 = \ln(x_1) + \ln(x_2)$. □

On termine ce paragraphe en déterminant la régularité maximale de l'exponentielle réelle et des logarithmes.

Proposition 8.12. *La fonction exponentielle réelle est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$. *La fonction logarithme népérien est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$. *Pour* $a \in \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\}$, *le logarithme de base* a *est de classe* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$.

Preuve : On rappelle que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction exponentielle réelle, qui est de classe C^0 sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 8.8), et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ la suite constante égale à f. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(p)$ de la proposition 6.29 est vraie, d'après la proposition 8.8. Par la proposition 6.29, f est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$, d'après la définition 6.25. Comme $\exp' = \exp$ ne s'annule pas, on déduit du corollaire 7.7, que $\ln = \exp^{\langle -1\rangle}$ est de classe C^∞ sur $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$. Comme $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*};\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (cf. proposition 6.26), le logarithme de base a est aussi de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$. □

8.3 Fonctions puissances.

Dans ce paragraphe, on construit plusieurs fonctions puissances. On dispose déjà des fonctions $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$, qui engendre l'espace vectoriel des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ (cf. définition 6.21).

On va compléter cette collection en construisant notamment des fonctions $I \ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et I un intervalle approprié.

Considérons la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$. Elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Elle n'est pas injective car -1 et 1 ont la même image. Cependant, sa restriction à $\mathbb{R}^+$ est strictement croissante continue donc bijective de $\mathbb{R}^+$ sur l'image de $\mathbb{R}^+$. La bijection réciproque est en fait définie sur $\mathbb{R}^+$ et est la fonction racine carrée et constitue un nouvel exemple de fonction puissance comme on le verra plus loin.
Notons que la restriction à $\mathbb{R}^-$ de la fonction précédente est strictement décroissante et continue donc bijective de $\mathbb{R}^-$ sur son image. On aurait pu prendre cette fonction pour définir la racine carrée mais on a historiquement fait l'autre choix.
Si l'on considère la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$, on voit qu'elle est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur son image. La bijection réciproque nous donne la fonction racine cubique qui sera en fait définie sur $\mathbb{R}$.
La différence entre les deux cas précédents est liée à la parité de n dans $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$. On va procéder à une étude similaire mais dans le cas général $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}$ si n est impair et $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}^+$ si n est pair.

Proposition 8.13. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $f_n : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathcal{D}_n$, $f_n(x) = x^n$. La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathcal{D}_n$, continue sur $\mathcal{D}_n$ et bijective de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathcal{D}_n$. Sa bijection réciproque $f_n^{\langle -1\rangle} : \mathcal{D}_n \longrightarrow \mathcal{D}_n$ est continue et strictement croissante. Elle est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f_n^{\langle -1\rangle}(0) = 0$. De plus, lorsque n est impair, $f_n^{\langle -1\rangle}$ est une fonction impaire (cf. définition 4.5).*
Cette bijection réciproque $f_n^{\langle -1\rangle}$ est appelée fonction racine n-ième et est notée par $\sqrt[n]{\cdot}$.

Pour n pair et non nul, $\sqrt[n]{\cdot}$ est donc une fonction de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour n impair, $\sqrt[n]{\cdot}$ est donc une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Pour $n = 2$, on retrouve la fonction racine carrée i.e. $\sqrt[2]{\cdot} = \sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, mentionnée au paragraphe 2.1 (cf. aussi proposition 9.10 et définition 9.11). Pour $n = 3$, $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction racine cubique.

Preuve de la proposition 8.13 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu dans la proposition 6.22 que l'application $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n$ est de classe C^1 et on a une expression pour sa dérivée. Donc sa restriction à $\mathcal{D}_n$, à savoir f_n, est de classe C^1 sur $\mathcal{D}_n$ et, pour $x \in \mathcal{D}_n$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$. En particulier, f_n est continue sur $\mathcal{D}_n$ (cf. proposition 6.20).
Si n est impair alors $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$, car $n-1$ est pair. Donc f_n est strictement croissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$ (cf. corollaire 6.15). On en déduit que f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R} = \mathcal{D}_n$.
Si n est pair et non nul alors $\mathcal{D}_n = \mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f_n'(x) = nx^{n-1} > 0$. Donc f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[= \mathcal{D}_n$ (cf. corollaire 6.15).
Par la proposition 7.3, f_n est donc bijective de $\mathcal{D}_n$ sur $f(\mathcal{D}_n)$ et sa bijection réciproque $f_n^{\langle -1\rangle} : f_n(\mathcal{D}_n) \longrightarrow \mathcal{D}_n$ est continue et strictement croissante. De plus, comme $f_n(0) = 0$, $f_n^{\langle -1\rangle}(0) = 0$.
On a vu, au paragraphe 4.3.3, que $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et, au paragraphe 4.2.4, que $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$.
Considérons le cas où n est impair. Pour $x \geq 1$, on a $f_n(x) \geq x$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.36), on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Pour $x \leq -1$, on a $f_n(x) \leq x$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.36), on a donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$. Grâce à la proposition 7.4, on en déduit que $f_n(\mathcal{D}_n) = f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \mathcal{D}_n$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(-f_n^{\langle -1\rangle}(x)) = (-1)^n x = -x$, car n est impair et d'après la proposition 3.14, donc $f_n^{\langle -1\rangle}(-x) = -f_n^{\langle -1\rangle}(x)$. La fonction $f_n^{\langle -1\rangle}$ est donc impaire.
Voyons maintenant le cas où n est pair et non nul. Pour $x \geq 1$, on a $f_n(x) \geq x$. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.36), on a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Comme f_n est continue en 0, $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = f_n(0) = 0$. D'après la proposition 7.4, $f_n(]0; +\infty[) =]0; +\infty[$. Donc $f_n(\mathcal{D}_n) = f_n([0; +\infty[) = \{f_n(0)\} \cup f_n(]0; +\infty[) = \{0\} \cup]0; +\infty[= [0; +\infty[= \mathcal{D}_n$.
Dans les deux cas, comme $f_n^{\langle -1\rangle}$ est strictement croissante et $f_n^{\langle -1\rangle}(0) = 0$, $f_n^{\langle -1\rangle}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^{+*}$. □

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{D}_n$, on a, par la proposition 8.13 $\sqrt[n]{x^n} = x$. Donc $\sqrt[n]{\cdot}$ se comporte intuitivement comme une puissance $1/n$. Cependant, lorsque n est pair, elle n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$.
On peut se demander si l'on peut fabriquer une fonction puissance rationnelle et strictement positive de la façon suivante : comme un rationnel strictement positif s'écrit p/q avec $(p;q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pourait prendre $x \mapsto (\sqrt[q]{x})^p$. Mais, pourquoi pas $x \mapsto (\sqrt[q]{x^p})$?
On éclaircit cette question dans la proposition 8.14 suivante. Pour ce faire, on introduit une nouvelle fonction.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Lorsque q est pair, on étend la fonction $\sqrt[q]{\cdot}$, qui est seulement définie sur $\mathbb{R}^+$, à $\mathbb{R}$ par imparité en considérant l'application $\overline{\sqrt[q]{\cdot}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\overline{\sqrt[q]{x}} = \sqrt[q]{x}$, si $x \geq 0$, et par $\overline{\sqrt[q]{x}} = -\sqrt[q]{|x|}$, si $x < 0$. Lorsque q est impair, on pose $\overline{\sqrt[q]{\cdot}} = \sqrt[q]{\cdot}$, qui est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire (cf. définition 4.5).
On rappelle que, pour $p \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et pour $r > 0$, $r^{-p} \neq 0$ (cf. proposition 3.14) et $r^p := 1/r^{-p}$.

Proposition 8.14. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.*

1. *On suppose $p > 0$. On a*
$$\forall\, r \in \mathbb{R}^+\,, \quad \left(\sqrt[q]{r}\right)^p \;=\; \sqrt[q]{r^p}\,. \tag{8.13}$$
2. *On suppose $p < 0$. On a*
$$\forall\, r \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad \left(\sqrt[q]{r}\right)^p \;=\; \sqrt[q]{r^p}\,. \tag{8.14}$$
3. *On suppose q impair. On a*
$$\forall\, x < 0\,, \quad \left(\sqrt[q]{x}\right)^p \;=\; \sqrt[q]{x^p}\,.$$
4. *On suppose $p > 0$. On a*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \left(\overline{\sqrt[q]{x}}\right)^p \;=\; \overline{\sqrt[q]{x^p}}\,.$$
5. *On suppose $p < 0$. On a*
$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*\,, \quad \left(\overline{\sqrt[q]{x}}\right)^p \;=\; \overline{\sqrt[q]{x^p}}\,.$$

On remarque que, dans le cadre cette proposition 8.14, pour q pair et $x < 0$, on ne peut appliquer $\sqrt[q]{\cdot}$ ni à x, ni à x^p si p est impair. En revanche, on peut l'appliquer à x^p si p est pair. Ceci explique l'hypothèse "q impair" dans 3.

Preuve de la proposition 8.14 :

1. Soit $p > 0$. Comme $\sqrt[q]{0} = 0$ et $0^p = 0$, on a $(\sqrt[q]{0})^p = 0 = \sqrt[q]{0^p}$. Pour $r > 0$, $\sqrt[q]{r^p} > 0$ et est l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathcal{D}_q$ donnée par $x^q = r^p$ (cf. propostion 8.13). Comme, par la proposition 3.14,
$$\left(\left(\sqrt[q]{r}\right)^p\right)^q \;=\; \left(\sqrt[q]{r}\right)^{pq} \;=\; \left(\left(\sqrt[q]{r}\right)^q\right)^p \;=\; r^p\,,$$
$(\sqrt[q]{r})^p$ est solution de l'équation précédente. Par unicité, $(\sqrt[q]{r})^p = \sqrt[q]{r^p}$.
2. Soit $p < 0$ et $r > 0$. Par 1, on a $(\sqrt[q]{r})^{-p} = \sqrt[q]{r^{-p}} > 0$. On a donc
$$\left(\left(\sqrt[q]{r}\right)^p\right)^q \;=\; \frac{1}{\left(\sqrt[q]{r^{-p}}\right)^q} \;=\; \frac{1}{r^{-p}} \;=\; r^p\,.$$
Or, $\sqrt[q]{r^p}$ est l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathcal{D}_q$ donnée par $x^q = r^p$ (cf. propostion 8.13), donc $\sqrt[q]{r^p} = (\sqrt[q]{r})^p$.
3. Soit q impair. Pour $x < 0$, on a, par imparité de $\sqrt[q]{\cdot}$, par la proposition 3.14 et par 1 ou 2,
$$\left(\sqrt[q]{x}\right)^p \;=\; \left(-\sqrt[q]{-x}\right)^p \;=\; (-1)^p \cdot \left(\sqrt[q]{-x}\right)^p \;=\; (-1)^p \cdot \sqrt[q]{(-x)^p} \;=\; \sqrt[q]{(-1)^p \cdot (-x)^p} \;=\; \sqrt[q]{x^p}\,.$$
4. Soit $p > 0$. Lorsque $x \geq 0$, la formule à démontrer découle de (8.13). Pour $x < 0$, on peut refaire le calcul du 3 avec $\sqrt[q]{\cdot}$ remplacée la fonction impaire $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$.
5. Soit $p < 0$. Lorsque $x \geq 0$, la formule à démontrer découle de (8.14). Pour $x < 0$, on peut refaire le calcul du 3 avec $\sqrt[q]{\cdot}$ remplacée la fonction impaire $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$. □

Définition 8.15. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{D}_p^P = \mathbb{R}^*$ si $p < 0$ et $\mathcal{D}_p^P = \mathbb{R}$ si $p > 0$. On appelle fonction puissance p/q l'application $\overline{P_{p/q}} : \mathcal{D}_p^P \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_p^P\,, \quad \overline{P_{p/q}}(x) \;:=\; \left(\overline{\sqrt[q]{x}}\right)^p \;=\; \overline{\sqrt[q]{x^p}}\,.$$

On constate des limitations déplaisantes de cette construction. Tout d'abord, même lorsque la fonction $\overline{P_{p/q}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, elle est en général seulement continue. Par exemple, on peut vérifier que $\overline{P_{1/2}} = \overline{\sqrt[2]{\cdot}}$ n'est pas dérivable en 0. C'est la même chose avec $\overline{P_{1/3}} = \overline{\sqrt[2]{\cdot}}$ et $\overline{P_{2/3}}$. D'autre part, on ne voit pas comment généraliser cette construction pour obtenir une fonction "puissance α" avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
C'est pourquoi une attitude différente est adoptée dans la littérature mathématique, une attitude que l'on va suivre ci-dessous.

Proposition 8.16. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad \sqrt[q]{x} \;=\; \exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln(x)\right) \;=\; e^{\frac{1}{q}\cdot\ln(x)} \tag{8.15}$$

et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad \overline{P_{p/q}}(x) \;=\; \exp\left(\frac{p}{q}\cdot\ln(x)\right) \;=\; e^{\frac{p}{q}\cdot\ln(x)}\,. \tag{8.16}$$

Preuve : Soit $x > 0$. Par (8.4) et la définition de ln,

$$\left(\exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln(x)\right)\right)^q \;=\; \exp\bigl(\ln(x)\bigr) \;=\; x$$

donc $e^{\frac{1}{q}\cdot\ln(x)}$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ donnée par $f_q(t) = x$ dont l'unique solution est $\sqrt[q]{x}$. On a donc montré (8.15).
Par (8.4) et (8.15),

$$\exp\left(\frac{p}{q}\cdot\ln(x)\right) \;=\; \left(\exp\left(\frac{1}{q}\cdot\ln(x)\right)\right)^p \;=\; \bigl(\sqrt[q]{x}\bigr)^p \;=\; \overline{P_{p/q}}(x)\,,$$

d'après la définition de $\overline{P_{p/q}}$ dans la définition 8.15. □

Ce résultat nous conduit naturellement à la définition suivante d'une fonction "puissance α" avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 8.17. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction puissance α est la fonction $P_\alpha : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ définie par*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad P_\alpha(x) \;:=\; \exp\left(\alpha\cdot\ln(x)\right) \;=\; e^{\alpha\cdot\ln(x)}\,. \tag{8.17}$$

Cette définition est satisfaisante dans la mesure où l'on a la

Proposition 8.18. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction P_α est de classe C^1 et $P'_\alpha = \alpha P_{\alpha-1}$. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction P_α est bijective et sa bijection réciproque $P_\alpha^{\langle -1\rangle}$ est $P_{1/\alpha}$. Lorsque $\alpha > 0$, la fonction P_α se prolonge par continuité en 0 et son prolongement $\overline{P_\alpha}$ est aussi bijectif. Lorsque α est rationnel non nul et s'écrit p/q avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, P_α est la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de $\overline{P_{p/q}}$.*

Preuve : La proposition 8.16 donne immédiatement la dernière affirmation. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Par composition (cf. propositions 8.8, 8.11 et 6.20), la fonction P_α est de classe C^1 et, pour $x > 0$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}\,, \quad P'_\alpha(x) \;=\; \frac{\alpha}{x}\cdot P_\alpha(x) \;=\; \alpha\cdot e^{\alpha\cdot\ln(x)\,-\,\ln(x)} \;=\; \alpha\cdot P_{\alpha-1}(x)\,.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Pour $x > 0$, on a, par la définition 8.10,

$$P_\alpha\big(P_{1/\alpha}(x)\big) \;=\; \exp\big(\alpha \cdot (1/\alpha) \cdot \ln(x)\big) \;=\; \exp(\ln(x)) \;=\; \exp\big((1/\alpha) \cdot \alpha \cdot \ln(x)\big) \;=\; P_{1/\alpha}\big(P_\alpha(x)\big)\,.$$

Donc $P_\alpha \circ P_{1/\alpha} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{+*}} = P_{1/\alpha} \circ P_\alpha$. Par la proposition 9.2, P_α est bijective et sa bijection réciproque est $P_{1/\alpha}$.
Soit $\alpha > 0$. D'après les propositions 8.8, 8.11, 4.37et 4.28, P_α tend vers 0 en 0. Par la définition 4.25, P_α se prolonge par continuité en 0 et son prolongement $\overline{P_\alpha}$ vérifie $\overline{P_\alpha}(0) = 0$. Donc $\overline{P_\alpha} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est bijectif (cf. proposition 9.2). □

On détermine maintenant la régularité des fonctions introduites dans ce paragraphe.

Proposition 8.19. *Soit $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

1. *Sur $\mathbb{R}^{+*}$, les fonctions $\sqrt[q]{\cdot}$ et $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$, qui coïncident, $\overline{P_{p/q}}$ et P_α sont toutes de classe C^∞.*
2. *Sur $\mathbb{R}^{-*}$, les fonctions $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$ et $\overline{P_{p/q}}$ sont de classe C^∞.*

Preuve :

1. D'après les formules (8.15), (8.16) et (8.17), et d'après la proposition 6.32, les fonctions $\sqrt[q]{\cdot}$ et $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$, $\overline{P_{p/q}}$ et P_α sont toutes de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. La restriction à $\mathbb{R}^{-*}$ de la fonction valeur absolue $|\cdot|$ est une fonction polynôme à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$, par la proposition 6.33. Par composition avec la restriction de $-\sqrt[q]{\cdot}$ à $\mathbb{R}^{+*}$, qui est de classe C^∞ (proposition 6.32), la fonction $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$ (cf. proposition 6.32). Par la proposition 6.33, la fonction $\mathbb{R}^{-*} \ni x \mapsto x^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$, est de classe C^∞ et, par la proposition 6.32, la fonction $\mathbb{R}^{-*} \ni x \mapsto x^p$, avec $p \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$, est aussi de classe C^∞. Donc, par composition avec la restriction de $\overline{\sqrt[q]{\cdot}}$ à $\mathbb{R}^{-*}$ (cf. proposition 6.32), $\overline{P_{p/q}}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{-*}$. □

8.4 Fonctions circulaires.

Ce paragraphe est consacré à l'étude des fonctions circulaires sinus, cosinus, tangente et cotangente, ainsi qu'à leurs fonctions réciproques. On rappelle que $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$.

Définition 8.20. *Les parties réelle et imaginaire de la fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$, donnée par $\varphi(t) = \exp(it)$ (cf. définition 4.5 et proposition 8.4), sont appelées respectivement fonction sinus et fonction cosinus. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = \Re\varphi(x)$ et $\cos(x) = \Im\varphi(x)$.*

Des propriétés de la fonction φ (cf. proposition 8.4), on déduit les propriétés suivantes de sinus et cosinus.

Proposition 8.21. *Les fonctions* sin : $\mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ *et* cos : $\mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ *sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont données par* $\sin' = \cos$ *et* $\cos' = -\sin$. *Elles sont 2π-périodiques (dans le sens donné par la proposition 8.4). La fonction* sin *est impaire et la fonction* cos *est paire (cf. définition 4.5). De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.*
La fonction sin *est strictement positive sur $]0;\pi[$, strictement négative sur $]-\pi;0[$. On a $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$. Elle est strictement croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$ et strictement décroissante sur $[\pi/2;\pi]$ et sur $[-\pi : -\pi/2]$.*
La fonction cos *est strictement positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$, strictement négative sur $]-\pi;-\pi/2[$ et sur $]\pi/2;\pi[$. On a $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0 = \cos(-\pi/2)$ et $\cos(\pi) = -1$. Elle est strictement croissante sur $[-\pi : 0]$ et strictement décroissante sur $[0;\pi]$.*

Preuve : On renvoit à celle du lemme 9.64. □

Proposition 8.22. *La restriction de la fonction* sin *à l'intervalle* $[-\pi/2;\pi/2]$ *est bijective de* $[-\pi/2;\pi/2]$ *sur* $[-1;1]$. *Sa bijection réciproque, appelée Arcsinus et notée* $\mathrm{Arcsin} : [-1;1] \longrightarrow [-\pi/2;\pi/2]$, *est impaire, strictement croissante, continue sur* $[-1;1]$ *et dérivable sur* $]-1;1[$. *De plus,*

$$\forall\, x \in]-1;1[\,, \quad \mathrm{Arcsin}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\,. \tag{8.18}$$

La restriction de la fonction cos *à l'intervalle* $[0;\pi]$ *est bijective de* $[0;\pi]$ *sur* $[-1;1]$. *Sa bijection réciproque, appelée Arccosinus et notée* $\mathrm{Arccos} : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$ *est strictement décroissante, continue sur* $[-1;1]$ *et dérivable sur* $]-1;1[$. *De plus,*

$$\forall\, x \in]-1;1[\,, \quad \mathrm{Arccos}'(x) \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\,. \tag{8.19}$$

Pour tout $x \in [-1;1]$, $\mathrm{Arccos}(x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \pi/2$.

On peut remarquer que sin est aussi bijective de $[\pi/2;3\pi/2]$ sur $[-1;1]$, de $[7\pi/2;9\pi/2]$ sur $[-1;1]$. Le choix de l'intervalle $[-\pi/2;\pi/2]$ pour définir la fonction Arcsin est donc arbitraire. Il a cependant le mérite de préserver l'imparité de sinus et de la transmettre à Arcsinus. Dans le cas de cosinus, le choix de l'intervalle $[0;\pi]$ est aussi arbitraire.

Preuve de la proposition 8.22 : Par la proposition 8.21, sin est continue et strictement croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$ donc, par la proposition 7.3, elle est bijective de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $\sin([-\pi/2;\pi/2])$ et sa bijection réciproque Arcsin est continue et strictement croissante sur $\sin([-\pi/2;\pi/2])$.
Toujours par la proposition 8.21, $\sin(\pi/2) = 1$ et, par imparité, $\sin(-\pi/2) = -1$. D'après la proposition 7.4 et la continuité de sinus, $\sin(]-\pi/2;\pi/2[) =]-1;1[$. D'où

$$\sin\big([-\pi/2;\pi/2]\big) \;=\; \big\{\sin(-\pi/2)\,;\,\sin(\pi/2)\big\} \,\cup\, \sin\big(]-\pi/2;\pi/2[\big) \;=\; [-1;1]\,.$$

Comme $\sin' = \cos$ ne s'annule pas sur $]-\pi/2;\pi/2[$ et y est strictement positive (cf. proposition 8.21), la proposition 7.5 garantit que Arcsin est dérivable sur $\sin(]-\pi/2;\pi/2[) =]-1;1[$ et que, pour $x \in]-1;1[$,

$$\mathrm{Arcsin}'(x) \;=\; \frac{1}{\sin'\big(\mathrm{Arcsin}\,(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\cos\big(\mathrm{Arcsin}\,(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1\,-\,\big(\sin\big(\mathrm{Arcsin}\,(x)\big)\big)^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\,.$$

Pour $x \in [-1;1]$, on a $-x \in [-1;1]$ et, puisque sinus est impaire (cf. proposition 8.21), $\sin(-\mathrm{Arcsin}\,(x)) = -\sin(\mathrm{Arcsin}\,(x)) = -x$ donc $-\mathrm{Arcsin}\,(x)$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in [-\pi/2;\pi/2]$ donnée par $\sin(t) = -x$, dont l'unique solution est $\mathrm{Arcsin}\,(-x)$ d'après la bijectivité de sin de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $[-1;1]$ (cf. proposition 9.2). D'où $-\mathrm{Arcsin}\,(x) = \mathrm{Arcsin}\,(-x)$. On a montré que Arcsin est impaire.
Par la proposition 8.21, cos est continue et strictement décroissante sur $[0;\pi]$ donc, par la proposition 7.3, elle est bijective de $[0;\pi]$ sur $\cos([0;\pi])$ et sa bijection réciproque Arccos est continue et strictement décroissante sur $\cos([0;\pi])$.
Par la proposition 8.21, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. D'après la proposition 7.4 et la continuité de cosinus, $\cos(]0;\pi[) =]-1;1[$. D'où

$$\cos\big([0;\pi]\big) \;=\; \big\{\cos(0)\,;\,\cos(\pi)\big\} \,\cup\, \cos\big(]0;\pi[\big) \;=\; [-1;1]\,.$$

Comme $\cos' = -\sin$ ne s'annule pas sur $]0;\pi[$ et y est strictement négative (cf. proposition 8.21), la proposition 7.5 garantit que Arccos est dérivable sur $\cos(]0;\pi[) =]-1;1[$ et que, pour $x \in]-1;1[$,

$$\mathrm{Arccos}'(x) \;=\; \frac{1}{\cos'\big(\mathrm{Arccos}\,(x)\big)} \;=\; \frac{1}{-\sin\big(\mathrm{Arccos}\,(x)\big)} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1\,-\,\big(\cos\big(\mathrm{Arccos}\,(x)\big)\big)^2}} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1\,-\,x^2}}\,.$$

Par les propositions 4.32 et 6.8, la fonction Arccos + Arcsin est continue sur $[-1;1]$, elle est dérivable sur $]-1;1[$ et, d'après (8.18) et (8.19), sa dérivée est nulle. Par le corollaire 6.15, elle est constante sur $[-1;1]$ égale à $\mathrm{Arccos}\,(0) + \mathrm{Arcsin}\,(0) = (\pi/2) + 0 = \pi/2$. □

Attention : on a, certes, pour tout $x \in [-\pi/2;\pi/2]$, $\sin(\mathrm{Arcsin}\,(x)) = x$ et $\mathrm{Arcsin}\,(\sin(x)) = x$ mais, pour $x \notin [-\pi/2;\pi/2]$, $\mathrm{Arcsin}\,(\sin(x)) \neq x$, puisque Arcsin est à valeurs dans $[-\pi/2;\pi/2]$.

D'après la proposition 8.21, l'ensemble des points d'annulation de la fonction cosinus et celui de la fonction sinus sont respectivement les ensembles

$$\mathcal{D}_c \;:=\; \Big\{t \in \mathbb{R};\, \Big(t - \frac{\pi}{2}\Big) \,\in\, \pi\mathbb{Z}\Big\} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_s \;:=\; \big\{t \in \mathbb{R};\, t \in \pi\mathbb{Z}\big\}\,.$$

Définition 8.23. *On appelle fonction tangente la fonction* $\tan : \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. *On appelle fonction cotangente la fonction* $\mathrm{cotan} : \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s$, $\mathrm{cotan}\,(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)} = \dfrac{1}{\tan(x)}$.

On remarque que les domaines de définitions de tangente et cotangente vérifient

$$\mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c \;:=\; \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, \frac{\pi}{2} + k\pi\Big[\quad \text{et} \quad \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s \;:=\; \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \big]k\pi\,;\,(k+1)\pi\big[\,. \tag{8.20}$$

On remarque aussi qu'ils sont symétriques par rapport à 0 :

$$\Big(\big(x \,\in\, \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c\big) \iff \big(-x \,\in\, \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c\big)\Big) \quad \text{et} \quad \Big(\big(x \,\in\, \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s\big) \iff \big(-x \,\in\, \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_s\big)\Big)\,.$$

Proposition 8.24. *La fonction tangente est impaire. Elle est strictement croissante et de classe* C^1 *sur chaque intervalle composant son domaine de définition. De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c\,, \quad \tan'(x) \;=\; 1 \,+\, \big(\tan(x)\big)^2 \;=\; \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}\,.$$

La restriction de la fonction tan *à l'intervalle* $]-\pi/2;\pi/2[$ *est bijective de* $]-\pi/2;\pi/2[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque, appelée Arctangente et notée* $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2;\pi/2[$, *est impaire, strictement croissante, dérivable* (*donc continue*) *sur* $\mathbb{R}$. *De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Arctan}'(x) \;=\; \frac{1}{1 \,+\, x^2}\,. \tag{8.21}$$

La fonction cotangente est impaire. Elle est strictement décroissante et de classe C^1 *sur chaque intervalle composant son domaine de définition. De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\mathcal{D}_c\,, \quad \mathrm{cotan}'(x) \;=\; -\Big(1 \,+\, \big(\mathrm{cotan}\,(x)\big)^2\Big) = \;\frac{-1}{\big(\sin(x)\big)^2}\,.$$

La restriction de la fonction cotan *à l'intervalle* $]0;\pi[$ *est bijective de* $]0;\pi[$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque, appelée Arccotangente et notée* $\mathrm{Arccotan} : \mathbb{R} \longrightarrow]0;\pi[$, *est strictement décroissante, dérivable* (*donc continue*) *sur* $\mathbb{R}$. *De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Arccotan}'(x) \;=\; \frac{-1}{1 \,+\, x^2}\,. \tag{8.22}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}\,(x) + \mathrm{Arccotan}\,(x) = \pi/2$. *De plus,*

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}\,(x) \;=\; -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}\,(x) \;=\; \frac{\pi}{2}\,, \tag{8.23}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Arccotan}\,(x) \;=\; \pi \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Arccotan}\,(x) \;=\; 0\,. \tag{8.24}$$

Preuve : Comme le domaine de définition de tangente est symétrique par rapport à 0, comme cosinus est paire, comme sinus est impair, on voit que tangente est impaire.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit $I_k =]-\pi/2+2\pi k; \pi/2+2\pi k[$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on sait, par la proposition 8.21, que sin et cos sont de classe C^1 sur I_k et que cos y est strictement positive. Donc, par la proposition 6.20, tan est de classe C^1 sur I_k et, pour $x \in I_k$, on a

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)}{\cos(x)} + \sin(x)\cdot\frac{-1}{\big(\cos(x)\big)^2}\cdot\cos'(x) = 1 + \frac{\big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} = 1 + \big(\tan(x)\big)^2 \\ &= \frac{\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} = \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2} > 0\,.\end{aligned}$$

En particulier, tan est strictement croissante sur I_k, par le corollaire 6.15.
Comme tan est aussi continue (cf. proposition 6.20), on déduit de la proposition 7.3 que tan est bijective de $I_0 =]-\pi/2; \pi/2[$ sur $\tan(I_0)$ et que sa bijection réciproque Arctan est strictement croissante et continue sur $\tan(I_0)$.
Comme cosinus est continue, strictement positive sur I_0, et comme $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, on a, d'après la proposition 4.37,

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+}\frac{1}{\cos(x)} = +\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to(\pi/2)^-}\frac{1}{\cos(x)} = +\infty\,.$$

Donc, comme sinus est continue, $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$, on déduit de la proposition 4.37 que

$$\lim_{x\to(-\pi/2)^+}\tan(x) = -\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to(\pi/2)^-}\tan(x) = +\infty\,.$$

Par la proposition 7.4, $\tan(I_0) = \mathbb{R}$.
Comme $\tan' \geq 1$, $\tan'$ ne s'annule pas donc, par la proposition 7.5, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{\tan'\big(\mathrm{Arctan}(x)\big)} = \frac{1}{1+\big(\tan\big(\mathrm{Arctan}(x)\big)\big)^2} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, puisque tangente est impaire, $\tan(-\mathrm{Arctan}(x)) = -\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = -x$ donc $-\mathrm{Arctan}(x)$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in]-\pi/2; \pi/2[$ donnée par $\tan(t) = -x$, dont l'unique solution est $\mathrm{Arctan}(-x)$ d'après la bijectivité de tan de $I_0 =]-\pi/2; \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. D'où $-\mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Arctan}(-x)$. On a montré que Arctan est impaire.
Comme le domaine de définition de cotangente est symétrique par rapport à 0, comme cosinus est paire, comme sinus est impair, on voit que cotangente est impaire.
Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit $J_k =]\pi k; \pi(k+1)[$. Pour $k \in \mathbb{Z}$ fixé, on sait, par la proposition 8.21, que sin et cos sont de classe C^1 sur J_k et que sin y est strictement positive. Donc, par la proposition 6.20, cotan est de classe C^1 sur J_k et, pour $x \in J_k$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{cotan}'(x) &= \frac{\cos'(x)}{\sin(x)} + \cos(x)\cdot\frac{-1}{\big(\sin(x)\big)^2}\cdot\sin'(x) = -1 - \frac{\big(\cos(x)\big)^2}{\big(\sin(x)\big)^2} = -1 - \big(\mathrm{cotan}(x)\big)^2 \\ &= -\frac{\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2}{\big(\sin(x)\big)^2} = \frac{-1}{\big(\sin(x)\big)^2} < 0\,.\end{aligned}$$

En particulier, cotan est strictement décroissante sur J_k, par le corollaire 6.15.
Comme cotan est aussi continue (cf. proposition 6.20), on déduit de la proposition 7.3 que cotan est bijective de $J_0 =]0; \pi[$ sur $\mathrm{cotan}(J_0)$ et que sa bijection réciproque Arccotan est strictement décroissante et continue sur $\mathrm{cotan}(J_0)$.
Comme sinus est continue, strictement positive sur J_0, et comme $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, on a, d'après la proposition 4.37,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin(x)} = +\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to\pi^-}\frac{1}{\sin(x)} = +\infty\,.$$

Donc, comme cosinus est continue, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$, on déduit de la proposition 4.37 que

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{cotan}(x) \;=\; +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to \pi^-} \operatorname{cotan}(x) \;=\; -\infty\,.$$

Par la proposition 7.4, $\operatorname{cotan}(J_0) = \mathbb{R}$.
Comme $\operatorname{cotan}' \leq -1$, cotan' ne s'annule pas donc, par la proposition 7.5, Arccotan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arccotan}'(x) \;=\; \frac{1}{\operatorname{cotan}'\big(\operatorname{Arccotan}(x)\big)} \;=\; \frac{1}{-1 \,-\, \big(\operatorname{cotan}\big(\operatorname{Arccotan}(x)\big)\big)^2} \;=\; \frac{-1}{1 \,+\, x^2}\,.$$

Par les propositions 4.32 et 6.8, la fonction $\operatorname{Arctan} + \operatorname{Arccotan}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, d'après (8.21) et (8.22), sa dérivée est nulle. Par le corollaire 6.15, elle est constante sur $\mathbb{R}$ égale à $\operatorname{Arctan}(0) + \operatorname{Arccotan}(0) = 0 + (\pi/2) = \pi/2$.
Comme Arctan est croissante,

$$\inf \operatorname{Arctan}(\mathbb{R}) \;=\; \inf \Big]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\Big[\;=\; -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \sup \operatorname{Arctan}(\mathbb{R}) \;=\; \sup \Big]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\Big[\;=\; \frac{\pi}{2}\,,$$

la proposition 4.38 donne (8.23). Comme Arccotan est décroissante,

$$\inf \operatorname{Arccotan}(\mathbb{R}) \;=\; \inf\,]0\,;\,\pi[\;=\; 0 \quad \text{et} \quad \sup \operatorname{Arccotan}(\mathbb{R}) \;=\; \sup\,]0\,;\,\pi[\;=\; \pi\,,$$

la proposition 4.38 donne (8.24). □

On détermine maintenant la régularité des fonctions circulaires.

Proposition 8.25. *On a les régularités C^∞ suivantes :*

1. *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, donnée par $f_\alpha(t) = \exp(\alpha t)$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *Les fonctions* sin *et* cos *sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
3. *La fonction* tan *est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_c$ tandis que la fonction* cotan *est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_s$ (les ensembles $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_c$ et $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}_s$ étant définis dans* (8.20)).
4. *Les fonctions* Arcsin *et* Arccos *sont de classe C^∞ sur $]-1;1[$.*
5. *Les fonctions* Arctan *et* Arccotan *sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

Preuve : On rappelle que $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Par la proposition 8.3, on sait que la fonction f_α est de classe C^1 donc aussi de classe C^0 (cf. proposition 6.20) et que $f'_\alpha = \alpha f_\alpha$. Soit $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^\mathbb{R}$ la suite définie par, pour $p \in \mathbb{N}$, $g_p = \alpha^p f_\alpha$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $g_p \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{C}) \subset C^0(\mathbb{R};\mathbb{C})$, d'après la proposition 6.20. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $g'_p = \alpha^p f'_\alpha = \alpha^{p+1} f_\alpha = g_{p+1}$ (cf. proposition 6.8) donc la propriété $\mathcal{P}(p)$ de la proposition 6.29 est vraie. Par cette proposition 6.29, f_α est de classe C^p sur $\mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc $f_\alpha \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$, d'après la définition 6.25.
2. Comme $\cos = (f_i + f_{-i})/2$ et $\sin = (f_i - f_{-i})/(2i)$, on déduit du 1 et de la proposition 6.32 que sin et cos sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
3. Comme $\tan = \sin / \cos$ sur I et $\operatorname{cotan} = \cos / \sin$ sur J, on déduit du 2 et de la proposition 6.32 que tan est C^∞ sur I et cotan est de classe C^∞ sur J.
4. Par le 2, on peut appliquer le corollaire 7.7 à sin et cos. Cela montre que Arcsin est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\sin)$ et que Arccos est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\cos)$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\sin) \;&= \big\{y \in \sin\big([-\pi/2;\pi/2]\big)\,;\quad \sin'\big(\operatorname{Arcsin}(y)\big) \;\neq\; 0\big\}\\ &= \big\{y \in \sin\big([-\pi/2;\pi/2]\big)\,;\quad \cos\big(\operatorname{Arcsin}(y)\big) \;\neq\; 0\big\}\\ &= \big\{y \in [-1;1]\,;\quad \operatorname{Arcsin}(y) \;\notin\; \{-\pi/2\,;\,\pi/2\}\big\} \;= \,]-1;1[\,.\end{aligned}$$

Donc Arcsin est de classe C^∞ sur $]-1;1[$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\cos) &= \big\{y \in \cos\big([0;\pi]\big)\,; \quad \cos'\big(\mathrm{Arccos}\,(y)\big) \neq 0\big\}\\ &= \big\{y \in \cos\big([0;\pi]\big)\,; \quad -\sin\big(\mathrm{Arccos}\,(y)\big) \neq 0\big\}\\ &= \big\{y \in [-1;1]\,; \quad \mathrm{Arccos}\,(y) \notin \{0\,;\,\pi\}\big\} =]-1;1[\,.\end{aligned}$$

Donc Arccos est de classe C^∞ sur $]-1;1[$.

5. Par le 3, on peut appliquer le corollaire 7.7 à tan et cotan. Cela montre que Arctan est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\tan)$ et que Arccotan est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\mathrm{cotan})$. Par la proposition 8.24, ni $\tan'$, ni cotan' ne s'annule donc $\mathcal{P}(\tan) = \mathbb{R} = \mathcal{P}(\mathrm{cotan})$. Donc Arctan et Arccotan sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. □

On termine cette partie en établissant deux formules pour la fonction "argument principal" définie dans la définition 8.6.

Proposition 8.26. *On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'argument principal* $\mathrm{Arg}\,(z)$ *de z est le réel défini dans la définition 8.6. On rappelle que la fonction* Arctan *est définie dans la proposition 8.24. On note par $\mathbb{R}^-$ la partie de $\mathbb{C}$ définie par $\{z \in \mathbb{C};\ \Re(z) \leq 0$ et $\Im(z) = 0\}$.*

1. *Pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$, l'argument principal* $\mathrm{Arg}\,(z)$ *de z est donné par*

$$\mathrm{Arg}\,(z) \;=\; \mathrm{Arctan}\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z)}\right). \tag{8.25}$$

2. *Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, l'argument principal* $\mathrm{Arg}\,(z)$ *de z est donné par*

$$\mathrm{Arg}\,(z) \;=\; 2 \cdot \mathrm{Arctan}\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) + |z|}\right). \tag{8.26}$$

Preuve :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $\Re(z) > 0$. En particulier, $z \neq 0$. Par la définition 8.6, on sait que $\mathrm{Arg}\,(z) \in]-\pi;\pi]$ et que $\exp(i\mathrm{Arg}\,(z)) = z/|z|$. Par définition de sinus et cosinus (cf. définition 8.20), $\sin(\mathrm{Arg}\,(z)) = \Im(z)/|z|$ et $\cos(\mathrm{Arg}\,(z)) = \Re(z)/|z|$.
   Par les propriétés de cosinus de la proposition 8.21, comme $\Re(z) > 0$, on a nécessairement $\mathrm{Arg}\,(z) \in]-(\pi/2);(\pi/2)[$. Par définition de la fonction tangente (cf. définition 8.23),

$$\tan\big(\mathrm{Arg}\,(z)\big) \;=\; \frac{\Im(z)/|z|}{\Re(z)/|z|} \;=\; \frac{\Im(z)}{\Re(z)}\,.$$

   Donc, par définition de l'arctangente (cf. proposition 8.24), on obtient la formule (8.25).

2. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. Si $\Im(z) \neq 0$ alors $|\Re(z)| = \sqrt{|z|^2 - (\Im(z))^2} < |z|$ donc $-\Re(z) < |z|$ et $\Re(z)+|z| > 0$. Si $\Im(z) = 0$ alors $\Re(z) > 0$ donc $\Re(z)+|z| > 0$. Le membre de droite de (8.26) est donc bien défini dans tous les cas.
   Le nombre complexe $z+|z|$ vérifie $\Re(z+|z|) = \Re(z)+|z| > 0$, d'après ce qui précède, et $\Im(z+|z|) = \Im(z)$. Donc, par 1,

$$\mathrm{Arg}\,\big(z \,+\, |z|\big) \;=\; \mathrm{Arctan}\left(\frac{\Im(z)}{\Re(z) \,+\, |z|}\right). \tag{8.27}$$

   Comme $\Re(z + |z|) > 0$, $z + |z| \neq 0$. On a, en utilisant $|z|^2 = z\overline{z} \neq 0$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{z+|z|}{|z+|z||}\right)^2 &= \frac{\big(z+|z|\big)^2}{\big(z+|z|\big)\cdot\big(\overline{z}+|z|\big)} \;=\; \frac{z^2 \,+\, 2z|z| \,+\, |z|^2}{|z|^2 \,+\, z|z| \,+\, \overline{z}|z| \,+\, |z|^2}\\ &= \frac{z\cdot\big(z \,+\, 2|z| \,+\, \overline{z}\big)}{|z|\cdot\big(|z| \,+\, z \,+\, \overline{z} \,+\, |z|\big)} \;=\; \frac{z}{|z|}\,.\end{aligned}$$

Donc, par (8.4),

$$e^{2i\mathrm{Arg}\,(z+|z|)} \;=\; \Big(e^{i\mathrm{Arg}\,(z+|z|)}\Big)^2 \;=\; \left(\frac{z+|z|}{|z+|z||}\right)^2 \;=\; \frac{z}{|z|} \;=\; e^{i\mathrm{Arg}\,(z)}\,.$$

D'après (8.7), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Arg}(z) = 2\mathrm{Arg}(z+|z|) + 2\pi k$. Comme $\mathrm{Arg}(z) \in]-\pi;\pi]$ et $\mathrm{Arg}(z+|z|) \in]-(\pi/2);(\pi/2)[$, on a, par la remarque 1.5, $|\mathrm{Arg}(z) - 2\mathrm{Arg}(z+|z|)| < 2\pi$ d'où $|k| < 1$. On en déduit que l'entier k est nul ce qui donne $\mathrm{Arg}(z) = 2\mathrm{Arg}(z+|z|)$. En appliquant (8.27), on en déduit (8.26). □

8.5 Fonctions hyperboliques.

Ce paragraphe est consacré à l'étude des fonctions hyperboliques sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique, tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique, ainsi qu'à leurs fonctions réciproques.

Définition 8.27. *Les parties impaire et paire de l'exponentielle réelle sont appelées respectivement fonction sinus hyperbolique et fonction cosinus hyperbolique. On les définit et note, respectivement, par, pour $x \in \mathbb{R}$, $sh(x) = (e^x - e^{-x})/2$ et $ch(x) = (e^x + e^{-x})/2$.*

Des propriétés de l'exponentielle réelle, on tire les propriétés suivantes de ces fonctions.

Proposition 8.28. *Tandis que la fonction $sh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est impaire, la fonction $ch : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est paire. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $(ch(x))^2 - (sh(x))^2 = 1$. Ces fonctions sont toutes deux de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On a $sh' = ch$ et $ch' = sh$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|sh(x)| < ch(x)$.*
La fonction sh est strictement croissante, $sh(0) = 0$. Elle est strictement négative sur $]-\infty : 0[$ et strictement positive sur $]0;+\infty[$.
La fonction ch est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$, strictement croissante sur $[0;+\infty[$, $ch(0) = 1$. Elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} sh(x) \;=\; -\infty\,, \quad \lim_{x\to-\infty} ch(x) \;=\; +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} sh(x) \;=\; +\infty\,, \quad \lim_{x\to+\infty} ch(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.28}$$

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(-x) = (e^{-x} - e^x)/2 = -\mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(-x) = (e^{-x} + e^x)/2 = \mathrm{ch}(x)$. Par la définition 4.5, sh est impaire et ch est paire. Par la proposition 8.8, on a, pour $t \geq 0$, $\mathrm{ch}(t) \geq e^t/2 > 0$, et $e^t \geq e^0 = 1 \geq e^{-t}$ donc $\mathrm{sh}(t) \geq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme ch est paire, on a $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(|x|)$ et, comme sh est impaire, on a $|\mathrm{sh}(x)| = \mathrm{sh}(|x|)$. Donc

$$\mathrm{ch}(x) \,-\, |\mathrm{sh}(x)| \;=\; \mathrm{ch}(|x|) \,-\, \mathrm{sh}(|x|) \;=\; \frac{e^{-|x|} \,+\, e^{-|x|}}{2} \;=\; e^{-|x|} \,>\, 0\,,$$

par la proposition 8.8. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2 \,-\, \big(\mathrm{sh}(x)\big)^2 \;=\; \big(\mathrm{ch}(x) \,-\, \mathrm{sh}(x)\big)\cdot\big(\mathrm{ch}(x) \,+\, \mathrm{sh}(x)\big) \;=\; e^{-x}\cdot e^x \;=\; 1\,,$$

d'après (8.3). Comme $\mathrm{ch}(x) \geq e^x/2 > 0$ (cf. proposition 8.8), comme $(\mathrm{ch}(x))^2 = 1 + (\mathrm{sh}(x))^2 \geq 1$ et comme $0 \leq x \mapsto x^2$ est strictement croissante, la proposition $(\mathrm{ch}(x) < 1)$ est fausse donc $\mathrm{ch}(x) \geq 1$. Enfin, on voit que $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\mathrm{sh}(0) = 0$.
Par la proposition 8.8, l'exponentielle réelle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme il en est de même de la fonction polynômiale $x \mapsto -x$, la fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est aussi de classe C^1 et, par somme, sh et ch sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 6.20). De plus, d'après la proposition 6.8, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sh}'(x) \;=\; \frac{1}{2}\cdot e^x \,-\, \frac{1}{2}\cdot e^{-x}\cdot(-1) \;=\; \mathrm{ch}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}'(x) \;=\; \frac{1}{2}\cdot e^x \,+\, \frac{1}{2}\cdot e^{-x}\cdot(-1) \;=\; \mathrm{sh}(x)\,.$$

Comme ch est strictement positive, sh est strictement croissante (cf. corollaire 6.15). Comme $\mathrm{sh}(0) = 0$, sh est strictement négative sur $]-\infty : 0[$ et strictement positive sur $]0; +\infty[$. Donc, par le corollaire 6.15, ch est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
Par (8.10) avec $m = 0$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) \;=\; +\infty\,.$$

Donc, par les opérations sur les limites (cf. proposition 4.37), on a l'existence et la valeur des quatres limites de l'énoncé. □

Proposition 8.29. *La fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque, appelée Argument sh et notée* $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est impaire, strictement croissante et dérivable. De plus,*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Argsh}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 \,+\, x^2}} \tag{8.29}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Argsh}\,(x) \;=\; -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argsh}\,(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.30}$$

La restriction de la fonction ch à l'intervalle $\mathbb{R}^+$ est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $[1; +\infty[$. Sa bijection réciproque, appelée Argument ch et notée $\mathrm{Argch} : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$*, est strictement croissante, continue sur $[1; +\infty]$ et dérivable sur $]1; +\infty[$. De plus,*

$$\forall\, x \in]1; +\infty[\,, \quad \mathrm{Argch}'(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2 \,-\, 1}} \tag{8.31}$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argch}\,(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.32}$$

Enfin, on a

$$\forall\, y \in \mathbb{R}\,, \quad \mathrm{Argsh}\,(y) \;=\; \ln\Big(y \,+\, \sqrt{y^2 \,+\, 1}\Big) \tag{8.33}$$

et

$$\forall\, y \in [1; +\infty[\,, \quad \mathrm{Argch}\,(y) \;=\; \ln\Big(y \,+\, \sqrt{y^2 \,-\, 1}\Big)\,. \tag{8.34}$$

Preuve : Par la proposition 8.28, sh est continue et strictement croissante. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{sh}(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque Argsh est continue, strictement croissante sur $\mathrm{sh}(\mathbb{R})$, par la proposition 7.3.
D'après les limites de sh dans (8.28), on déduit de la proposition 7.4 que $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Comme la dérivée ch de sh ne s'annule pas (cf. proposition 8.28), on déduit de la proposition 7.5 que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Argsh}'(x) \;=\; \frac{1}{\mathrm{sh}'\big(\mathrm{Argsh}\,(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\mathrm{ch}\,\big(\mathrm{Argsh}\,(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 \,+\, \big(\mathrm{sh}\,\big(\mathrm{Argsh}\,(x)\big)\big)^2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 \,+\, x^2}}\,,$$

par la proposition 8.28.
Pour $x \in \mathbb{R}$, puisque sh est impaire (cf. proposition 8.28), $\mathrm{sh}\,(-\mathrm{Argsh}\,(x)) = -\mathrm{sh}\,(\mathrm{Argsh}\,(x)) = -x$ donc $-\mathrm{Argsh}\,(x)$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathrm{sh}\,(t) = -x$, dont l'unique solution est $\mathrm{Argsh}\,(-x)$ d'après la bijectivité de sh de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 9.2). D'où $\mathrm{Argsh}\,(-x) = -\mathrm{Argsh}\,(x)$. On a montré que Argsh est impaire.
Comme Argsh est strictement croissante, on a, par la proposition 4.38,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{Argsh}\,(x) \;=\; \inf \mathrm{Argsh}\,(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argsh}\,(x) \;=\; \sup \mathrm{Argsh}\,(\mathbb{R})$$

et comme $\mathrm{Argsh}\,(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$, puisque Argsh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on obtient (8.30).
Par la proposition 8.28, ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle est donc bijective de $\mathbb{R}^+$

sur $\mathrm{ch}(\mathbb{R}^+)$ et sa bijection réciproque Argsh est continue, strictement croissante sur $\mathrm{ch}(\mathbb{R}^+)$, par la proposition 7.3.
D'après la limite en $+\infty$ de ch dans (8.28) et d'après le fait que ch est continue, on déduit de la proposition 7.4 que $\mathrm{ch}(]0;+\infty[) =]1;+\infty[$. Donc $\mathrm{ch}(\mathbb{R}^+) = \{\mathrm{ch}(0)\} \cup \mathrm{ch}(]0;+\infty[) = [1;+\infty[$.
Comme la dérivée sh de ch ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, on déduit de la proposition 7.5 que Argch est dérivable sur $\mathrm{ch}(]0;+\infty[) =]1;+\infty[$ et que, pour $x > 1$,

$$\mathrm{Argch}'(x) \;=\; \frac{1}{\mathrm{ch}'\big(\mathrm{Argch}(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\mathrm{sh}\big(\mathrm{Argch}(x)\big)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\big(\mathrm{ch}\big(\mathrm{Argch}(x)\big)\big)^2 - 1}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,,$$

par la proposition 8.28.
Comme Argch est strictement croissante, on a, par la proposition 4.38,

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argch}(x) \;=\; \sup \mathrm{Argch}\big([1;+\infty[\big)$$

et comme $\mathrm{Argch}([1;+\infty[)$ est $\mathbb{R}^+$, puisque Argch est bijective de $[1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$, on obtient (8.32).
Soit $y \in \mathbb{R}$. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle (cf. proposition 8.2),

$$\mathrm{sh}(x) \;=\; y \iff e^x - e^{-x} \;=\; 2y \iff \big(e^x\big)^2 - 2y\cdot e^x - 1 \;=\; 0\,.$$

Comme l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^2 - 2yz - 1 = 0$ admet pour solution $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ et $y + \sqrt{y^2+1} > 0$ et comme $e^x > 0$, on a donc

$$\mathrm{sh}(x) \;=\; y \iff e^x \;=\; y + \sqrt{y^2+1} \iff x \;=\; \ln\Big(y + \sqrt{y^2+1}\Big)\,,$$

d'après la bijectivité de l'exponentielle réelle. Comme l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathrm{sh}(x) = y$ est $\mathrm{Argsh}(y)$, on obtient (8.33).
Soit $y \in [1;+\infty[$. On a, pour $x \in \mathbb{R}^+$, d'après les propriétés de l'exponentielle réelle (cf. proposition 8.2),

$$\mathrm{ch}(x) \;=\; y \iff e^x + e^{-x} \;=\; 2y \iff \big(e^x\big)^2 - 2y\cdot e^x + 1 \;=\; 0\,.$$

L'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^2 - 2yz + 1 = 0$ admet pour solution $y - \sqrt{y^2-1}$ et $y + \sqrt{y^2-1}$. Si $y = 1$, on a une solution double $y - \sqrt{y^2-1} = y + \sqrt{y^2-1} = y = 1$ et, si $y > 1$, on a $y - \sqrt{y^2-1} < 1$ et $y + \sqrt{y^2-1} > 1$. Comme, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x \geq e^0 = 1$, on a donc

$$\mathrm{ch}(x) \;=\; y \iff e^x \;=\; y + \sqrt{y^2-1} \iff x \;=\; \ln\Big(y + \sqrt{y^2-1}\Big)\,,$$

d'après la bijectivité de l'exponentielle réelle. Comme l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ donnée par $\mathrm{ch}(x) = y$ est $\mathrm{Argch}(y)$, on obtient (8.34). □

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsh}(\mathrm{sh}(x)) = x = \mathrm{sh}(\mathrm{Argsh}(x))$. On a aussi, pour tout $x \geq 1$, $\mathrm{ch}(\mathrm{Argch}(x)) = x$. Attention : on a, certes, pour tout $x \geq 0$, $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) = x$ mais, pour $x < 0$, $\mathrm{Argch}(\mathrm{ch}(x)) \neq x$ car Argch est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Définition 8.30. *On appelle tangente hyperbolique la fonction th* : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x \in \mathbb{R}$, $th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$. *On appelle cotangente hyperbolique la fonction* $\coth : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par, pour* $x \in \mathbb{R}^*$, $\coth(x) = \dfrac{ch(x)}{sh(x)}$.

Proposition 8.31. *La fonction th est impaire, strictement croissante et de classe* C^1. *On a*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad th'(x) \;=\; 1 - \big(th(x)\big)^2 \;=\; \frac{1}{\big(ch(x)\big)^2}\,.$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} th(x) \;=\; -1 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} th(x) \;=\; 1\,. \tag{8.35}$$

La fonction th est bijective de $\mathbb{R}$ *sur* $]-1;1[$*. Sa bijection réciproque, appelée argument th et notée* $\mathrm{Argth}:]-1;1[\longrightarrow\mathbb{R}$*, est impaire, strictement croissante et dérivable. De plus,*

$$\forall\, x\in]-1;1[\,,\quad \mathrm{Argth}'(x) \;=\; \frac{1}{1-x^2} \tag{8.36}$$

et

$$\lim_{x\to-1} \mathrm{Argth}\,(x) \;=\; -\infty \quad et \quad \lim_{x\to1} \mathrm{Argth}\,(x) \;=\; +\infty\,. \tag{8.37}$$

La fonction coth *est impaire. Elle est de classe* C^1 *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^{-*}$*. Elle est de classe* C^1 *et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}^{+*}$*. On a*

$$\forall\, x\in\mathbb{R}^*\,,\quad \coth'(x) \;=\; 1-\big(\coth(x)\big)^2 \;=\; \frac{-1}{\big(sh(x)\big)^2}\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\coth(x) \;=\; -1\,,\ \lim_{x\to0^-}\coth(x) \;=\; -\infty\,,\ \lim_{x\to0^+}\coth(x) \;=\; +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\coth(x) \;=\; 1\,. \tag{8.38}$$

La fonction coth *est bijective de* $\mathbb{R}^{+*}$ *sur* $]1;+\infty[$*. Sa bijection réciproque, appelée argument* coth *et notée* $\mathrm{Argcoth}:]1;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^{+*}$*, est strictement décroissante et dérivable. De plus,*

$$\forall\, x\in]1;+\infty[\,,\quad \mathrm{Argcoth}'(x) \;=\; \frac{1}{1-x^2} \tag{8.39}$$

et

$$\lim_{x\to1} \mathrm{Argcoth}\,(x) \;=\; +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argcoth}\,(x) \;=\; 0\,. \tag{8.40}$$

Enfin, on a

$$\forall\, y\in]-1;1[\,,\quad \mathrm{Argth}\,(y) \;=\; \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) \tag{8.41}$$

et

$$\forall\, y\in]1;+\infty[\,,\quad \mathrm{Argcoth}\,(y) \;=\; \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\,. \tag{8.42}$$

Preuve : Par la proposition 8.28, sh est impaire et ch est paire, donc th et coth sont impaires. Comme sh et ch sont de classe C^1, il en est de même de th sur $\mathbb{R}$ et de coth sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$, par la proposition 6.20. De plus, on a, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{th}'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}(x)} - \mathrm{sh}(x)\cdot\frac{-1}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2}\cdot\mathrm{sh}(x) \;=\; 1-\big(\mathrm{th}(x)\big)^2\\ &=\; \frac{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2-\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2} \;=\; \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2} \;>\; 0\end{aligned}$$

et, pour $x\in\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\coth'(x) \;&=\; \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{sh}(x)} - \mathrm{ch}(x)\cdot\frac{-1}{\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2}\cdot\mathrm{ch}(x) \;=\; 1-\big(\coth(x)\big)^2\\ &=\; \frac{\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2-\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2}{\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2} \;=\; \frac{-1}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2} \;<\; 0\,.\end{aligned}$$

Comme th est continue (cf. proposition 6.20) et strictement croissante (cf. corollaire 6.15), elle est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{th}(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque Argth est continue et strictement croissante sur $\mathrm{th}(\mathbb{R})$, par la proposition 7.3.

Comme $|\mathrm{sh}| < \mathrm{ch}$ partout (cf. proposition 8.28), on a $\mathrm{th}(\mathbb{R}) \subset]-1;1[$ donc th est bornée. Comme th est croissante, les limites $\ell_- = \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x)$ et $\ell_+ = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x)$ existent dans $\mathbb{R}$ et vérifient $\ell_- \leq \mathrm{th}(0) = 0 \leq \ell_+$ (cf. proposition 4.38). Par (8.28) et la proposition 4.37, on peut passer à la limite $x \to -\infty$ et à la limite $x \to +\infty$ dans l'égalité suivante, vue plus haut et valable pour $x \in \mathbb{R}$,

$$1 - \big(\mathrm{th}(x)\big)^2 = \frac{1}{\big(\mathrm{ch}(x)\big)^2}\,.$$

On obtient $1 - \ell_-^2 = 0$ et $1 - \ell_+^2 = 0$. Comme $\ell_- \leq 0$ et $\ell_+ \geq 0$, on a $\ell_- = -1$ et $\ell_+ = 1$. Par la proposition 7.4, on en déduit que $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$.
Pour $x \in]-1;1[$, on a $-x \in]-1;1[$ et, d'après l'imparité de th, $\mathrm{th}(-\mathrm{Argth}(x)) = -\mathrm{th}(\mathrm{Argth}(x)) = -x$. Donc $-\mathrm{Argth}(x)$ est solution de l'équation d'inconnue $t \in \mathbb{R}$ donnée par $\mathrm{th}(t) = -x$, dont l'unique solution est $\mathrm{Argth}(-x)$ d'après la bijectivité de th de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. Donc $\mathrm{Argth}(-x) = -\mathrm{Argth}(x)$. On a montré que Argth est impaire.
Comme la dérivée de th ne s'annule pas, Argth est dérivable, par la proposition 7.5. De plus, pour $x \in \mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$,

$$\mathrm{Argth}'(x) = \frac{1}{\mathrm{th}'\big(\mathrm{Argth}(x)\big)} = \frac{1}{1 - \big(\mathrm{th}\big(\mathrm{Argth}(x)\big)\big)^2} = \frac{1}{1-x^2}\,.$$

Comme coth est continue (cf. proposition 6.20) et strictement décroissante (cf. corollaire 6.15) sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\coth(\mathbb{R}^{+*})$ et sa bijection réciproque Argcoth est continue et strictement décroissante sur $\coth(\mathbb{R}^{+*})$, par la proposition 7.3.
Comme coth est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, les limites $\ell_0 = \lim\limits_{x\to0^+} \coth(x)$ et $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \coth(x)$ existent et vérifient $\ell_0 \geq \coth(1) \geq \ell \geq 0$ (cf. propositions 4.38 et 4.39). Par (8.28) et la proposition 4.37, on peut passer à la limite $x \to 0^+$ et à la limite $x \to +\infty$ dans l'égalité, vue plus haut et valable pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$1 - \big(\coth(x)\big)^2 = \frac{1}{\big(\mathrm{sh}(x)\big)^2}\,.$$

Si ℓ_0 était réel, on aurait $1 - \ell_0^2 = +\infty$. Contradiction. Donc $\ell_0 = +\infty$. Comme ℓ est réel, on obtient $1 - \ell^2 = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 1$. Par la proposition 7.4, on en déduit que $\coth(\mathbb{R}^{+*}) =]-1;+\infty[$.
Comme coth est impaire, comme $\lim\limits_{t\to0}(-t) = 0$, comme $\lim\limits_{t\to-\infty}(-t) = +\infty$, on a, par composition et produit (cf. propositions 4.28, 4.32 et 4.37),

$$\lim_{x\to0^-} \coth(x) = -\ell_0 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \coth(x) = -\ell = -1\,.$$

Comme la dérivée de coth ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, Argcoth est dérivable sur $\coth(\mathbb{R}^{+*}) =]-1;+\infty[$, par la proposition 7.5. De plus, pour $x \in]-1;+\infty[$,

$$\mathrm{Argcoth}'(x) = \frac{1}{\coth'\big(\mathrm{Argcoth}(x)\big)} = \frac{1}{1 - \big(\coth\big(\mathrm{Argcoth}(x)\big)\big)^2} = \frac{1}{1-x^2}\,.$$

Comme Argcoth est décroissante, on a, par les propositions 4.38 et 4.39,

$$\lim_{x\to1} \mathrm{Argcoth}(x) = \sup \mathbb{R}^{+*} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{Argcoth}(x) = \inf \mathbb{R}^{+*} = 0\,.$$

Soit $y \in]-1;1[$. On note que $1 - y > 0$ et $1 + y > 0$. D'après les propriétés de l'exponentielle réelle (cf. propositions 8.2 et 8.8), on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{th}(x) = y &\iff e^x - e^{-x} = y\cdot\big(e^x + e^{-x}\big) \iff e^{2x} - 1 = y\cdot\big(e^{2x} + 1\big)\\ &\iff e^{2x}\cdot(1-y) = 1+y \iff e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \iff x = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\,.\end{aligned}$$

Comme l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donnée par $\mathrm{th}(x) = y$ est $\mathrm{Argth}(y)$ (cf. proposition 9.2), on obtient (8.41).

Soit $y \in]1;+\infty[$. On note que $y+1>0$ et $y-1>0$. D'après les propriétés de l'exponentielle réelle (cf. propositions 8.2 et 8.8), on a, pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\begin{aligned}\coth(x) \;=\; y \;&\iff e^x + e^{-x} \;=\; y\cdot\left(e^x - e^{-x}\right) \iff e^{2x}+1 \;=\; y\cdot\left(e^{2x}-1\right)\\ &\iff e^{2x}\cdot(1-y) \;=\; -1-y \iff e^{2x} \;=\; \frac{y+1}{y-1} \iff x \;=\; \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right).\end{aligned}$$

Comme l'unique solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donnée par $\coth(x)=y$ est $\operatorname{Argcoth}(y)$ (cf. proposition 9.2), on obtient (8.42). □

On détermine maintenant la régularité des fonctions hyperboliques.

Proposition 8.32. *On a les régularités C^∞ suivantes :*

1. *Les fonctions* sh *et* ch *sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*
2. *La fonction* th *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ tandis que la fonction* coth *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$.*
3. *La fonction* Argsh *est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et la fonction* Argch *est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.*
4. *La fonction* Argth *est de classe C^∞ sur $]-1;1[$ et la fonction* Argcoth *est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.*

Preuve :

1. La fonction polynôme $\mathbb{R} \ni x \mapsto -x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (cf. proposition 6.33). Comme la fonction exponentielle réelle exp est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t)=\exp(-t)$, par composition (cf. proposition 6.32). D'après cette proposition 6.32, il en est de même de $\mathrm{sh} = (\exp - g)/2$ et $\mathrm{ch} = (\exp + g)/2$.
2. Soit $J=\mathbb{R}^{+*}$ ou $J=\mathbb{R}^{-*}$. Comme $\mathrm{th} = \mathrm{sh}/\mathrm{ch}$ sur $\mathbb{R}$ et $\coth = \mathrm{ch}/\mathrm{sh}$ sur J, on déduit du 2 et de la proposition 6.32 que th est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et coth est de classe C^∞ sur J.
3. Par le 1, on peut appliquer le corollaire 7.7 à sh et ch. Cela montre que Argsh est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\mathrm{sh})$ et que Argch est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\mathrm{ch})$. Comme $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ ne s'annule pas, $\mathcal{P}(\mathrm{sh})=\mathbb{R}$ et Argsh est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathrm{ch}) \;&=\; \left\{y \in \mathrm{ch}\left([0;+\infty[\right);\quad \mathrm{ch}'\left(\operatorname{Argch}(y)\right) \neq 0\right\}\\ &=\; \left\{y \in \mathrm{ch}\left([0;+\infty[\right);\quad \mathrm{sh}\left(\operatorname{Argch}(y)\right) \neq 0\right\}\\ &=\; \left\{y \in [1;+\infty[;\quad \operatorname{Argch}(y) \neq 0\right\} \;=\;]1;+\infty[\,.\end{aligned}$$

   Donc Argch est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$.
4. Par le 2, on peut appliquer le corollaire 7.7 à th et coth. Cela montre que Argth est de classe C^∞ sur tout intervalle I non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\mathrm{th})$ et que Argcoth est de classe C^∞ sur tout intervalle J non réduit à un point et inclu dans $\mathcal{P}(\coth)$. Comme th' ne s'annule pas, $\mathcal{P}(\mathrm{th}) =]-1;1[$ et Argth est de classe C^∞ sur $]-1;1[$. Comme $\coth'$ ne s'annule pas, $\mathcal{P}(\coth) =]1;+\infty[$ et Argcoth est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$. □

8.6 Fonctions plates.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la question suivante. Existe-t-il des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ qui sont constantes sur certains intervalles ? On va voir que la réponse est positive sous réserve de bien choisir les intervalles. On appelera de telles fonctions des fonctions "plates". En particulier, il existe de telles fonctions qui sont non nulles et nulles en dehors d'un segment de longueur strictement positive. Il se trouve que ce dernier point est important pour la théorie des distributions.

On considère la fonction g définie par

$$\begin{array}{rccll} g & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & & x & \mapsto & e^{-1/x} & \text{si } x > 0\,, \\ & & & & 0 & \text{si } x \leq 0\,. \end{array} \tag{8.43}$$

Proposition 8.33. *La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sa dérivée n-ième $g^{(n)}$ est nulle sur $]-\infty;0]$.*

Preuve : La restriction g_- de g à $]-\infty;0[$ est la fonction nulle donc est de classe C^∞ (cf. propositions 6.18 et 6.26). Comme l'exponentielle est de classe C^∞ et l'application $]0;+\infty[\ni x \mapsto x$ est aussi de classe C^∞, on déduit de la proposition 6.32 que la restriction g_+ de g à $]0;+\infty[$ est de classe C^∞. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition suivante : il existe une fonction polynôme P_n de degré inférieur à $2n$ telle que, pour tout $x > 0$, $g_+^{(n)}(x) = P_n(1/x)g_+(x)$.
En prenant pour P_0 la fonction polynôme constante égale à 1, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour $x > 0$, $g_+^{(n)}(x) = P_n(1/x)g_+(x)$. En dérivant de part et d'autre de l'égalité et en utilisant les propositions 6.8 et 6.9, on obtient, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} g_+^{(n+1)}(x) &= \big(g_+^{(n)}\big)'(x) = P_n'\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot g_+(x) + P_n\Big(\frac{1}{x}\Big)(g_+)'(x) \\ &= P_n'\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot g_+(x) + P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot g_+(x) \\ &= P_{n+1}\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot g_+(x)\,, \end{aligned}$$

où P_{n+1} est la fonction polynôme définie par $P_{n+1}(t) = t^2(P_n(t) - P_n'(t))$. On remarque que son degré est au plus $2n+2 = 2(n+1)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour $t > 0$ et des coefficients $(a_k^{(n)})_{k \in [\![0;2n]\!]} \in \mathbb{R}^{2n+1}$,

$$P_n(t) \cdot e^{-t} = e^{-t} \cdot \sum_{k=0}^{2n} a_k^{(n)} \cdot t^k = t^{2n} e^{-t} \cdot \sum_{k=0}^{2n} a_k^{(n)} \cdot \Big(\frac{1}{t}\Big)^{2n-k}$$

avec, pour $k \in [\![0;2n[\![$,

$$\lim_{t \to +\infty} \Big(\frac{1}{t}\Big)^{2n-k} = 0\,, \ \lim_{t \to +\infty} t^{2n} e^{-t} = 0\,,$$

d'après les propositions 4.32 et 8.8. Donc, par produit (cf. proposition 4.32), $\lim\limits_{t \to +\infty} P_n(t) \cdot e^{-t} = 0$. Par la proposition 4.21 et par composition (cf. proposition 4.28),

$$\lim_{x \to 0} g_+^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0^+} g_+^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0^+} P_n\Big(\frac{1}{x}\Big) \cdot g_+(x) = 0\,.$$

Par ailleurs, g_- est la fonction nulle sur $]-\infty;0[$. Par la remarque 6.30, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_-^{(n)} = 0$ sur $]-\infty;0[$. Donc $\lim\limits_0 g_-^{(n)} = 0$ (cf. proposition 4.23). On peut donc appliquer la proposition 6.34 à $g_{|\mathbb{R}^*}$ (avec $a = 0$). Le prolongement par continuité $\hat{g}$ de $g_{|\mathbb{R}^*}$ en 0 est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{g}^{(n)}(0) = 0$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{g}^{(n)}$ est nulle sur $]-\infty;0]$. Comme $g(0) = 0 = \hat{g}(0)$ et $g_{|\mathbb{R}^*} = \hat{g}_{|\mathbb{R}^*}$, on a $g = \hat{g}$. On en déduit que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}$ est nulle sur $]-\infty;0]$. □

Proposition 8.34. *Les fonctions g et g' sont positives sur $\mathbb{R}$. De plus, on a les équivalences*

$$\Big(\big(g(x) > 0\big) \iff \big(x > 0\big)\Big) \quad \textit{et} \quad \Big(\big(g'(x) > 0\big) \iff \big(x > 0\big)\Big)\,.$$

Preuve : D'après la définition de g, g est nulle sur $]-\infty;0]$ et, pour $x>0$, $g(x)>0$, puisque l'exponentielle réelle est strictement positive (cf. (8.5)). Ceci démontre la première équivalence et le fait que g est positive. Par la preuve de la proposition 8.33, g' est nulle sur $]-\infty;0]$ et, pour $x>0$, $g'(x)=(1/x^2)g(x)>0$, par (8.5). Ceci montre la seconde équivalence et le fait que g' est positive. □

Peut-on construire une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui est nulle sur un voisinage de $-\infty$ et égale à 1 sur un voisinage de $+\infty$? Oui !
Étant donnés $d_1<d_2$ dans $\mathbb{R}$, on souhaite construire une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que f soit nulle sur $]-\infty;d_1]$ et égale à 1 sur $[d_2;+\infty[$.

Proposition 8.35. *Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donnée par, pour $x\in\mathbb{R}$,*

$$f(x) \;=\; \frac{g\big(x-d_1\big)}{g\big(d_2-x\big)\;+\;g\big(x-d_1\big)}\,,$$

où g est la fonction définie en (8.43)*. La fonction f est bien définie et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est minorée par* 0*, majorée par* 1*, f' est minorée par* 0 *et on a les propriétés suivantes :*

$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\;\big(f(x)=1\big)\iff\big(x\geq d_2\big)\,, \tag{8.44}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\;\big(f(x)=0\big)\iff\big(x\leq d_1\big)\,, \tag{8.45}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\;\big(f'(x)=0\big)\iff\big(x\leq d_1\;\textit{ou}\;x\geq d_2\big)\,, \tag{8.46}$$
$$\forall x\in\mathbb{R}\,,\;\big(f'(x)>0\big)\iff\big(x\in]d_1;d_2[\big)\,, \tag{8.47}$$

Preuve : On vérifie d'abord que f est bien définie. On doit vérifier que le dénominateur dans l'expression de $f(x)$ ne s'annule pour aucun x. Par la proposition 8.34, ce dénominateur est la somme de deux termes partout positifs. Il est donc positif et, s'il s'annulait en x_0, on aurait forcément $g(x_0-d_1)=0=g(d_2-x_0)$, donc, d'après la proposition 8.34, $x_0-d_1\leq 0$ et $d_2-x_0\leq 0$, ce qui implique $d_2\leq x_0\leq d_1$, contredisant l'hypothèse $d_2>d_1$. Donc f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Comme g et les fonctions polynômiales sont de classe C^∞ (cf. propositions 8.33 et 6.33), f est de classe C^∞ par composition, somme et quotient (cf. proposition 6.32). D'après la positivité de g (cf. proposition 8.34), on a, pour $x\in\mathbb{R}$, $0\leq g(x-d_1)\leq g(x-d_1)+g(d_2-x)$ avec $g(x-d_1)+g(d_2-x)>0$, donc, par division, $0\leq f(x)\leq 1$. Par (6.4) et la proposition 6.9, on a, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) \;=\; \frac{g'\big(x-d_1\big)\cdot g\big(d_2-x\big)\;+\;g\big(x-d_1\big)\cdot g'\big(d_2-x\big)}{\big(g\big(d_2-x\big)\;+\;g\big(x-d_1\big)\big)^2}\;\geq\;0\,,$$

d'après la proposition 8.34. Soit $x\in\mathbb{R}$. En utilisant la proposition 8.34, on a

$$f(x)=1\iff g(x-d_1)=g(d_2-x)+g(x-d_1)\iff g(d_2-x)=0\iff d_2\leq x\,,$$
$$f(x)=0\iff g(x-d_1)=0\iff x\leq d_1\,,$$

$$\begin{aligned} f'(x)=0 &\iff \big(g'(x-d_1)\cdot g(d_2-x)=0\quad\text{et}\quad g(x-d_1)\cdot g'(d_2-x)=0\big)\\ &\iff \big(x\leq d_1\quad\text{ou}\quad x\geq d_2\big)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x)>0 &\iff \big(g'(x-d_1)\cdot g(d_2-x)>0\quad\text{ou}\quad g(x-d_1)\cdot g'(d_2-x)>0\big)\\ &\iff \big(x>d_1\quad\text{et}\quad x<d_2\big)\,.\end{aligned}$$

On a montré (8.44), (8.45), (8.46) et (8.47). □

Essayons maintenant de construire une fonction C^∞ avec trois plateaux, deux à 0 séparés par un à 1.
Soit $d_1<d_2<d_3<d_4$. On veut construire une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que f soit égale à 1 sur $[d_2;d_3]$ et soit nulle en dehors de $[d_1;d_4]$. Pour ce faire, on remarque d'abord que, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$\Big(\big((x-d_2)\cdot(x-d_3)\;\leq\;0\big)\quad\iff\quad\big(d_2\leq x\leq d_3\big)\Big) \tag{8.48}$$
$$\text{et}\quad\Big(\big(-(x-d_1)\cdot(x-d_4)\;\leq\;0\big)\iff\quad\big(x\leq d_1\;\text{ou}\;x\geq d_4\big)\Big)\,. \tag{8.49}$$

Proposition 8.36. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) \;=\; \frac{g\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big)}{g\big((x-d_2)(x-d_3)\big) \,+\, g\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big)}\,,$$

où g est la fonction définie en (8.43)*. La fonction f est bien définie et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est minorée par* 0*, majorée par* 1 *et on a les propriétés suivantes :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(f(x) = 1\big) \iff \big(x \in [d_2; d_3]\big)\,, \tag{8.50}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(f(x) = 0\big) \iff \big(x \notin]d_1; d_4[\big)\,. \tag{8.51}$$

Dans le cas où $(d_1 + d_4)/2 \in [d_2; d_3]$, on a aussi les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(f'(x) = 0\big) \iff \big(x \in [d_2; d_3] \text{ ou } x \notin]d_1; d_4[\big)\,, \tag{8.52}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(f'(x) > 0\big) \iff \big(x \in]d_1; d_2[\big)\,, \tag{8.53}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \big(f'(x) < 0\big) \iff \big(x \in]d_3; d_4[\big)\,. \tag{8.54}$$

Preuve : Par la proposition 8.34, pour $x \in \mathbb{R}$, le terme $g\big((x-d_2)(x-d_3)\big) + g\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big) \geq 0$ et s'il était nul, on aurait $(x-d_2)(x-d_3) \leq 0$ et $-(x-d_1)(x-d_4) \leq 0$ c'est-à-dire, par (8.48) et (8.49), à la fois $x \leq d_1$ et $x \geq d_2$, ce qui contredit l'hypothèse $d_1 < d_2$. Donc f est bien définie.
Comme g et les fonctions polynômiales sont de classe C^∞ (cf. propositions 8.33 et 6.33), f est de classe C^∞ par composition, somme et quotient (cf. proposition 6.32). D'après la positivité de g (cf. proposition 8.34), on a, pour $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq g\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big) \leq g\big((x-d_2)(x-d_3)\big) + g\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big)$ avec la propriété $g\big((x-d_2)(x-d_3)\big) + g\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big) > 0$ donc $0 \leq f(x) \leq 1$, par division.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g_1(x) = g\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big)$ et $g_2(x) = g\big((x-d_2)(x-d_3)\big)$ de sorte que $f(x) = g_1(x)/(g_1(x) + g_2(x))$. Par la proposition 8.34, on a

$$f(x) = 1 \iff g_1(x) = g_1(x) + g_2(x) \iff g_2(x) = 0 \iff x \in [d_2; d_3]$$

d'après (8.48). On a montré (8.50). On a de même

$$f(x) = 0 \iff g_1(x) = 0 \iff x \notin]d_1; d_4[$$

d'après (8.49). On a montré (8.51).
Par (6.4) et la proposition 6.9, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) \;=\; \frac{g_1'(x)\cdot g_2(x) \,-\, g_1(x)\cdot g_2'(x)}{\big(g_1(x) \,+\, g_2(x)\big)^2}$$

$$\;=\; -\,\frac{g'\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big)g_2(x)(2x-d_1-d_4) + g_1(x)g'\big((x-d_2)(x-d_3)\big)(2x-d_2-d_3)}{\big(g_1(x) \,+\, g_2(x)\big)^2}\,.$$

Par la proposition 8.34, on a, pour $x \leq d_1$, $g\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big) = 0$ et $g'\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big) = 0$ donc $f'(x) = 0$. De même, ceci est vrai lorsque $x \geq d_4$. Pour $x \in [d_2; d_3]$, $g\big((x-d_2)(x-d_3)\big) = 0$ et $g'\big((x-d_2)(x-d_3)\big) = 0$ donc $f'(x) = 0$.
Pour $x \in]d_1; d_2[\cup]d_3; d_4[$, on a $g_1(x) > 0$, $g_2(x) > 0$,

$$g'\big(-(x-d_1)(x-d_4)\big) \;=\; \frac{1}{(x-d_1)^2(x-d_4)^2}\cdot g_1(x) \;>\; 0$$

et

$$g'\big((x-d_2)(x-d_3)\big) \;=\; \frac{1}{(x-d_2)^2(x-d_3)^2}\cdot g_2(x) \;>\; 0\,,$$

donc

$$f'(x) \;=\; -\,\frac{g_1(x)\cdot g_2(x)}{\big(g_1(x)\,+\,g_2(x)\big)^2}\cdot\left(\frac{2x-d_1-d_4}{(x-d_1)^2(x-d_4)^2}\,+\,\frac{2x-d_2-d_3}{(x-d_2)^2(x-d_3)^2}\right)$$

On suppose maintenant que $(d_1+d_4)/2 \in [d_2;d_3]$. Pour $x \in]d_1;d_2[$, on a $2x-d_1-d_4<0$ et $2x-d_2-d_3<0$ donc $f'(x)>0$. Pour $x\in]d_3;d_4[$, on a $2x-d_1-d_4>0$ et $2x-d_2-d_3>0$ donc $f'(x)<0$. On a montré (8.52), (8.53) et (8.54). □

Une situation courante est la suivante : Soit $0<a<b$. On veut construire une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que f soit égale à 1 sur $[-a;a]$ et soit nulle en dehors de $[-b;b]$.

Proposition 8.37. *Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donnée par, pour $x\in\mathbb{R}$,*

$$f(x) \;=\; \frac{g\big(b^2-x^2\big)}{g\big(x^2-a^2\big)\,+\,g\big(b^2-x^2\big)}\,,$$

où g est la fonction définie en (8.43)*. La fonction f est bien définie et est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est paire, minorée par* 0*, majorée par* 1 *et on a les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \big(f(x)=1\big) \iff \big(x\in[-a;a]\big)\,,\\
&\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \big(f(x)=0\big) \iff \big(x\notin]-b;b[\big)\,,\\
&\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \big(f'(x)=0\big) \iff \big(x\in[-a;a]\ \textit{ou}\ x\notin]-b;b[\big)\,,\\
&\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \big(f'(x)>0\big) \iff \big(x\in]-b;-a[\big)\,,\\
&\forall x\in\mathbb{R}\,,\ \big(f'(x)<0\big) \iff \big(x\in]a;b[\big)\,.
\end{aligned}$$

Preuve : Il suffit d'appliquer la proposition 8.36 avec $d_1=-b$, $d_2=-a$, $d_3=a$ et $d_4=b$, en notant que $(d_1+d_4)/2=0\in[-a;a]=[d_2;d_3]$. □

9 Compléments.

Dans ce chapitre, on rassemble et on démontre des résultats basiques (mais pas forcément simples) dont on se sert dans les autres chapitres du cours. En particulier, on traite la difficulté concernant les relations de récurrence, que l'on a rencontrée dans la proposition 3.2, et on procède à une construction rigoureuse de la fonction exponentielle complexe, introduite dans la partie 8.1.

9.1 Ensembles, applications, bijections.

Dans ce paragraphe, on établit des propriétés de base sur les ensembles, les injections, les sujections, les bijections, les parties de $\mathbb{Z}$. On construit aussi les fonctions racine carrée et module et on en donne des propriétés. La construction de la fonction racine carrée présentée ici est différente de celle donnée par la proposition 8.13.

9.1.1 Injection, surjection, bijection.

On introduit ici les notions d'injection, de surjection et de bijection. On montre quelques propriétés basiques sur ces notions. En particulier, on montre des résultats annoncés dans le paragraphe 1.1.

Définition 9.1. *Soit E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.*
On dit que f est injective si

$$\forall\,(x;x') \in E^2\,, \quad \big((f(x) = f(x')) \implies (x = x')\big)\,. \tag{9.1}$$

On dit que f est est surjective si

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists\, x \in E\,; \quad y = f(x)\,. \tag{9.2}$$

On dit que f est bijective si f est injective et f est surjective.

On a les propriétés suivantes.

Proposition 9.2. *Soit E, F et G trois ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.*

1. *Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective.*
4. *f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*
5. *f est bijective si et seulement si*

$$\forall\, y \in F\,, \quad \exists !\, x \in E\,; \quad y = f(x)\,. \tag{9.3}$$

6. *f est bijective si et seulement s'il existe une application $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$.*
7. *Si f est bijective alors il existe une unique fonction $h : F \longrightarrow E$ vérifiant $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$. Cette fonction h associe, à chaque $y \in F$, l'unique solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$.*
8. *Si f est injective alors l'application $\tilde{f} : E \longrightarrow f(E)$ définie par, pour $x \in E$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, est bijective.*

Preuve :

1. On suppose f et g injectives et on montre que $g \circ f$ est injective en utilisant (7.1) avec f remplacée par $g \circ f$.
   Soit $(x;x') \in E^2$ tel que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. On a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injective, on en déduit que $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on en déduit que $x = x'$. On a montré que $g \circ f$ est injective.
2. On suppose f et g surjectives et on montre que $g \circ f$ est surjective en utilisant (7.2) avec f remplacée par $g \circ f$.
   Soit $y \in G$. Comme g est surjective, il existe $z \in F$ tel que $g(z) = y$. Comme f est surjective et $z \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z$. On a donc $y = g(z) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. On a montré que $g \circ f$ est surjective.
3. Par définition de la bijectivité, il suffit d'appliquer 1 et 2.
4. Par définition de f, on a $f(E) \subset F$. On a donc

$$\big(f(E) = F\big) \iff \big(F \subset f(E)\big) \iff \big(\forall\, y \in F\,, y \in f(E)\big) \iff \big(\forall\, y \in F\,, \exists\, x \in E\,;\; y = f(x)\big)\,.$$

5. On montre les deux implications.
   $\Longrightarrow$) : On suppose f bijective. Soit $y \in F$. On considère l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$. Comme f est surjective, cette équation a au moins une solution. Si x et x' sont des solutions de cette équation alors, $f(x) = y = f(x')$. Comme f est injective, $x = x'$. On a montré (9.3).
   $\Longleftarrow$) : On suppose (9.3) vraie. Soit $(x_1;x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. Soit $y = f(x_1) = f(x_2) \in$

F. Les éléments x_1 et x_2 de E sont donc des solutions de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$. Par (9.3), cette équation a une unique solution donc $x_1 = x_2$. On a montré que f est injective.
Pour $y \in F$, on sait, par (9.3), qu'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On a montré que (7.2) est vraie donc que f est surjective.
On a montré que f est bijective.

6. On montre les deux implications.
$\Longrightarrow$) : On suppose f bijective. Soit $y \in F$. D'après le 5 et (9.3), l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$ a une unique solution que l'on note $h(y)$. On construit ainsi une application $h : F \longrightarrow E$.
Pour $y \in F$, on a, par définition de $h(y)$, $f(h(y)) = y$. On a montré que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$.
Pour $x_1 \in E$, soit $y = f(x_1)$. Comme x_1 est solution de l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, on a $x_1 = h(y)$ donc $x_1 = h(f(x_1))$. On a montré que $h \circ f = \mathrm{Id}_E$.
$\Longleftarrow$) : On suppose qu'il existe une application $h : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$. Soit $y \in F$. Comme $y = (f \circ h)(y)$, on a $y = f(h(y))$ donc l'équation, d'inconnue $x \in E$, donnée par $f(x) = y$, a pour solution $h(y)$. Si $x' \in E$ est une solution de cette équation, alors on a, $f(x') = y$ donc $h(f(x')) = h(y)$ et, d'après $h \circ f = \mathrm{Id}_E$, $x' = h(y)$. Donc cette équation a une unique solution.
On a donc montré (9.3) et, par 5, que f est bijective.
7. On suppose f bijective. Soit $h : F \longrightarrow E$ et $k : F \longrightarrow E$ deux applications vérifiant $f \circ h = \mathrm{Id}_F$ et $h \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ k = \mathrm{Id}_F$ et $k \circ f = \mathrm{Id}_E$, respectivement. Pour $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Donc $k(y) = k(f(x)) = (k \circ f)(x) = x = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$. On a montré que $k = h$.
D'après la preuve de 6, le reste de l'affirmation dans 7 est vrai.
8. Comme $\tilde{f}(E) = f(E)$, $\tilde{f}$ est surjective, par 4. Soit $(x_1; x_2) \in E^2$ tel que $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$. Par définition de $\tilde{f}$, on a $f(x_1) = f(x_2)$ et, comme f est injective, on a $x_1 = x_2$. On a montré que $\tilde{f}$ est injective. D'où $\tilde{f}$ est bijective. □

Comme conséquence, on établit le résultat suivant sur les ensembles finis (cf. définition 1.3). On rappelle qu'une notation pour les intervalles de $\mathbb{N}$ a été introduite dans la définition 1.2.

Proposition 9.3. *Soit E et F deux ensembles non vides. Pour un ensemble fini A, on note par* $\mathrm{card}A$ *son cardinal* (*cf. définition 1.3*).

1. *S'il existe une bijection $b : E \longrightarrow F$ et si l'un des ensembles E et F est fini alors l'autre est aussi fini et* $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$.
2. *Si les ensembles E et F sont finis et* $\mathrm{card}E = \mathrm{card}F$ *alors il existe une bijection $b : E \longrightarrow F$.*
3. *Si $E \subset F$ et F est fini alors E est fini et* $\mathrm{card}E \leq \mathrm{card}F$.
4. *Si E est fini et $f : E \longrightarrow F$ est une application, alors $f(E)$ est aussi fini et* $\mathrm{card}f(E) \leq \mathrm{card}E$.
5. *Si $f : E \longrightarrow F$ est une application injective et $f(E)$ est fini alors E est aussi fini et* $\mathrm{card}E = \mathrm{card}f(E)$.
6. *Si E et F sont finis alors leur réunion $E \cup F$ est aussi un ensemble fini.*

Preuve :

a). On suppose que E est fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe une bijection $b : E \longrightarrow F$. On a donc des éléments $a_1; \cdots; a_p$ deux à deux distincts de E tel que $E = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Pour $j \in [\![1; p]\!]$, soit $b_j = b(a_j) \in F$. On a $\{b_j; j \in [\![1; p]\!]\} \subset F$.
Si $(j; k) \in [\![1; p]\!]^2$ avec $b_j = b_k$ alors $b(a_j) = b(a_k)$ et, comme b est injective, $a_j = a_k$. Nécessairement $k = j$. Les éléments $b_1; \cdots; b_p$ de F sont donc deux à deux distincts.
Soit $f \in F$. Comme b est surjective, il existe $e \in E$ tel que $b(e) = f$. Il existe $j \in [\![1; p]\!]$ tel que $e = a_j$. Donc $f = b(e) = b(a_j) = b_j$. Donc $f \in \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Ceci étant vrai pour tout $f \in F$, on a montré que $F \subset \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$.
Conclusion : $F = \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$, F est fini et $\mathrm{card}F = p = \mathrm{card}E$.

b). On suppose que F est fini de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe une bijection $b : E \longrightarrow F$. On note par $b^{\langle -1\rangle} : F \longrightarrow E$ la bijection réciproque de b. On applique le a) avec E remplacé par F, F remplacé par E et b remplacé par $b^{\langle -1\rangle}$. On obtient que E est fini et $\text{card}E = \text{card}F$.

c). On suppose que E et F sont finis de même cardinal $p \in \mathbb{N}^*$. Il existe donc des éléments $a_1; \cdots; a_p$ deux à deux distincts de E tel que $E = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Il existe donc des éléments $b_1; \cdots; b_p$ deux à deux distincts de F tel que $F = \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$. Soit $b : E \longrightarrow F$ l'application définie par, pour $j \in [\![1; p]\!]$, $b(a_j) = b_j$.
On a $b(E) = F$ donc b est surjective (cf. proposition 9.2).
Soit $(e, e') \in E^2$ tel que $b(e) = b(e')$. Il existe $(j; k) \in [\![1; p]\!]^2$ tel que $e = a_j$ et $e' = a_k$. On a $b_j = b(a_j) = b(e) = b(e') = b_k$. Nécessairement $j = k$ donc $e = a_j = a_k = e'$. On a montré que b est injective (cf. proposition 9.2).
Donc b est bijective (cf. proposition 9.2).

d). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition : Pour tout ensemble fini F de cardinal p, ses parties sont finies de cardinal inférieur ou égal à p.
Soit F est un singleton. Le vide est une partie finie de F de cardinal $0 \leq 1$ et F est une partie finie de F de cardinal $1 \leq 1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit F un ensemble fini de cardinal $p+1$. Il existe donc des éléments $a_1; \cdots; a_{p+1}$ deux à deux distincts de F tel que $F = \{a_j; j \in [\![1; p+1]\!]\}$. Soit E une partie de F.
Si $E = F$ alors E est fini de cardinal $p + 1 \leq p + 1$.
Sinon, il existe $f \in F \setminus E$. Il existe $k \in [\![1; p+1]\!]$ tel que $f = a_k$. On a donc $F \setminus \{f\} = \{b_j; j \in [\![1; p]\!]\}$ avec $b_j = a_j$ si $j < k$ et $b_j = a_{j+1}$ si $k < j$. Donc $F \setminus \{f\}$ est fini de cardinal p. De plus, $E \subset (F \setminus \{f\})$.
Par l'hypothèse de récurrence, E est fini et $\text{card}E \leq p \leq p + 1$. Donc $\mathcal{P}(p + 1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

e). On suppose que E est fini et on considère une application $f : E \longrightarrow F$. Soit $y \in f(E)$. L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est une partie non vide de E, qui est fini, donc, par 3, $f^{-1}(\{y\})$ est fini. Il existe donc $p(y) \in \mathbb{N}^*$ et des éléments $a_1(y); \cdots; a_{p(y)}(y)$ deux à deux distincts de E tel que $f^{-1}(\{y\}) = \{a_j(y); j \in [\![1; p(y)]\!]\}$.
Soit $g : f(E) \longrightarrow E$ l'application définie par, pour $y \in f(E)$, $g(y) = a_1(y)$. Pour $(y; y') \in f(E)^2$ tel que $g(y) = g(y')$, on a $y = f(g(y)) = f(g(y')) = y'$. Donc g est injective. Par le 8 de la proposition 9.2, g est une bijection de $f(E)$ sur $g(f(E))$. Comme $g(f(E))$ est une partie de E et E est fini, $g(f(E))$ est fini et $\text{card}g(f(E)) \leq \text{card}E$, par 3. Par 1, $f(E)$ est fini et $\text{card}f(E) = \text{card}g(f(E)) \leq \text{card}E$.

f). Comme f est bijective de E sur $f(E)$ (cf. proposition 9.2), on applique le 1 avec F remplacé par $f(E)$ et on obtient le résultat cherché.

g). Si $E \subset F$ alors $E \cup F = F$ donc $E \cup F$ est fini. Si $F \subset E$ alors $F \cup E = E$ donc $E \cup F$ est fini. Voyons maintenant le cas où $E \not\subset F$ et $F \not\subset E$. Les ensembles $E \cap F$ et $E \setminus F$ sont finis comme partie de l'ensemble fini E (cf. 3). L'ensemble $E \setminus F$ est fini comme partie de l'ensemble fini F. On sépare deux cas.
Cas où $E \cap F = \emptyset$: Il existe $(p; q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, des éléments $a_1, \cdots, a_p$ deux à deux distincts de E, des élements $b_1, \cdots, b_q$ deux à deux distincts de F tels que $E = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$ et $F = \{b_j; j \in [\![1; q]\!]\}$. Pour $j \in [\![1; p+q]\!]$, on pose $c_j = a_j$, si $j \leq p$, et $c_j = b_{j-p}$, si $j > p$. Comme $E \cap F = \emptyset$, les c_j sont deux à deux distincts et $E \cup F = \{c_j; j \in [\![1; p+q]\!]\}$. Donc $E \cup F$ est fini.
Cas où $E \cap F \neq \emptyset$: Comme partie de E, l'ensemble $E \cap F$ est fini. Il existe donc $(p; q; r) \in (\mathbb{N}^*)^3$, des éléments $a_1, \cdots, a_p$ deux à deux distincts de $E \setminus F$, des élements $b_1, \cdots, b_q$ deux à deux distincts de $F \setminus E$ et des éléments $c_1, \cdots, c_r$ deux à deux distincts de $E \cap F$ tels que $E \setminus F = \{a_j; j \in [\![1; p]\!]\}$, $F \setminus E = \{b_j; j \in [\![1; q]\!]\}$ et $E \cap F = \{c_j; j \in [\![1; r]\!]\}$. Pour $j \in [\![1; p+q+r]\!]$, on pose $d_j = a_j$, si $j \leq p$, $d_j = b_{j-p}$, si $p < j \leq p+q$ et $d_j = c_{j-p-q}$, si $p+q < j \leq p+q+r$. Comme les ensembles $E \setminus F$, $F \setminus E$ et $E \cap F$ sont deux à deux disjoints, les d_j sont deux à deux distincts et $E \cup F = \{d_j; j \in [\![1; p+q+r]\!]\}$. Donc $E \cup F$ est fini. □

9.1.2 Propriétés de $\mathbb{Z}$ et fonction partie entière.

Dans ce paragraphe, on établit des propriétés sur les parties de $\mathbb{Z}$ et on construit la fonction partie entière.

On étend d'abord la notation pour les intervalles de $\mathbb{N}$ (cf. définition 1.2) aux intervalles de $\mathbb{Z}$. Pour $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$, on pose

$$[\![a;b]\!] := \{n \in \mathbb{Z};\ a \leq n \text{ et } n \leq b\}, \quad [\![a;b[\![:= \{n \in \mathbb{Z};\ a \leq n \text{ et } n < b\},$$

$$]\!]a;b]\!] := \{n \in \mathbb{Z};\ a < n \text{ et } n \leq b\} \quad \text{et} \quad]\!]a;b[\![:= \{n \in \mathbb{Z};\ a < n \text{ et } n < b\}.$$

On définit aussi

$$[\![a;+\infty[\![:= \{n \in \mathbb{Z};\ a \leq n\}, \quad]\!]a;+\infty[\![:= \{n \in \mathbb{Z};\ a < n\},$$

$$]\!]-\infty;a]\!] := \{n \in \mathbb{Z};\ n \leq a\}, \quad]\!]-\infty;a[\![:= \{n \in \mathbb{Z};\ a < n\}.$$

Proposition 9.4. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, B une partie non vide de $\mathbb{N}$ et C une partie non vide de $\mathbb{Z}$.*

1. *Si A est finie alors A admet un maximum et un minimum.*
2. *On a l'équivalence suivante : B est finie si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset [\![0;q]\!]$.*
3. *On peut reformuler l'équivalence précédente sous la forme :*

$$\Big(\big(B \text{ est infinie}\big) \iff \big(\forall\, q \in \mathbb{N}\,,\, \exists\, n \in B;\ n > q\big)\Big).$$

4. *Une partie infinie de $\mathbb{N}$ n'est pas majorée.*
5. *B admet un minimum.*
6. *On a l'équivalence suivante : C est finie si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $C \subset [\![-q;q]\!]$.*

Preuve :

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition : (toute partie de $\mathbb{R}$ de cardinal p admet un maximum et un minimum).
   Soit A une partie de $\mathbb{R}$ à un seul élément a. Comme $a \leq a$, a majore A et a minore A. Donc, par définition, $a = \max A$ et $a = \min A$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit $A = \{a;b\}$ une partie de $\mathbb{R}$ à deux éléments. Si $a \leq b$, on a $a = \min A$ et $b = \max A$. Si $a \geq b$, on a $b = \min A$ et $a = \max A$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ ayant $(p+1)$ éléments. On peut écrire A sous la forme $\{a_j; j \in [\![1;p+1]\!]\}$, avec des a_j deux à deux distincts. Soit $A' := \{a_j; j \in [\![1;p]\!]\}$. On a $A = A' \cup \{a_{p+1}\}$. Par l'hypothèse de récurrence, A' admet un maximum et un minimum. Soit $a_+ := \max(\max A'; a_{p+1}) \in A$ et $a_- := \min(\min A'; a_{p+1}) \in A$ (a_+ et a_- sont bien définis d'après $\mathcal{P}(2)$). On voit que a_+ majore A et que a_- minore A. Donc A admet a_+ pour maximum et a_- pour minimum. Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.
   Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), on en déduit que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Une partie A non vide et finie de $\mathbb{R}$ a forcément un cardinal $q \in \mathbb{N}^*$ donc, par $\mathcal{P}(q)$, A admet un maximum et un minimum.
2. Soit $q \in \mathbb{N}$. Par la définition 1.3, $[\![0;q]\!]$ est un ensemble fini de cardinal $q+1$ car $[\![0;q]\!] = \{j-1; j \in [\![1;q+1]\!]\}$. S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $B \subset [\![0;q]\!]$, alors B est fini, d'après le 3 de la proposition 9.3. Réciproquement, si B est fini alors, par 1, B admet un maximum q. Donc q majore B et, comme $B \subset \mathbb{N}$, 0 minore B. D'où $B \subset [\![0;q]\!]$.

3. On a, par 2,
$$\begin{aligned}\big(B \text{ est infinie}\big) &\iff \text{non}\big(B \text{ est finie}\big) \iff \text{non}\big(\exists\, q \in \mathbb{N}\,,\, B \subset [\![0;q]\!]\big)\\ &\iff \big(\forall\, q \in \mathbb{N}\,,\, B \not\subset [\![0;q]\!]\big) \iff \big(\forall\, q \in \mathbb{N}\,,\, \exists n \in B\,;\quad n \notin [\![0;q]\!]\big)\\ &\iff \big(\forall\, q \in \mathbb{N}\,,\, \exists n \in B\,;\quad n > q\big)\,.\end{aligned}$$
4. Si B est une partie infinie de $\mathbb{N}$ alors, par 3, la proposition de droite de 3 est vraie et cette dernière dit précisément que B n'est pas majorée.
5. Soit $q \in B$. L'ensemble $B \cap [\![0;q]\!]$ est une partie non vide B (car elle contient q). De plus, elle est finie car elle est contenue dans $[\![0;q]\!]$ (cf. 2). Donc, par 1, elle admet un minimum $m \in \mathbb{N}$. On vérifie que m est aussi le minimum de B.
Comme $m \in B \cap [\![0;q]\!]$, $m \in B$ et $m \leq q$. De plus, pour $p \in B$, on a, si $p > q$, $p > q \geq m$ et, si $p \leq q$, $p \in B \cap [\![0;q]\!]$ donc $p \geq m$. Donc m est le minimum de B.
6. Soit $q \in \mathbb{N}$. Par la définition 1.3, $[\![-q;q]\!]$ est un ensemble fini de cardinal $2q+1$ car $[\![-q;q]\!] = \{j-1-q; j \in [\![1;2q+1]\!]\}$. S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $C \subset [\![-q;q]\!]$, alors C est fini, d'après le 3 de la proposition 9.3. Réciproquement, si C est fini alors, par 1, C admet un minimum q_- et un maximum q_+. Soit $q = \max(|q_-|;|q_+|)$. Pour $p \in C$, on a $-q \leq -|q_-| \leq q_- \leq p \leq q_+ \leq |q_+| \leq q$ donc $C \subset [\![-q;q]\!]$. □

On donne une information supplémentaire sur les parties infinies de $\mathbb{N}$.

Proposition 9.5. *Soit D et D' deux parties infinies de $\mathbb{N}$. Il existe une bijection strictement croissante $\varphi : D' \longrightarrow D$.*

Lemme 9.6. *Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Il existe une suite strictement croissante $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ dont l'image $v(\mathbb{N}^*)$ est exactement D. En particulier, v est bijective.*

Preuve : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □

Preuve de la proposition 9.5 : On applique le lemme 9.6 à D et à D'. Il existe deux bijections strictement croissantes $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ et $w : \mathbb{N}^* \longrightarrow D'$ telles que $v(\mathbb{N}^*) = D$ et $w(\mathbb{N}^*) = D'$. La bijection réciproque $w^{\langle -1\rangle}$ de w est aussi strictement croissante.
En effet, prenons $(n;n') \in (D')^2$ avec $n < n'$ et posons $p = w^{\langle -1\rangle}(n) \in \mathbb{N}^*$ et $p' = w^{\langle -1\rangle}(n') \in \mathbb{N}^*$. Si l'on avait $p \geq p'$, on aurait, comme w est croissante, $w(p) \geq w(p')$ soit $n = w(p) \geq w(p') = n'$ ce qui contredit $n < n'$. Donc, forcément, $p < p'$ soit $w^{\langle -1\rangle}(n) < w^{\langle -1\rangle}(n')$.
Soit $\varphi := v \circ w^{\langle -1\rangle}$. L'application φ est donc bijective de D' sur D, comme composée de bijections (cf. proposition 9.2). Vérifions que φ est strictement croissante. Soit $(n;n') \in (D')^2$ avec $n < n'$. Comme $w^{\langle -1\rangle}$ est strictement croissante, on a $w^{\langle -1\rangle}(n) < w^{\langle -1\rangle}(n')$. Comme v est strictement croissante, on a $v(w^{\langle -1\rangle}(n)) < v(w^{\langle -1\rangle}(n'))$. D'où $\varphi(n) = v(w^{\langle -1\rangle}(n)) < v(w^{\langle -1\rangle}(n')) = \varphi(n')$. □

On compte le nombre d'entier relatif dans un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur 1.

Proposition 9.7. *Soit $a \in \mathbb{R}$.*

1. *L'ensemble $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ est fini et* $\text{card}(]a;a+1] \cap \mathbb{Z}) = 1$.
2. *L'ensemble $[a;a+1[\cap\mathbb{Z}$ est fini et* $\text{card}([a;a+1[\cap\mathbb{Z}) = 1$.
3. *L'ensemble $[a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ est fini et* $\text{card}([a;a+1] \cap \mathbb{Z}) \in [\![1;2]\!]$.
4. *On a les équivalences*
$$\big(\text{card}([a;a+1] \cap \mathbb{Z}) \;=\; 2\big) \iff \big(a \in \mathbb{Z}\big) \iff \big(]a;a+1[\cap\mathbb{Z} \;=\; \emptyset\big)\,.$$

Preuve :

1. Si $a \in \mathbb{Z}$, $a+1 \in \mathbb{Z}$ donc $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ contient $a+1$. Prenons $a \notin \mathbb{Z}$. L'ensemble $A : \{n \in \mathbb{N}; n \geq |a|+1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ d'après la propriété d'Archimède (cf. (1.4)). Il admet donc un minimum n_0 (cf. proposition 9.4) et $n_0 \geq |a|+1 > 0$. Comme $(|a|+1) \notin \mathbb{Z}$, $n_0 > |a|+1$. Par définition de n_0, $n_0 - 1 \notin A$ donc $n_0 - 1 < |a|+1 < n_0$. On a donc $(n_0-1) \in]|a|;|a|+1[$. Si $a \geq 0$, $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ contient $n_0 - 1$. Si $a < 0$ alors, comme $-|a|-1 < -(n_0-1) < -|a|$ et $a = -|a|$, on a $a < -n_0 + 2 < a+1$ donc $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ contient $-n_0+2$.
   Dans tous les cas, $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ a au moins un élément.
   Supposons qu'on ait $(k;k') \in (]a;a+1] \cap \mathbb{Z})^2$ tel que $k \leq k'$. On a $a < k \leq k' \leq a+1$ et $-a > -k$ donc $0 \leq k'-k < 1$ (cf. remarque 1.5). Comme $(k'-k) \in \mathbb{Z}$, on a $k'-k = 0$ soit $k = k'$.
   On a montré que $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ a exactement un élément.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x$. Pour $y \in \mathbb{R}$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = y$ a une solution unique, à savoir $x = -y$. Donc f est bijective d'après (9.3) et sa bijection réciproque est $f^{\langle -1 \rangle} = f$. En particulier, $f \circ f$ est l'identité. On remarque que $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
   On considère les propositions

$$\mathcal{Q}_0 \;=\; \Big(\forall b \in \mathbb{R}\,,\, \mathrm{card}\big(]b;b+1] \cap \mathbb{Z}\big) \;=\; 1\Big)\,,\; \mathcal{Q}_1 \;=\; \Big(\forall b \in \mathbb{R}\,,\, f\big([b;b+1[\big) \;\subset\;]-(b+1);-b]\Big)$$

$$\text{et} \quad \mathcal{Q}_2 \;=\; \Big(\forall b \in \mathbb{R}\,,\, f\big(]b;b+1]\big) \;\subset\; [-(b+1);-b[\Big)\,.$$

   Puisque le point 1 est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Q}_0$ est vraie. Comme f est strictement décroissante, on a, pour tout $b \in \mathbb{R}$, $f([b;b+1[) \subset]-(b+1);-b]$ et $f(]b;b+1]) \subset [-(b+1);-b[$. Donc $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ sont vraies.
   D'après $\mathcal{Q}_0$, il existe $p \in]-(a+1);-a] \cap \mathbb{Z}$. Comme $f(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et $f(]-(a+1);-a]) \subset [a;a+1[$ (cf. $\mathcal{Q}_2$), $f(p) \in [a;a+1[\cap\mathbb{Z}$. Donc $[a;a+1[\cap\mathbb{Z}$ est non vide. Si $(q_1;q_2) \in ([a;a+1[\cap\mathbb{Z})^2$ alors, grâce à $\mathcal{Q}_1$, $f(q_1) \in]-(a+1);-a] \cap \mathbb{Z}$ et $f(q_2) \in]-(a+1);-a] \cap \mathbb{Z}$. Comme cet ensemble a un seul élément, d'après $\mathcal{Q}_0$, $f(q_1) = f(q_2)$. Comme f est injective, $q_1 = q_2$. Donc $[a;a+1[\cap\mathbb{Z}$ est un singleton.
3. Si $a \notin \mathbb{Z}$, $[a;a+1] \cap \mathbb{Z} =]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ qui est fini de cardinal 1, par 1. Si $a \in \mathbb{Z}$, $[a;a+1] \cap \mathbb{Z} = \{a;b\}$, où b est l'unique élément de $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$. Comme $b \neq a$, $\{a;b\}$ est fini de cardinal 2.
4. Dans la preuve de 3, on a montré : $(a \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \mathrm{card}([a;a+1] \cap \mathbb{Z}) = 2)$. Montrons la réciproque. On suppose que $[a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ a deux éléments. Comme $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ est un singleton, par 1, on a nécessairement $]a;a+1] \cap \mathbb{Z} \neq [a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ donc $a \in [a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$. On a montré la première équivalence.
   L'ensemble $]a;a+1[\cap\mathbb{Z}$ est une partie de l'ensemble fini $]a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ de cardinal 1. Donc $]a;a+1[\cap\mathbb{Z}$ est fini et $\mathrm{card}([a;a+1] \cap \mathbb{Z}) \leq 1$, par la proposition 9.3.
   Si $]a;a+1[\cap\mathbb{Z}$ est vide alors, comme $\mathrm{card}(]a;a+1] \cap \mathbb{Z}) = 1$, $a+1$ appartient forcément à $\mathbb{Z}$, donc $a \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, si $a \in \mathbb{Z}$ alors, d'après 3, $\mathrm{card}([a;a+1] \cap \mathbb{Z}) = 2$. Comme $a \in [a;a+1] \cap \mathbb{Z}$ et $a+1 \in [a;a+1] \cap \mathbb{Z}$, l'ensemble $]a;a+1[\cap\mathbb{Z} = ([a;a+1] \cap \mathbb{Z}) \setminus \{a;a+1\}$ est vide. On a montré la deuxième équivalence. □

On est en mesure de construire la fonction partie entière.

Proposition 9.8. *Pour $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $p \in \mathbb{Z}$ vérifiant $p \leq x < p+1$. On le note $E(x)$ et c'est la partie entière de x. On a, de plus, $E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z};\ k \leq x\}$. L'application $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ vérifie*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad E(x) \;\leq\; x \;<\; E(x) \;+\; 1\,. \tag{9.4}$$

Cette fonction E est appelée fonction partie entière. C'est la seule application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ à vérifier (9.4) *avec E remplacée par g.*

Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $p \in \mathbb{Z}$, la proposition $(p \leq x < p+1)$ est équivalente à $(p \in]x-1;x])$. Par le 1 de la proposition 9.7, l'intervalle $]x-1;x]$ contient exactement un entier relatif. Donc $(p \leq x < p+1)$ est vraie pour un unique p à savoir $E(x)$, par définition. En particulier, on a montré (9.4). Si $k \in \mathbb{Z}$ et $k \leq x$, alors soit $k \in]x-1;x]$ et $k = E(x)$ soit $k \leq x-1 < E(x)$. Donc $E(x) = \max\{k \in \mathbb{Z};\ k \leq x\}$.
Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ une application vérifiant (9.4) avec E remplacée par g. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leq x$ et

$g(x) > x - 1$ donc $g(x) \in (]x-1;x] \cap \mathbb{Z})$. D'après ce qui précède, on a nécessairement $g(x) = E(x)$. Donc $g = E$, ce qui montre l'unicité de E. □

On termine ce paragraphe en donnant des précisions sur la suite des factorielles (cf. définition 3.13).

Proposition 9.9. *La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$, définie dans la définition 3.13, est croissante, strictement croissante à partir du rang 1 et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Elle tend vers $+\infty$ et sa restriction à $\mathbb{N}^*$ est une extractrice.*

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = (n! \in \mathbb{N}^* \text{ et } (n+1)! > n!)$. Comme $1! = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $2! = 2$, on a $2! = 2 > 1 = 1!$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse de récurrence, $n! \in \mathbb{N}^*$ et, comme $(n+1) \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)! = (n+1) \cdot n! \in \mathbb{N}^*$. De plus, $n + 1 > 1$ et $n! \geq 1 > 0$ donc $(n+1)! = (n+1) \cdot n! > n!$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
En particulier $(n!)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, à partir du rang 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a, par $\mathcal{P}(n)$, $n! \geq 1 = 0! \in \mathbb{N}^*$. Donc $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. La restriction $(n!)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est une extractrice (cf. définition 3.29), donc, par la proposition 3.54, elle tend vers $+\infty$. Par la proposition 3.35, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ tend aussi vers $+\infty$. □

9.1.3 Fonctions racine carrée et module.

On construit ici la fonction racine carrée, on en donne des propriétés et on en déduit des propriétés sur la fonction module.

On rappelle que la fonction valeur absolue est la fonction $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $|x| = \max\{-x; x\}$ (l'existence du maximum étant assuré par la proposition 9.4).

Proposition 9.10. *L'application $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} = \sup\{t \in \mathbb{R}^+; t^2 \leq x\}$, est bien définie. Elle est strictement croissante, $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$. De plus, on a les propriétés suivantes.*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+\,, \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \left(z^2 = x\right) \iff \left(z = \sqrt{x} \text{ ou } z = -\sqrt{x}\right). \tag{9.5}$$

$$\forall\, (x;y) \in (\mathbb{R}^+)^2\,, \quad \sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}\,. \tag{9.6}$$

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\,, \quad \sqrt{a^2} = |a|\,. \tag{9.7}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+\,, \quad \sqrt{x^2} = x\,. \tag{9.8}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+\,, \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x\,. \tag{9.9}$$

Preuve : Par commodité, on pose $g = \sqrt{\cdot}$.
On remarque tout d'abord que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$, est positive et strictement croissante. En effet, si $0 \leq x < x'$, $x + x' > 0$ et

$$f(x') - f(x) = (x' - x) \cdot (x' + x) > 0\,.$$

Donc f est strictement croissante. De plus, $f(0) = 0$ donc f est positive.
On vérifie que g est bien définie. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ soit $\mathcal{S}(x) = \{t \in \mathbb{R}^+; t^2 \leq x\}$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. L'ensemble $\mathcal{S}(x)$ est non vide car il contient 0. En particulier, $\sup \mathcal{S}(x) \geq 0$. Vérifions que $\sup \mathcal{S}(x)$ est fini c'est-à-dire que $\mathcal{S}(x)$ est majoré. Soit $t_x = x + 1 > 0$. On a

$$t_x^2 = x^2 + 2x + 1 \geq x + 1 > x\,.$$

Soit $t \in \mathcal{S}(x)$, on a $t^2 \leq x \leq t_x^2$. Comme f est strictement croissante, la proposition $(t > t_x)$ est fausse donc $t \leq t_x$. En particulier, t_x majore $\mathcal{S}(x)$. Donc $\sup \mathcal{S}(x) \in \mathbb{R}^+$ et g est bien définie.

Comme $\mathcal{S}(0) = \{0\}$, $g(0) = \max \mathcal{S}(0) = 0$, par la proposition 1.12.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On suppose que $g(x)^2 > x$. On pose $\epsilon = g(x)^2 - x > 0$. Soit $\delta > 0$. On a

$$(g(x) - \delta)^2 \;=\; g(x)^2 \,-\, 2\delta g(x) \,+\, \delta^2 \;=\; x \,+\, \epsilon \,-\, 2\delta g(x) \,+\, \delta^2 \,.$$

En choisissant $\delta > 0$ tel que

$$\delta \;\leq\; g(x) \quad \text{et} \quad \delta \;\leq\; \frac{\epsilon}{2g(x)+1}\,,$$

on a $g(x) - \delta \geq 0$ et $\epsilon \geq 2\delta g(x)$ donc on obtient

$$x \;\leq\; x \,+\, \epsilon \,-\, 2\delta g(x) \;\leq\; x \,+\, \epsilon \,-\, 2\delta g(x) + \delta^2 \;=\; (g(x) - \delta)^2 \,.$$

Soit $t \in \mathcal{S}(x)$, on a $t^2 \leq x \leq (g(x)-\delta)^2$ et $g(x)-\delta \geq 0$. Comme f est strictement croissante, la proposition $(t > g(x) - \delta)$ est fausse donc $t \leq g(x) - \delta$. En particulier, $g(x) - \delta$ majore $\mathcal{S}(x)$. Comme $\delta > 0$, on a une contradiction avec $g(x) = \sup \mathcal{S}(x)$. Donc $g(x)^2 \leq x$.
On suppose que $g(x)^2 < x$. Soit $\eta = x - g(x)^2 > 0$. Soit $\delta > 0$. On a

$$(g(x) + \delta)^2 \;=\; g(x)^2 \,+\, 2\delta g(x) \,+\, \delta^2 \;=\; x \,-\, \eta \,+\, 2\delta g(x) \,+\, \delta^2 \,.$$

En choisissant $\delta > 0$ tel que

$$\delta \;\leq\; 1 \quad \text{et} \quad \delta \;\leq\; \frac{\eta}{2g(x)+1}\,,$$

on a $g(x)+\delta \geq 0$ et $2\delta g(x)+\delta^2 \leq (2g(x)+1)\delta \leq \eta$ donc $(g(x)+\delta)^2 \leq x$. En particulier, $(g(x)+\delta) \in \mathcal{S}(x)$ et $g(x) + \delta \leq \sup \mathcal{S}(x) = g(x)$. Contradiction car $\delta > 0$. On a montré que $g(x)^2 \geq x$.
On déduit de ce qui précède que $g(x)^2 = x$. On a montré (9.9).
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^2 \;=\; x \iff z^2 \,-\, g(x)^2 \;=\; 0 \iff (z \,-\, g(x)) \cdot (z \,+\, g(x)) \;=\; 0 \iff \big(z \,=\, g(x) \text{ ou } z \,=\, -g(x)\big)\,.$$

On a montré (9.5).
Comme -1 et 1 sont solutions de l'équation $z^2 = 1$ et $g(1) \geq 0$, on a $g(1) = 1$, par (9.5) pour $x = 1$.
Soit $(x; y) \in (\mathbb{R}^+)^2$. Comme $(g(x)g(y))^2 = g(x)^2 \cdot g(y)^2 = xy$ et g est positive, $g(x)g(y)$ est une solution positive de l'équation $z^2 = xy$ donc, par (9.5) avec x remplacé par xy, $g(x)g(y) = g(xy)$. On a montré (9.6).
Soit $a \in \mathbb{R}$. Comme $a^2 = |a|^2$, on a, d'après (9.6) et (9.9), $g(a^2) = g(|a|^2) = g(|a|) \cdot g(|a|) = g(|a|)^2 = |a|$. On a montré (9.7). Donc (9.8) est aussi vraie.
Il reste à montrer que g est strictement croissante. Soit $(x; y) \in (\mathbb{R}^+)^2$ avec $x < y$. Si l'on avait $g(x) \geq g(y)$, on aurait, comme f est croissante et par (9.9), $x = g(x)^2 = f(g(x)) \geq f(g(y)) = g(y)^2 = y$ ce qui contredit $x < y$. Donc $g(x) < g(y)$. Donc g est strictement croissante. □

Définition 9.11. *La fonction $\sqrt{\cdot}$ introduite dans la proposition 9.10 est appelée fonction racine carrée.*

Remarque 9.12. *La fonction racine carrée définie dans la proposition 8.13 est la bijection réciproque de la fonction bijective $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f_2(x) = x^2$. D'après* (9.8) *et* (9.9)*, la fonction racine carrée de la définition 9.11 est aussi la bijection réciproque de f_2. Elle coïncide donc avec la fonction racine carrée définie dans la proposition 8.13.*

Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$z \cdot \overline{z} \;=\; (x + iy) \cdot (x - iy) \;=\; x^2 \,-\, (iy)^2 \;=\; x^2 \,+\, y^2 \;\geq\; 0$$

donc $\sqrt{z\overline{z}}$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}^+$ (cf. proposition 9.10). On a donc une application $|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$. Cette application est l'application module et, pour $z \in \mathbb{C}$, $|z|$ est le module de z.
Lorsque $z = x \in \mathbb{R}$, on a $z\overline{z} = x^2$ et, par (9.7), $\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2} = |x|$, la valeur absolue de x. Donc le module de x est égale à la valeur absolue de x. La valeur absolue est donc la restriction à $\mathbb{R}$ de la fonction module. Pour cette raison, il est traditionnel de noter de la même façon ces deux fonctions, ce qui est abusif puisqu'elles soient différentes.
On établit maintenant les propriétés suivantes de la fonction module.

Proposition 9.13. *La fonction module a les propriétés suivantes :*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \big(|z| = 0 \iff z = 0\big)\,, \tag{9.10}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad |\overline{z}| = |z|\,, \tag{9.11}$$

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |zz'| \;=\; |z| \cdot |z'|\,, \tag{9.12}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,, \quad \big|z^n\big| \;=\; |z|^n \tag{9.13}$$

et

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad |z+z'| \;\leq\; |z| + |z'|\,. \tag{9.14}$$

La propriété (9.14) *s'appelle l'inégalité triangulaire. Une formulation équivalente de cette proposition est*

$$\forall\, (z;z') \in \mathbb{C}^2\,, \quad \big||z| - |z'|\big| \;\leq\; |z - z'|\,. \tag{9.15}$$

Pour $(z;z') \in \mathbb{C}^2$*, on a l'équivalence*

$$\big(|z+z'| \;=\; |z| + |z'|\big) \iff \big(\exists\, \lambda \in \mathbb{R}^+\,;\; z \,=\, \lambda \cdot z' \text{ ou } z' \,=\, \lambda \cdot z\big)\,. \tag{9.16}$$

En désignant, pour $z \in \mathbb{C}$*, par* $\Re(z)$ *sa partie réelle et par* $\Im(z)$ *sa partie imaginaire, on a*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \Big(\big(|\Re(z)| \;\leq\; |z|\big) \quad \text{et} \quad \big(|\Im(z)| \;\leq\; |z|\big)\Big)\,. \tag{9.17}$$

Preuve : Si $z = 0$, $z\overline{z} = 0$ donc $|z| = \sqrt{0} = 0$, par la proposition 9.10. Si $z \neq 0$ alors z s'écrit $x + iy$ avec $(x;y) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\})$ donc $x^2 + y^2 > 0$ et, comme $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante (cf. proposition 9.10), $|z| = \sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{0} = 0$. On a montré (9.10).
Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, on a $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$, soit (9.11). De plus, $x^2 \leq x^2 + y^2$ et $y^2 \leq x^2 + y^2$ donc, comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante (cf. proposition 9.10), on a, d'après (9.7),

$$\big|\Re(z)\big| \;=\; |x| \;=\; \sqrt{x^2} \;\leq\; \sqrt{x^2+y^2} \;=\; |z|$$

et

$$\big|\Im(z)\big| \;=\; |y| \;=\; \sqrt{y^2} \;\leq\; \sqrt{x^2+y^2} \;=\; |z|\,,$$

ce qui prouve (9.17).
Soit $(z;z') \in \mathbb{C}^2$. On a

$$|zz'|^2 \;=\; (zz') \cdot \overline{zz'} \;=\; z \cdot z' \cdot \overline{z} \cdot \overline{z'} \;=\; |z|^2 \cdot |z'|^2$$

donc, par (9.6) et (9.8),

$$|zz'| \;=\; \sqrt{|zz'|^2} \;=\; \sqrt{|z|^2 \cdot |z'|^2} \;=\; \sqrt{|z|^2} \cdot \sqrt{|z'|^2} \;=\; |z| \cdot |z'|\,,$$

ce qui établit (9.12).
Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (|z^n| = |z|^n)$. Comme $|z^0| = |1| = 1 = |z|^0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a, d'après (9.12) et l'hypothèse de récurrence,

$$\big|z^{n+1}\big| \;=\; \big|z^n \cdot z\big| \;=\; \big|z^n\big| \cdot |z| \;=\; |z|^n \cdot |z| \;=\; |z|^{n+1}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a montré (9.13).
Soit $(z;z') \in \mathbb{C}^2$. La propriété (9.14) est vraie si $z' = 0$. On suppose désormais que $z' \neq 0$.
Soit $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = |z + tz'|^2 \geq 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} P(t) \;&= (z+tz') \cdot \overline{(z+tz')} \;=\; (z+tz') \cdot (\overline{z} + t\overline{z'}) \;=\; |z|^2 \,+\, t(z \cdot \overline{z'} \,+\, \overline{z} \cdot z') \,+\, t^2|z'|^2 \\ &= |z'|^2 t^2 \,+\, 2 \cdot \Re(\overline{z} \cdot z') \cdot t \,+\, |z|^2\,. \end{aligned}$$

Donc P est une fonction polynôme de degré deux à coefficients dans $\mathbb{R}$. De plus, P est positive donc son discriminant doit être négatif c'est-à-dire

$$4 \cdot \big(\Re(\overline{z} \cdot z')\big)^2 \, - \, 4 \cdot |z'|^2 \cdot |z|^2 \;\leq\; 0$$

ce qui donne

$$\big(\Re(\overline{z} \cdot z')\big)^2 \;\leq\; |z'|^2 \cdot |z|^2 \, .$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante (cf. proposition 9.10), on obtient, en utilisant (9.6) et (9.7),

$$\big|\Re(\overline{z} \cdot z')\big| \;\leq\; |z| \cdot |z'| \, . \tag{9.18}$$

On en déduit que

$$|z + z'|^2 \;=\; P(1) \;=\; |z'|^2 + 2 \cdot \Re(\overline{z} \cdot z') + |z|^2 \;\leq\; |z'|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |z'| + |z|^2 \;=\; (|z| + |z'|)^2 \, , \tag{9.19}$$

ce qui, en utilisant encore la croissance de $\sqrt{\cdot}$ et (9.8), donne (9.14).
On remarque, pour tout $c \in \mathbb{C}$, $|-c| = |-1| \cdot |c| = |c|$, par (9.12).
On montre l'équivalence ((9.14) $\Longleftrightarrow$ (9.15)).
$\Longrightarrow$) : On suppose donc (9.14) vraie, c'est-à-dire

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2 \, , \quad |z_1 + z_2| \;\leq\; |z_1| + |z_2| \, .$$

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$. On applique la proposition précédente à $z_1 = z - z'$ et $z_2 = z'$, ce qui donne $|z| \leq |z - z'| + |z'|$ soit $|z| - |z'| \leq |z - z'|$. On applique la proposition précédente à $z_1 = z' - z$ et $z_2 = z$, ce qui donne $|z'| \leq |z' - z| + |z|$ soit $|z'| - |z| \leq |z' - z| = |z - z'|$. Donc

$$\big||z| - |z'|\big| \;=\; \max\big\{|z| - |z'|; |z'| - |z|\big\} \;\leq\; |z - z'|$$

c'est-à-dire (9.15).
$\Longleftarrow$) : On suppose donc (9.15) vraie, c'est-à-dire

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2 \, , \quad \big||z_1| \, - \, |z_2|\big| \;\leq\; |z_1 \, - \, z_2| \, .$$

Soit $(z; z') \in \mathbb{C}^2$. On applique la proposition précédente à $z_1 = z + z'$ et $z_2 = z'$, ce qui donne

$$|z + z'| \, - \, |z'| \;\leq\; \big||z + z'| \, - \, |z'|\big| \;\leq\; |z|$$

soit $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. On obtient donc (9.14).
Comme (9.14) est vraie, cette équivalence montre que (9.15) est aussi vraie.
Il reste à montrer (9.16) pour $(z; z') \in \mathbb{C}^2$.
$\Longleftarrow$) : On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$. Dans le premier cas, on a, d'après (9.12) et le fait que $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $(1 + \lambda) \in \mathbb{R}^+$,

$$|z + z'| \;=\; |(1 + \lambda)z'| \;=\; |1 + \lambda| \cdot |z'| \;=\; (1 + \lambda) \cdot |z'| \;=\; \lambda |z'| + |z'| \;=\; |\lambda z'| + |z'| \;=\; |z| + |z'| \, .$$

Dans le second cas, on a de même

$$|z + z'| \;=\; |(1 + \lambda)z| \;=\; |1 + \lambda| \cdot |z| \;=\; (1 + \lambda) \cdot |z| \;=\; |z| + \lambda |z| \;=\; |z| + |\lambda z| \;=\; |z| + |z'| \, .$$

$\Longrightarrow$) On suppose que $|z + z'| = |z| + |z'|$. Si $z' = 0$ alors on a $z' = 0 \cdot z$ avec $0 \in \mathbb{R}^+$. On suppose désormais que $z' \neq 0$. D'après l'hypothèse, l'inégalité apparaissant dans (9.19) est en fait une égalité. En simplifiant cette dernière, on obtient

$$\Re(\overline{z} \cdot z') \;=\; |z| \cdot |z'| \, . \tag{9.20}$$

En particulier, le discriminant de la fonction polynômiale P est nul. Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $P(t) = 0$. On a donc $|z + tz'|^2 = 0$ et, d'après (9.5), le fait que $\sqrt{0} = 0$ et (9.10), on en déduit que $z = -tz'$. En portant cette information dans (9.20), on obtient

$$|z| \cdot |z'| \;=\; \Re\big(-t\overline{z'} \cdot z'\big) \;=\; -t \cdot |z'|^2 \, .$$

En divisant par $|z'|^2$ (qui est non nul), on voit que $-t \in \mathbb{R}^+$. On obtient donc la validité du membre de droite de (9.16).
On a montré (9.16). □

9.2 Variantes du théorème de récurrence.

On présente tout d'abord les variantes classiques du théorème de récurrence (cf. théorème 1.4). On traite ensuite une difficulté rencontrée dans plusieurs résultats et liée à des relations de récurrence. Ce dernier point nous amène à établir la construction d'une suite par récurrence (éventuellement finie).

9.2.1 Variantes classiques.

Les variantes suivantes du théorème de récurrence sont parfois utiles. On rappelle que le théorème de récurrence est donné dans le théorème 1.4.

Théorème de récurrence forte :

Théorème 9.14. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et, pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}\big) \quad et \quad \Big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,,\, \big(\forall k \in [\![n_0\,;\, n]\!]\,,\, \mathcal{P}(k)\big) \implies \mathcal{P}(n+1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0; +\infty[\![\,,\, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big)\,.$$

Preuve : On suppose vraie la proposition de gauche de l'implication à démontrer. Pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, soit $\mathcal{Q}(n)$ la proposition $(\forall\, k \in [\![n_0\,;\, n]\!], \mathcal{P}(k))$. On montre par récurrence (i.e. via le théorème 1.4) que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[\![$.
Comme $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, par hypothèse, $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un $n \in [\![n_0; +\infty[\![$. Donc $(\forall\, k \in [\![n_0\,;\, n]\!], \mathcal{P}(k))$ est vraie. D'après l'hypothèse, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Donc, pour $k \in [\![n_0\,;\, n+1]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie, i.e. $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[\![$.
Pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, on a $\mathcal{Q}(n) \implies \mathcal{P}(n)$ et, comme $\mathcal{Q}(n)$ est vraie, $\mathcal{P}(n)$ est aussi vraie. □

Théorème de récurrence finie :

Théorème 9.15. *Soit $(n_0; n_1) \in \mathbb{N}^2$ avec $n_0 < n_1$ et, pour tout $n \in [\![n_0; n_1]\!]$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}\big) \quad et \quad \Big(\forall n \in [\![n_0; n_1[\![\,,\, \big(\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies \quad \big(\forall n \in [\![n_0; n_1]\!]\,,\, \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}\big)\,.$$

Preuve : On suppose vraie la proposition de gauche de l'implication à démontrer. Pour $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, soit $\mathcal{Q}(n)$ la proposition

$$\Big((n > n_1) \quad \text{ou} \quad \big((n \leq n_1) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(n)\big)\Big)\,.$$

On montre par récurrence (i.e. via le théorème 1.4) que $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[\![$.
Par hypothèse, $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie. Comme $n_0 \leq n_1$, $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un $n \in [\![n_0; +\infty[\![$. Si $n \geq n_1$ alors $n+1 > n_1$ donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Si $n < n_1$, $n+1 \leq n_1$ et, comme $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et $(n > n_1)$ est fausse, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. D'après l'hypothèse, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[\![$.
Pour $n \in [\![n_0; n_1]\!]$, $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et $(n > n_1)$ est fausse, donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Théorème de récurrence descendante :

Théorème 9.16. *Soit $(n_0;n_1)\in\mathbb{N}^2$ avec $n_0<n_1$ et, pour tout $n\in[\![n_0;n_1]\!]$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_1)\ \textit{est vraie}\big)\quad\textit{et}\quad\Big(\forall n\in]\!]n_0;n_1]\!]\,,\,\big(\mathcal{P}(n)\implies\mathcal{P}(n-1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies\quad\big(\forall n\in[\![n_0;n_1]\!]\,,\,\mathcal{P}(n)\ \textit{est vraie}\big)\,.$$

Preuve : On suppose vraie la proposition de gauche de l'implication à démontrer. Pour $p\in[\![n_0;n_1]\!]$, soit $\mathcal{Q}(p)$ la proposition $\mathcal{P}(n_1+n_0-p)$. On montre par récurrence finie (i.e. par le théorème 9.15) que $\mathcal{Q}(p)$ est vraie pour tout $p\in[\![n_0;n_1]\!]$.
Par hypothèse, $\mathcal{P}(n_1)$ est vraie donc $\mathcal{Q}(n_0)=\mathcal{P}(n_1+n_0-n_0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{Q}(p)$ vraie pour un $p\in[\![n_0;n_1[\![$. Comme $\mathcal{P}(n_1+n_0-p)=\mathcal{Q}(p)$ est vraie et $n_1+n_0-p\in]\!]n_0;n_1]\!]$, on a, par l'hypothèse, $\mathcal{P}(n_1+n_0-p-1)$ est vraie c'est-à-dire $\mathcal{Q}(p+1)$ est vraie.
Par le théorème 9.15, $\mathcal{Q}(p)$ est vraie pour tout $p\in[\![n_0;n_1]\!]$. Pour $n\in[\![n_0;n_1]\!]$, $n_1+n_0-n\in[\![n_0;n_1]\!]$ donc $\mathcal{P}(n)=\mathcal{Q}(n_1+n_0-n)$ est vraie. □

Théorème de récurrence éventuellement finie : On combine le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4) et le théorème de récurrence finie (cf. théorème 9.15) pour obtenir le résultat suivant. On utilise la convention, pour $n_b=+\infty$, $n_b-1=+\infty$.

Théorème 9.17. *Soit $n_0\in\mathbb{N}$ et $n_b\in]\!]n_0+1;+\infty[\![\cup\{+\infty\}$. Pour $n\in[\![n_0;n_b[\![$, on considère une proposition $\mathcal{P}(n)$, dépendant de n. On a l'implication suivante :*

$$\Big(\big(\mathcal{P}(n_0)\ \textit{est vraie}\big)\quad\textit{et}\quad\Big(\forall n\in[\![n_0;n_b-1[\![\,,\,\big(\mathcal{P}(n)\implies\mathcal{P}(n+1)\big)\Big)\Big)$$
$$\implies\quad\big(\forall n\in[\![n_0;n_b[\![\,,\,\mathcal{P}(n)\ \textit{est vraie}\big)\,.$$

Preuve : Lorsque $n_b=+\infty$, le théorème de récurrence classique (cf. théorème 1.4) donne le résultat. Lorsque $n_b\in]\!]n_0+1;+\infty[\![$, le théorème de récurrence finie (cf. théorème 9.15) avec $n_1=n_b-1$ donne le résultat. □

En application de ce théorème 9.17, on montre la généralisation suivante de la proposition 3.23 sur les suites réelles monotones.

Proposition 9.18. *Soit $n_0\in\mathbb{N}$ et $N\in(\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ tel que $N>n_0+1$. Soit $u:[\![n_0;N[\![\longrightarrow\mathbb{R}$ une suite réelle. Avec la convention que $N-1=+\infty$ si $N=+\infty$, on a les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned}
\big(u\ \textit{est croissante}\big)&\iff\big(\forall n\in[\![n_0;N-1[\![\,,\quad u_{n+1}\geq u_n\big)\,.\\
\big(u\ \textit{est strictement croissante}\big)&\iff\big(\forall n\in[\![n_0;N-1[\![\,,\quad u_{n+1}>u_n\big)\,.\\
\big(u\ \textit{est décroissante}\big)&\iff\big(\forall n\in[\![n_0;N-1[\![\,,\quad u_{n+1}\leq u_n\big)\,.\\
\big(u\ \textit{est strictement décroissante}\big)&\iff\big(\forall n\in[\![n_0;N-1[\![\,,\quad u_{n+1}<u_n\big)\,.
\end{aligned}$$

Remarque 9.19. *Si $n_0\in\mathbb{N}$, $N=n_0+1$ et $u:[\![n_0;N[\![\longrightarrow\mathbb{R}$ est une suite réelle, alors le domaine de définition de la suite u est un singleton. Elle est donc croissante et décroissante. Elle est aussi strictement croissante et strictement décroissante, d'après la définition 3.22, car la proposition $(n<m)$ est toujours fausse pour n et m dans le domaine de définition de u.*

Preuve de la proposition 9.18 : Montrons d'abord les quatres implications $\implies$. Il suffit de reprendre l'argument utilisé dans la preuve de la proposition 3.23 en remplaçant "$n\geq n_0$" par "$n\in[\![n_0;N-1[\![$".
Passons maintenant aux implications $\impliedby$. On modifie légèrement l'argument utilisé dans la preuve de la proposition 3.23.

On suppose vraie la proposition de droite de la première équivalence de l'énoncé. On montre que u est croissante. Pour ce faire, on montre par récurrence la proposition $\mathcal{P}(n)$ donnée, pour $n \in [\![n_0; N[\![$, par

$$\mathcal{P}(n) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; n]\!]\,, \quad u_p \,\leq\, u_n\right).$$

$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, car, pour tout $p \in [\![n_0; n_0]\!]$, on a en fait $p = n_0$ donc $u_p \leq u_{n_0}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in [\![n_0; N-1[\![$. Soit $p \in [\![n_0; n+1]\!]$. Si $p \leq n$ alors $u_p \leq u_n$, par l'hypothèse de récurrence, et $u_n \leq u_{n+1}$, par l'hypothèse. Donc $u_p \leq u_{n+1}$. Si $p = n$ alors, par l'hypothèse, $u_p = u_n \leq u_{n+1}$. On a montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence éventuellement finie (cf. théorème 9.17 avec $n_b = N$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0; N[\![$.
Soit $(m; n) \in [\![n_0; +\infty[\![^2$ avec $m \geq n$. Comme $\mathcal{P}(m)$ est vraie, on a $u_m \geq u_n$. On a montré que u est croissante.
Pour la seconde implication $\Longleftarrow$, on procède de la même manière en remplaçant la proposition $\mathcal{P}(n)$ précédente par

$$\mathcal{P}(n) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; n]\!]\,, \quad u_p \,<\, u_n\right).$$

Pour la troisième, on procède de la même manière en remplaçant la proposition $\mathcal{P}(n)$ précédente par

$$\mathcal{P}(n) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; n]\!]\,, \quad u_p \,\geq\, u_n\right).$$

Pour la dernière, on procède de la même manière en remplaçant la proposition $\mathcal{P}(n)$ précédente par

$$\mathcal{P}(n) \;=\; \left(\forall p \in [\![n_0; n]\!]\,, \quad u_p \,>\, u_n\right).$$

On a montré les quatres équivalences. □

9.2.2 Une difficulté liée aux relations de récurrence.

Dans cet paragraphe, on se penche sur une difficulté liée aux relations de récurrence. Cette difficulté apparaît dans la preuve des résultats suivants : proposition 3.2, proposition 3.6, proposition 3.11, lemme 3.60, lemme 3.61, proposition 6.23, proposition 6.27, lemme 9.6 et lemme 9.33.

Considérons la proposition 3.2. Pour sa preuve, il est naturel d'essayer la chose suivante :
Soit $d \in \mathcal{D}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:

$$\exists (a_0; \cdots; a_n) \in \mathcal{D}^n\,; \quad \Big((a_0 \,=\, d) \text{ et } \big(n \,>\, 0 \implies \forall j \in [\![1; n-1]\!]\,,\, a_{j+1} \,=\, f(a_j)\big)\Big)\,. \tag{9.21}$$

En prenant $a_0 = d$, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puisque l'implication dans (9.21) est vraie lorsque $(n > 0)$ est fausse. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc un $(a_0; \cdots; a_n) \in \mathcal{D}^n$ tel que la proposition entre grandes paranthèses dans (9.21) soit vraie. En particulier, $a_n \in \mathcal{D}$ donc $f(a_n)$ est bien défini. On pose $a_{n+1} = f(a_n)$. On vérifie maintenant, pour ce $(a_0; \cdots; a_n; a_{n+1})$, la proposition entre grandes paranthèses dans (9.21) avec n remplacé par $n+1$ est vraie. On a déjà $a_0 = d$ par hypothèse de récurrence. Soit $j \in [\![1; (n+1)-1]\!]$. Si $j < n$, on a, par hypothèse de récurrence, $a_{j+1} = f(a_j)$. De plus, par construction, on a aussi $a_{n+1} = f(a_n)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On définit une suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ de la façon suivante : Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, on a un $(a_0; \cdots; a_n; a_{n+1}) \in \mathcal{D}^n$ pour lequel la proposition entre grandes paranthèses dans (9.21) avec n remplacé par $n+1$ est vraie. On pose $u_n = a_n \in \mathcal{D}$.
Pour vérifier la relation de récurrence (3.1), on se trouve confronté au problème suivant. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut vérifier que $u_{n+1} = f(u_n)$ mais u_{n+1} est défini par $\mathcal{P}(n+2)$ tandis que u_n est défini par $\mathcal{P}(n+1)$. La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ donne un $(a_0; \cdots; a_n; a_{n+1})$ tel que la proposition entre grandes paranthèses dans (9.21) soit vraie avec n remplacé par $n+1$. La proposition $\mathcal{P}(n+2)$ donne un $(a'_0; \cdots; a'_n; a'_{n+1}; a'_{n+2})$ tel que la proposition entre grandes paranthèses dans (9.21) soit vraie avec n remplacé par $n+2$ et

$(a_0;\cdots;a_n;a_{n+1};a_{n+2})$ remplacé par $(a'_0;\cdots;a'_n;a'_{n+1};a'_{n+2})$. Par construction de u, on a $u_n = a_n$ et $a_{n+1} = f(u_n)$, d'une part, et $u_{n+1} = a'_{n+1}$, d'autre part. Comment être sûr que l'on a $a'_{n+1} = a_{n+1}$?
Ce problème se pose aussi, si l'on choisit de définir u_n comme égal au a_n donné par $\mathcal{P}(n)$.

On rencontre une difficulté similaire dans les preuves de la proposition 3.6, de la proposition 3.11, du lemme 3.60, du lemme 3.61, de la proposition 6.23, de la proposition 6.27, du lemme 9.6 et du lemme 9.33. Dans chaque cas, le problème se pose pour la construction de suites vérifiant des propriétés de récurrence.

Essayons de prouver la proposition 3.6 en utilisant, pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ donnée par :

$$\exists (a_{n_0};\cdots;a_n) \in \mathbb{K}^{n-n_0+1}\,;\ \Big((a_{n_0} = u_{n_0}) \text{ et } \big(n > n_0 \implies \forall j \in [\![n_0;n-1]\!], a_{j+1} = a_j + u_{j+1}\big)\Big). \quad (9.22)$$

On vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire. On doit maintenant construire une suite $s = (s_n)_{n\in[\![n_0;+\infty[\![}$ vérifiant la relation de récurrence (3.4). Pour $n \geq n_0$, on définit s_n par le a_n donné par $\mathcal{P}(n+1)$. Prenons un $(a'_0;\cdots;a'_n;a'_{n+1};a'_{n+2})$ tel que la proposition entre grandes paranthèses dans (9.22) soit vraie avec n remplacé par $n+2$ et $(a_0;\cdots;a_n;a_{n+1};a_{n+2})$ remplacé par $(a'_0;\cdots;a'_n;a'_{n+1};a'_{n+2})$. On a donc $s_{n+1} = a'_{n+1}$. Par $\mathcal{P}(n+2)$, on sait que $s_{n+1} = a'_n + u_{n+1}$ et, par $\mathcal{P}(n+1)$, on sait que $a_{n+1} = s_n + u_{n+1}$. Donc $s_{n+1} = a'_n - a_n + s_n + u_{n+1}$. Qu'est-ce qui garantit que l'on a $a'_n = a_n$? On retombe donc bien sur un problème similaire au précédent.

On voit que le problème vient du fait que, dans l'hypothèse de récurrence, on a l'existence d'un certain objet mais on a oublié le lien de cet objet avec l'objet aux rangs précédents. Dans le cas de la preuve de la proposition 3.6, on ne sait donc pas si $a'_n = a_n$.
Il faudrait remplacer l'hypothèse de récurrence par quelque chose comme "supposons construits $a_0,\cdots,a_n$ tel que .... et montrons que l'on peut construire a_{n+1} vérifiant ....". Mais on doit justifier un tel raisonnement, de préférence avec le théorème 1.4. On a donc besoin de traduire l'idée intuitive précédente dans le langage de ce théorème. C'est ce que l'on va faire dans les deux paragraphes suivants.

9.2.3 Construction par récurrence d'une suite.

Dans ce paragraphe, nous établissons un résultat abstrait de construction par récurrence d'une suite. Ce résultat nous permettra de contourner la difficulté soulevée au paragraphe 9.2.2 et nous sera utile dans les preuves de la proposition 3.2, de la proposition 3.6, de la proposition 3.11, du lemme 3.60, du lemme 3.61, de la proposition 6.23, du lemme 9.6 et du lemme 9.33.
Avant de donner ce résultat abstrait, voyons, sur l'exemple de la proposition 3.2, comment contourner la difficulté en question.

Preuve de la proposition 3.2 : Soit $d \in \mathcal{D}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :
Il existe une unique application $v^{(n)} : [\![0;n]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ telle que $v^{(n)}(0) = d$ et, pour $p \in [\![0;n[\![$, $v^{(n)}(p+1) = f(v^{(n)}(p))$.
Soit $v^{(0)} : [\![0;0]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $v^{(0)}(0) = d$. C'est la seule application vérifiant les conditions imposées dans $\mathcal{P}(0)$ (la deuxième condition étant remplie car l'ensemble $[\![0;0[\![$ est vide). Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Soit $v^{(n+1)} : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ l'application, dont la restriction à $[\![0;n]\!]$ est l'application $v^{(n)}$ fournie par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ et dont la valeur en $n+1$ est $v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n)}(n))$. On a $v^{(n+1)}(0) = v^{(n)}(0) = d$.
Soit $p \in [\![0;n+1[\![$. Si $p < n$, on a $p \leq p+1 \leq n$ donc $v^{(n+1)}(p+1) = v^{(n)}(p+1) = f(v^{(n)}(p)) = f(v^{(n+1)}(p))$, d'après l'hypothèse de récurrence. De plus, pour $p = n$, $v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n)}(n)) = f(v^{(n+1)}(n))$ car $v^{(n+1)}$ et $v^{(n)}$ coïncident sur $[\![0;n]\!]$. Donc $v^{(n+1)}$ vérifient les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$.
Soit $w : [\![0;n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant ces mêmes contraintes. La restriction de w à $[\![0;n]\!]$ vérifie donc les contraintes imposées par $\mathcal{P}(n)$. D'après l'unicité de $v^{(n)}$, w coïncide avec $v^{(n)}$ sur $[\![0;n]\!]$ donc coïncide avec $v^{(n+1)}$ sur $[\![0;n]\!]$. De plus, $w(n+1) = f(w(n))$. D'après ce qui précède, $w(n+1) = f(w(n)) = f(v^{(n+1)}(n)) = v^{(n+1)}(n+1)$. Donc $w = v^{(n+1)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $m \geq n$, la restriction à $[\![0;n]\!]$ de l'application $v^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc $v^{(m)}_{|[\![0;n]\!]} = v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $v : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ définie par $v_0 = d$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v^{(n)}(n)$, où $v^{(n)}$ est l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v^{(n+1)}(n+1) = f(v^{(n+1)}(n)) = f(v^{(n)}(n)) = f(v_n)$, puisque $v^{(n+1)}$ et $v^{(n)}$ coïncident sur $[\![0;n]\!]$. Donc v vérifie la relation de récurrence (3.1).
Il reste à vérifier l'unicité de la suite v. Soit $w : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $w_0 = d$ et (3.1) avec u remplacée par w. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(n) = (v_n = w_n)$. Comme $v_0 = d = w_0$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(n)$ soit vraie, pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $v_n = w_n \in \mathcal{D}$ donc $f(v_n) = f(w_n)$ et, par (3.1) (pour v et pour w), $v_{n+1} = f(v_n) = f(w_n) = w_{n+1}$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $w = v$. □.

Dans cette preuve, la "mémoire" des premiers termes est assurée, dans la proposition à l'ordre n, par l'utilisation d'une application définie sur $[\![0;n]\!]$ et par l'unicité de cette application. Elle se manifeste dans l'égalité $v^{(m)}_{|[\![0;n]\!]} = v^{(n)}$, pour $m \geq n$.

On va établir maintenant le résultat abstrait de construction par récurrence de suite, qui réalise dans un cadre très général la construction que l'on a faite dans la preuve de proposition 3.2. Ce résultat abstrait nous permettra de reformuler cette dernière preuve et de prouver les autres résultats mentionnés plus haut, sauf la proposition 6.27. Pour cette dernière, nous aurons besoin d'une extension du résultat abstrait (cf. paragraphe 9.2.4).

Pour ce faire, on se donne un ensemble non vide $\mathcal{V}$ pour contenir les valeurs de la suite à construire. On se donne un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, qui correspond à l'indice d'initialisation de la construction. Pour $p \in [\![n_0;+\infty[\![$, on considère

$$\mathcal{S}_p \;=\; \mathcal{V}^{[\![n_0;p]\!]} \;:=\; \left\{u \,:\, [\![n_0;p]\!] \longrightarrow \mathcal{V}\right\}, \tag{9.23}$$

l'ensemble des suites définies sur $[\![n_0;p]\!]$ et à valeurs dans $\mathcal{V}$.
Pour représenter la condition initiale dans la construction de la suite, on se donne $d \in \mathcal{V}$. Pour modéliser la relation de récurrence intervenant dans la construction, on se donne, pour $p \in [\![n_0;+\infty[\![$, $\lambda \in \mathcal{V}$ et $u \in \mathcal{S}_p$, une proposition $\mathcal{R}_p(\lambda;u)$. On impose à cette famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda;u)\,;\; p \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \lambda \in \mathcal{V}\,, u \in \mathcal{S}_p\}$ de propositions la propriété suivante :

$$\forall\, p \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\, \forall\, u \in \mathcal{S}_p\,,\, \exists!\, \lambda \in \mathcal{V}\,;\; \mathcal{R}_p(\lambda;u)\,. \tag{9.24}$$

Le résultat abstrait de construction par récurrence est le suivant.

Théorème 9.20. *Soit $\mathcal{V}$ un ensemble et $d \in \mathcal{V}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in [\![n_0;+\infty[\![$, on définit l'ensemble $\mathcal{S}_p$ par* (9.23)*. On considère une famille de propositions $\{\mathcal{R}_p(\lambda;u)\,;\; p \in [\![n_0;+\infty[\![\,, \lambda \in \mathcal{V}\,, u \in \mathcal{S}_p\}$ qui vérifie la propriété* (9.24)*.*
Alors il existe une unique application $v : [\![n_0;+\infty[\![\longrightarrow \mathcal{V}$ telle que $v(n_0) = d$ et

$$\forall\, p \in [\![n_0;+\infty[\![\,,\, \mathcal{R}_p\Big(v(p+1)\,;\, v_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)\,. \tag{9.25}$$

Preuve : Pour $n \in [\![n_0;+\infty[\![$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :
Il existe une unique application $v^{(n)} \in \mathcal{S}_n$ telle que $v^{(n)}(n_0) = d$ et, pour $p \in [\![n_0;n]\!]$, on ait

$$\mathcal{R}_p\Big(v^{(n)}(p+1)\,;\, v^{(n)}_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)\,.$$

Soit $u : [\![n_0;n_0]\!] \longrightarrow \mathcal{V}$ donnée par $u(n_0) = d$. On a bien $u \in \mathcal{S}_{n_0}$ et la seconde condition dans $\mathcal{P}(n_0)$ est vérifiée, car l'ensemble $[\![n_0;n_0[\![$ est vide. Donc u vérifie les conditions imposées dans $\mathcal{P}(n_0)$ et c'est la seule. On a montré que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in [\![n_0;+\infty[\![$. Soit $v^{(n+1)} : [\![n_0;n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{V}$ l'application, dont la restriction à $[\![n_0;n]\!]$ est l'application $v^{(n)}$ fournie par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ et dont la valeur en $n+1$ est l'unique $\lambda \in \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{R}_n(\lambda\,;\, v^{(n)})$ soit vraie. On a donc $v^{(n+1)} \in \mathcal{S}_{n+1}$ et $v^{(n+1)}(n_0) = v^{(n)}(n_0) =$

d. Soit $p \in [\![n_0; n+1[\![$. Si $p < n$ alors $p+1 \leq n$ donc $v^{(n+1)}(p+1) = v^{(n)}(p+1)$ et $v^{(n+1)}_{|[\![n_0;p]\!]} = v^{(n)}_{|[\![n_0;p]\!]}$. Par l'hypothèse de récurrence,

$$\mathcal{R}_p\Big(v^{(n+1)}(p+1)\,;\, v^{(n+1)}_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)$$

est vraie. De plus, par définition de $v^{(n+1)}(n+1)$,

$$\mathcal{R}_n\Big(v^{(n+1)}(n+1)\,;\, v^{(n+1)}_{|[\![n_0;n]\!]}\Big)$$

est vraie. Donc $v^{(n+1)}$ vérifient les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$.
Soit $w : [\![n_0; n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{V}$ vérifiant ces mêmes contraintes. La restriction de w à $[\![n_0; n]\!]$ vérifie donc les contraintes imposées par $\mathcal{P}(n)$. D'après l'unicité de $v^{(n)}$, w coïncide avec $v^{(n)}$ sur $[\![n_0; n]\!]$ donc coïncide avec $v^{(n+1)}$ sur $[\![n_0; n]\!]$. Comme

$$\mathcal{R}_n\Big(w(n+1)\,;\, w_{|[\![n_0;n]\!]}\Big)$$

est vraie et comme $w_{|[\![n_0;n]\!]} = v^{(n)}_{|[\![n_0;n]\!]} = v^{(n)}$, on a, d'après (9.24) et la définition du terme $v^{(n+1)}(n+1)$, $w(n+1) = v^{(n+1)}(n+1)$. Donc $w = v^{(n+1)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0; +\infty[\![$. Pour $(m, n) \in [\![n_0; +\infty[\![^2$ avec $m \geq n$, la restriction à $[\![n_0; n]\!]$ de l'application $v^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc, par l'unicité dans $\mathcal{P}(n)$, $v^{(m)}_{|[\![n_0;n]\!]} = v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $v : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathcal{V}$ définie par $v(n_0) = d$ et, pour $n \in [\![n_0 + 1; +\infty[\![$, $v(n) = v^{(n)}(n)$, où $v^{(n)}$ est l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$. Soit $p \in [\![n_0; +\infty[\![$. D'après $\mathcal{P}(p+1)$, on a

$$\mathcal{R}_p\Big(v^{(p+1)}(p+1)\,;\, v^{(p+1)}_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)\,.$$

Pour $q \in [\![n_0; p]\!]$, $v(q) = v^{(q)}(q) = v^{(p+1)}(q)$, car $q \leq p+1$. Donc $v_{|[\![n_0;p]\!]} = v^{(p+1)}_{|[\![n_0;p]\!]}$. Comme $v(p+1) = v^{(p+1)}(p+1)$, on en déduit que

$$\mathcal{R}_p\Big(v(p+1)\,;\, v_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)$$

est vraie. On a montré (9.25).
Il reste à montrer l'unicité de v. Soit $w : [\![n_0; +\infty[\![\longrightarrow \mathcal{V}$ vérifiant $w(n_0) = d$ et (9.25) avec v remplacée par w. On a $w(n_0) = d = v(n_0)$. Pour $p \in [\![n_0; +\infty[\![$, on obtient, comme précédemment, que $w_{|[\![n_0;p]\!]} = v^{(p+1)}_{|[\![n_0;p]\!]} = v_{|[\![n_0;p]\!]}$. Ceci étant vrai pour tout $p \in [\![n_0; +\infty[\![$, $w = v$. □

Remarque 9.21. *La preuve du théorème 9.20 permet de rendre rigoureux le raisonnement intuitif suivant. Posons $v(n_0) = d$. Supposons construits, pour un $n \in [\![n_0; +\infty[\![$, les termes $v(n_0), \cdots, v(n)$ tels que, pour tout $p \in [\![n_0; n[\![$,*

$$\mathcal{R}_p\Big(v(p+1); v_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)$$

soit vraie. On pose $v(n+1) := \alpha$, où α est l'unique élément λ de $\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{R}_p(\lambda; v_{|[\![n_0;n]\!]})$ est vraie (cf. (9.24)*). Pour tout $p \in [\![n_0; n+1[\![$,*

$$\mathcal{R}_p\Big(v(p+1); v_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)$$

est vraie. Par le théorème de récurrence, on a construit l'application v.

Revenons maintenant à la proposition 3.2 et prouvons-là en utilisant le théorème 9.20.

Preuve de la proposition 3.2, seconde version : On pose $\mathcal{V} = \mathcal{D}$. Soit $d \in \mathcal{D}$. Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{S}_p$ par (9.23) avec $n_0 = 0$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathcal{D}$ et $u \in \mathcal{S}_p$, soit $\mathcal{R}_p(\lambda; u)$ la proposition $(\lambda = f(u(p))$.
On note que $\mathcal{R}_p(\lambda; u)$ est bien définie car, comme u est à valeurs dans $\mathcal{D}$ et $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$, $f \circ u$ est bien définie et à valeurs dans $\mathcal{D}$ et $\lambda \in \mathcal{D}$.
Soit $p \in \mathbb{N}$ et $u \in \mathcal{S}_p$. Il existe un unique $\lambda \in \mathcal{D}$ vérifiant $\lambda = f(u(p))$, à savoir $f(u(p))$. Donc la famille

$\{\mathcal{R}_p(\lambda;u)\,;\,p\in\mathbb{N},u\in\mathcal{S}_p,\lambda\in\mathcal{D}\}$ vérifie bien (9.24) avec $n_0=0$ et $\mathcal{V}=\mathcal{D}$. On peut donc appliquer le théorème 9.20 avec $n_0=0$. Il existe donc une unique suite $v:\mathbb{N}\longrightarrow\mathcal{D}$ telle que $v(0)=d$ et

$$\forall\, p\in\mathbb{N}\,,\quad v(p+1)\;=\;f\big(v(p)\big)\,,$$

ce qui termine la démonstration. □

De manière similaire, on démontre ci-dessous la proposition 3.6, la proposition 3.11, le lemme 3.60, le lemme 3.61, la proposition 6.23 et le lemme 9.6.

Preuve de la proposition 3.6 (et de la proposition 3.11) : Soit $\mathcal{V}=\mathbb{K}$. Pour tout $p\in[\![n_0;+\infty[\![$, on définit $\mathcal{S}_p$ par (9.23). Pour $p\in[\![n_0;+\infty[\![$, pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $w\in\mathcal{S}_p$, soit $\mathcal{R}_p(\lambda;w)$ la proposition $(\lambda=w(p)+u(p+1))$. On note que $\mathcal{R}_p(\lambda;w)$ est bien définie.
Soit $p\in[\![n_0;+\infty[\![$ et $w\in\mathcal{S}_p$. Il existe bien un unique $\lambda\in\mathbb{K}$ vérifiant $\lambda=w(p)+u(p+1)$, à savoir $w(p)+u(p+1)$. Donc la famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda;w)\,;\,p\in\mathbb{N},w\in\mathcal{S}_p,\lambda\in\mathbb{K}\}$ vérifie bien (9.24). On peut donc appliquer le théorème 9.20 avec $d=u(n_0)\in\mathcal{V}$. Il existe donc une unique suite $s:[\![n_0;+\infty[\![\longrightarrow\mathcal{D}$ telle que $s(n_0)=u(n_0)$ et

$$\forall\, p\in[\![n_0;+\infty[\![\,,\quad s(p+1)\;=\;s(p)\;+\;u(p+1)\,.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 3.6. Pour celle de la proposition 3.11, il suffit de reprendre l'argumentation précédente avec pour $\mathcal{R}_p(\lambda;w)$ la proposition $(\lambda=w(p)\cdot u(p+1))$. □

Pour préparer la preuve suivante, on rappelle que, si D est une partie infinie de $\mathbb{N}$, $u:D\longrightarrow\mathbb{R}$ une suite réelle et B est une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble $u^{-1}(B)$ est la partie de D définie par

$$u^{-1}(B)\;:=\;\big\{p\in D\,;\;u_p\in B\big\}\,.$$

Preuve du lemme 3.60 : Vérifions tout d'abord que $a\le b$. Comme D est infini, il est non vide. Soit $n\in D$. Par hypothèse, $a\le u_n$ et $u_n\le b$. Donc $a\le b$.
Soit $\mathcal{V}:=[a;b]^2$. Soit $p\in\mathbb{N}$, on définit $\mathcal{S}_p$ par (9.23) avec $n_0=0$. Pour une application $w\in\mathcal{S}_p$, on note par w^- et w^+ ces composantes, c'est-à-dire les applications $w^-:[\![0;p]\!]\longrightarrow[a;b]$ et $w^+:[\![0;p]\!]\longrightarrow[a;b]$ qui vérifient, pour $n\in[\![0;p]\!]$, $w_n=(w_n^-;w_n^+)\in[a;b]^2$. Pour $p\in\mathbb{N}$, $\lambda=(\lambda^-;\lambda^+)\in\mathcal{V}$ et $w\in\mathcal{S}_p$, soit $\mathcal{R}_p(\lambda;w)$ la proposition :
(si l'ensemble

$$u^{-1}\Big(\Big[w^-(p)\,;\,\frac{w^-(p)+w^+(p)}{2}\Big]\Big) \tag{9.26}$$

est infini, $\lambda^-=w^-(p)$ et $\lambda^+=(w^-(p)+w^+(p))/2$, et $\lambda^-=(w^-(p)+w^+(p))/2$ et $\lambda^+=w^+(p)$, sinon.)
On note que $\mathcal{R}_p(\lambda;w)$ est bien définie. De plus, si $w^-(p)\le w^+(p)$ et si $\mathcal{R}_p(\lambda;w)$ est vraie alors

$$w^-(p)\;\le\;\lambda^-\;\le\;\lambda^+\;\le\;w^+(p)\,. \tag{9.27}$$

Soit $p\in\mathbb{N}$ et $w\in\mathcal{S}_p$. Il existe un unique $\lambda\in\mathcal{V}$ tel que $\mathcal{R}_p(\lambda;w)$ soit vraie, à savoir $\lambda=(w^-(p);(w^-(p)+w^+(p))/2)$, dans le cas où l'ensemble (9.26) est infini, et $\lambda=((w^-(p)+w^+(p))/2;w^+(p))$, dans l'autre cas. Donc la famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda;w)\,;\,p\in\mathbb{N},w\in\mathcal{S}_p,\lambda\in\mathcal{V}\}$ vérifie bien (9.24).
Soit $d=(a;b)\in\mathcal{V}$. Par le théorème 9.20 avec $n_0=0$, il existe une unique suite $v:\mathbb{N}\longrightarrow\mathcal{V}$ telle que, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{R}_p\Big(v(p+1);v_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)$$

soit vraie.
Pour $p\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition : $(v^-(p)\le v^+(p)\le v^-(p)+(b-a)2^{-p}$ et $u^{-1}([v^-(p)\,;\,v^+(p)])$ est infini et $v^-(p)\le v^-(p+1)\le v^+(p+1)\le v^+(p))$.
On a $v(0)=d=(a;b)$. Donc $v^-(0)\le v^+(0)=v^-(0)+(b-a)2^0$. Comme v est à valeurs dans $[a;b]$, $u^{-1}([v^-(0)\,;\,v^+(0)])=D$, qui est infini.
Si l'ensemble

$$u^{-1}\Big(\Big[v^-(0)\,;\,\frac{v^-(0)+v^+(0)}{2}\Big]\Big) \tag{9.28}$$

est infini alors, d'après $\mathcal{R}_1(v(1); v_{|\{0\}})$, $v^-(1) = v^-(0)$ et $v^+(1) = (v^-(0) + v^+(0))/2 \in [v^-(1); v^+(0)]$, car $v^-(1) = v^-(0) \leq v^+(0)$.
Si l'ensemble (9.28) est fini alors, d'après $\mathcal{R}_1(v(1); v_{|\{0\}})$, $v^+(1) = v^+(0)$ et $v^-(1) = (v^-(0) + v^+(0))/2 \in [v^-(0); v^+(1)]$, car $v^-(0) \leq v^+(0) = v^+(1)$.
On a montré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(p)$ pour un $p \in \mathbb{N}$. Comme

$$u^{-1}\Big(\big[v^-(p)\,;\,v^+(p)\big]\Big) \;=\; u^{-1}\Big(\Big[v^-(p)\,;\,\frac{v^-(p)+v^+(p)}{2}\Big]\Big) \bigcup u^{-1}\Big(\Big[\frac{v^-(p)+v^+(p)}{2}\,;\,v^+(p)\Big]\Big) \tag{9.29}$$

et comme $u^{-1}([v^-(p)\,;\,v^+(p)])$ est infini, par hypothèse de récurrence, au moins l'un des ensembles à droite de (9.29) est infini, par la proposition 9.3.
Si le premier de ces ensembles est infini alors, d'après $\mathcal{R}_p(v(p+1); v_{|[\![n_0;p]\!]})$, on a $v^-(p+1) = v^-(p)$ et $v^+(p+1) = (v^-(p) + v^+(p))/2$. Par hypothèse de récurrence, on a $v^-(p) \leq v^+(p) \leq v^-(p) + (b-a)2^{-p}$ et $v^-(p) \leq v^-(p+1) \leq v^+(p+1) \leq v^+(p)$. Donc $v^+(p+1) - v^-(p+1) = (v^+(p) - v^-(p))/2 \leq (b-a)\cdot 2^{-p}/2 = (b-a)\cdot 2^{-(p+1)}$ et, d'après (9.27) (avec p remplacé par $p+1$, w remplacée par v et λ remplacé par $v(p+2)$), $v^-(p+1) \leq v^-(p+2) \leq v^+(p+2) \leq v^+(p+1)$. De plus, l'ensemble $u^{-1}([v^-(p+1)\,;\,v^+(p+1)])$ est égal à ce premier ensemble à droite de (9.29) donc est infini.
Si le premier ensemble à droite de (9.29) est fini alors l'autre est infini. D'après $\mathcal{R}_p(v(p+1); v_{|[\![n_0;p]\!]})$, on a $v^-(p+1) = (v^-(p) + v^+(p))/2$ et $v^+(p+1) = v^+(p)$. Par hypothèse de récurrence, on a $v^-(p) \leq v^+(p) \leq v^-(p) + (b-a)2^{-p}$ et $v^-(p) \leq v^-(p+1) \leq v^+(p+1) \leq v^+(p)$. Donc $v^+(p+1) - v^-(p+1) = (v^+(p) - v^-(p))/2 \leq (b-a)\cdot 2^{-p}/2 = (b-a)\cdot 2^{-(p+1)}$ et, d'après (9.27) (avec p remplacé par $p+1$, w remplacée par v et λ remplacé par $v(p+2)$), $v^-(p+1) \leq v^-(p+2) \leq v^+(p+2) \leq v^+(p+1)$. De plus, l'ensemble $u^{-1}([v^-(p+1)\,;\,v^+(p+1)])$ est égal au second ensemble à droite de (9.29) donc est infini.
On a montré $\mathcal{P}(p+1)$.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), on en déduit que $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. Cela montre en particulier que v^- est croissante et v^+ est décroissante (cf. proposition 3.23) et que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $v^-(p) \leq v^+(p)$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|v^+(p) - v^-(p)| \leq (b-a)\cdot 2^{-p}$. Par la proposition 3.58, $\lim\limits_p 2^{-p} = 0$ donc, par produit, $\lim\limits_p (b-a)\cdot 2^{-p} = 0$ (cf. proposition 3.46). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.45), $\lim\limits_p (v^+(p) - v^-(p)) = 0$. Les suites v^- et v^+ sont donc adjacentes (cf. définition 3.52). De plus, $v^-(0) = a$ et $v^+(0) = b$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\big\{q \in D\,;\; u_q \,\in\, [v^-(p)\,;\,v^+(p)]\big\} \;=\; u^{-1}\Big(\big[v^-(p)\,;\,v^+(p)\big]\Big)$$

est infini, d'après $\mathcal{P}(p)$. □

Preuve du lemme 3.61 : Soit $\mathcal{V} = D$ et $d = \min D$ (cf. proposition 9.4). Pour $p \in \mathbb{N}$, on définit $\mathcal{S}_p$ par (9.23) avec $n_0 = 0$. Pour $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathcal{V}$ et $w \in \mathcal{S}_p$, soit $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ la proposition

$$\Big(\lambda \;=\; \min\Big(u^{-1}\big([\alpha(p+1); \beta(p+1)]\big) \setminus w\big([\![0;p]\!]\big)\Big)\Big)\ .$$

Notons que, pour $p \in \mathbb{N}$, $[\![0;p]\!]$ et $w([\![0;p]\!])$ sont des ensembles finis, d'après les propositions 9.4 et 9.3, respectivement. Comme $u^{-1}([\alpha(p+1); \beta(p+1)])$ est un ensemble infini (cf. lemme 3.60), il en est de même de $u^{-1}([\alpha(p+1); \beta(p+1)]) \setminus w([\![0;p]\!])$ (cf. proposition 9.3) donc cet ensemble est non vide. De plus, il s'agit d'une partie de $\mathbb{N}$. Par la proposition 9.4, il admet un minimum. Donc $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ est bien définie et, par unicité du minimum d'un ensemble, $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ n'est valide que pour λ égal au minimum de $u^{-1}([\alpha(p+1); \beta(p+1)]) \setminus w([\![0;p]\!])$. Donc la famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda; u)\,;\, p \in \mathbb{N}, w \in \mathcal{S}_p, \lambda \in \mathcal{V}\}$ vérifie bien (9.24) avec $n_0 = 0$.
On applique le théorème 9.20 avec $d = \min D$ et $n_0 = 0$. Il existe donc une unique suite $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow D$ telle que $\varphi(0) = d$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(p+1) \;=\; \min\Big(u^{-1}\big([\alpha(p+1); \beta(p+1)]\big) \setminus \varphi\big([\![0;p]\!]\big)\Big)\ . \tag{9.30}$$

On a $a \leq u_d = u(\varphi(0)) \leq b$. De plus, pour $p \in \mathbb{N}$, on a, par (9.30), $\varphi(p+1) \in u^{-1}([\alpha(p+1); \beta(p+1)])$ donc $u(\varphi(p+1)) \in [\alpha(p+1); \beta(p+1)]$. Donc (3.51) est vraie. Il reste à montrer que la suite φ est strictement

croissante.
Pour $q \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(q) = (\varphi(q+1) > \varphi(q))$. Comme $\varphi(0) = d = \min D$, on a, par (9.30) avec $p = 0$, $\varphi(1) \in D$ et $\varphi(1) \neq d$ donc $\varphi(1) > d$. Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.
Supposons que, pour un $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}(p)$ soit vraie pour tout $p \in [\![0; q]\!]$. Par (9.30) avec p remplacé par $q+1$, $\varphi(q+2) \notin \varphi([\![0; q+1]\!])$ et $\varphi(q+2) \in D$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a, pour tout $p \in [\![0; q]\!]$, $\varphi(p+1) > \varphi(p)$.
Supposons qu'il existe $p \in [\![0; q]\!]$ tel que $\varphi(p+1) > \varphi(q+2) > \varphi(p)$. On a $\varphi(q+2) \notin \varphi([\![0; p]\!])$ car $\varphi(q+2) \notin \varphi([\![0; q+1]\!])$. Comme α est croissante, β décroissante et $\varphi(q+2) \in u^{-1}([\alpha(q+2); \beta(q+2)])$,

$$\alpha_{p+1} \ \leq \ \alpha_{q+2} \ \leq \ u_{\varphi(q+2)} \ \leq \ \beta_{q+2} \ \leq \beta_{p+1}$$

donc $\varphi(q+2) \in u^{-1}([\alpha(p+1); \beta(q+1)])$. D'où $\varphi(q+2) \in u^{-1}([\alpha(p+1); \beta(q+1)]) \setminus \varphi([\![0; p]\!])$. Comme $\varphi(p+1) > \varphi(q+2)$, on a une contradiction avec (9.30).
Donc, pour tout $p \in [\![0; q+1]\!]$, $\varphi(q+2) > \varphi(p)$. En particulier, $\mathcal{Q}(q+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence forte (cf. théorème 9.14 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$. Par la proposition 3.23, φ est strictement croissante. □

Preuve de la proposition 6.23 : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I; \mathbb{K})$ par C^n. On rappelle que les espaces C^0 et C^1 ont été définis dans les définitions 6.17 et 6.19, respectivement.
Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de C^1 et on pose $d = C^1$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathcal{S}_p$ par (9.23) avec $n_0 = 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathcal{V}$ et $w \in \mathcal{S}_p$, soit $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ la proposition

$$\Big(\lambda \ = \ \big\{f \in \mathbb{K}^I \,;\ f \text{ est dérivable et } f' \in w(p)\big\}\Big) .$$

Pour vérifier que $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ est bien définie, on doit vérifier que l'ensemble apparaissant à droite de l'égalité précédente est un sous-espace vectoriel de C^1. Appelons $\mathcal{E}$ cet ensemble.
Pour $f \in \mathcal{E}$, f est dérivable et $f' \in w(p)$. Comme $w(p) \subset C^1$ et comme $C^1 \subset C^0$ (cf. proposition 6.20), $f' \in C^0$. D'après la définition 6.19, $f \in C^1$. Donc $\mathcal{E} \subset C^1$.
L'ensemble $\mathcal{E}$ contient la fonction nulle sur I. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $(f; g) \in \mathcal{E}^2$. Comme f et g sont dérivables, $af+g$ l'est aussi et $(af+g)' = af'+g$, par la proposition 6.8. Comme f' et g' appartiennent au sous-espace vectoriel $w(p)$ de C^1, $(af+g)' \in w(p)$. Donc $(af+g) \in \mathcal{E}$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc bien un sous-espace vectoriel de C^1.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $w \in \mathcal{S}_p$. Il existe un unique $\lambda \in \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ est vraie, à savoir

$$\lambda \ = \ \big\{f \in \mathbb{K}^I \,;\ f \text{ est dérivable et } f' \in w(p)\big\} .$$

Donc la famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda; w) \,;\, p \in \mathbb{N}^*, w \in \mathcal{S}_p, \lambda \in \mathbb{K}\}$ vérifie la condition (9.24) avec $n_0 = 1$. On peut donc appliquer le théorème 9.20 avec $n_0 = 1$. Il existe donc une unique suite $\widehat{C} : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathcal{V}$ telle que $\widehat{C}(1) = C^1$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\widehat{C}(p+1) \ = \ \big\{f \in \mathbb{K}^I \,;\ f \text{ est dérivable et } f' \in \widehat{C}(p)\big\} .$$

Soit $\mathcal{V}_0$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de C^0. Comme $C^1 \subset C^0$ (cf. proposition 6.20), $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_0$. Soit $C : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{V}_0$ définie par $C(0) = C^0$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $C(p) = \widehat{C}(p)$. Par la définition 6.19 et les propriétés de la suite $\widehat{C}$, la suite C vérifie (6.7). □

Preuve du lemme 9.6 : Soit $\mathcal{V} = D$ et $d = \min D$ (cf. proposition 9.4). Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathcal{S}_p$ par (9.23) avec $n_0 = 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathcal{V}$ et $w \in \mathcal{S}_p$, soit $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ la proposition

$$\Big(\lambda \ = \ \min\Big(D \cap]\!]w(p) \,;\, +\infty[\![\Big)\Big) .$$

Comme $D \cap]\!]w(p) \,;\, +\infty[\![$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$, elle admet un minimum (cf. proposition 9.4). Donc $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ est bien définie.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $w \in \mathcal{S}_p$. Il existe un unique $\lambda \in \mathcal{V}$ vérifiant $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$, à savoir $\min(D \cap]\!]w(p) \,;\, +\infty[\![)$. Donc la famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda; w) \,;\, p \in \mathbb{N}^*, w \in \mathcal{S}_p, \lambda \in \mathcal{V}\}$ vérifie bien (9.24) avec $n_0 = 1$. On peut donc appliquer le

théorème 9.20 avec $n_0 = 1$. Il existe donc une unique suite $v : \mathbb{N}^* \longrightarrow D$ telle que $v(0) = d$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$v(p+1) \;=\; \min\Big(D \cap \,]v(p)\,;\,+\infty[\Big)\,. \tag{9.31}$$

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a, d'après (9.31), $v(p+1) > v(p)$. Par la proposition 3.23, v est strictement croissante. Elle est donc injective.
Il reste à montrer que $v(\mathbb{N}^*) = D$ (cf. proposition 9.2). Par construction, on a $v(\mathbb{N}^*) \subset D$. Soit $q \in D$. On considère l'ensemble $E = \{p \in \mathbb{N}^*; v(p) \leq q\}$. Comme $v_{|E}(E) \subset [\![0; q]\!]$, $v_{|E}(E)$ est une partie finie de D (cf. proposition 9.4). Comme la restriction $v_{|E}$ de v à E est injective, E est aussi fini (cf. proposition 9.3). Par la proposition 9.4, E admet un maximum $p_0 \in \mathbb{N}^*$. Par définition de p_0, $v(p_0) \leq q$ et $p_0 + 1 \notin E$ donc $v(p_0 + 1) > q$. Supposons $v(p_0) < q$. Donc $q \in D \cap \,]v(p_0); +\infty[\![$. Comme $v(p_0 + 1) > q$, on a une contradiction avec (9.31) pour $p = p_0$. Donc $v(p_0) = q$ et $q \in v(\mathbb{N}^*)$. On a montré que $v(\mathbb{N}^*) = D$. □

Preuve du lemme 9.33 : Soit $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ et $d := E(bx) \in \mathbb{R}$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathcal{S}_p$ par (9.23) avec $n_0 = 1$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathcal{V}$ et $w \in \mathcal{S}_p$, soit $\mathcal{R}_p(\lambda; w)$ la proposition

$$\left(\lambda \;=\; E\left(b^{p+1}\Big(x \,-\, \sum_{k=1}^{p} \frac{w_k}{b^k}\Big)\right)\right)\,.$$

La famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda; u)\,;\, p \in [\![1; +\infty[\![\,, \lambda \in \mathcal{V}\,, w \in \mathcal{S}_p\}$ vérifie la propriété (9.24). On peut donc appliquer le théorème 9.20 avec $n_0 = 1$. Il existe donc une unique suite $a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathcal{V} = \mathbb{R}$ vérifiant (9.25) c'est-à-dire vérifiant (9.41). □

9.2.4 Construction par récurrence éventuellement finie d'une suite.

On établit ici une extension du théorème 9.20 de construction par récurrence d'une suite. Cette extension permet la construction par récurrence éventuellement finie d'une suite, dans l'esprit du théorème 9.17, mais aussi un contrôle plus précis sur les termes de la suite. Cette extension nous permet de donner une preuve de la proposition 6.27.

De nouveau, on se donne un ensemble non vide $\mathcal{V}$ pour contenir les valeurs de la suite à construire. On se donne un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, qui correspond à l'indice d'initialisation de la construction.
Soit $n_b \in (]n_0 + 1; +\infty[\![\cup \{+\infty\})$ qui joue le rôle d'indice d'arrêt s'il est fini. On a choisi $n_b > n_0 + 1$ pour qu'il y ait au moins une étape de construction. Lorsque $n_b = +\infty$, on pose $n_b - 1 = +\infty$, par convention. Cette fois, on se donne une famille $\{\mathcal{V}_p; p \in [\![n_0; n_b[\![\}$ de parties non vides de $\mathcal{V}$. Pour $p \in [\![n_0; n_b[\![$, on considère

$$\mathcal{S}_p \;:=\; \big\{u \,:\, [\![n_0; p]\!] \longrightarrow \mathcal{V}\,;\; \forall\, k \in [\![n_0; p]\!]\,,\, u(k) \in \mathcal{V}_k\big\}\,, \tag{9.32}$$

Pour représenter la condition initiale dans la construction de la suite, on se donne $d \in \mathcal{V}_{n_0}$. Pour modéliser la relation de récurrence utilisée dans la construction, on se donne, pour $p \in [\![n_0; n_b - 1[\![$, $\lambda \in \mathcal{V}_{p+1}$ et $u \in \mathcal{S}_p$, une proposition $\mathcal{R}_p(\lambda; u)$. On impose à cette famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda; u)\,;\; p \in [\![n_0; n_b - 1[\![\,, \lambda \in \mathcal{V}_{p+1}\,, u \in \mathcal{S}_p\}$ de propositions la propriété suivante :

$$\forall\, p \in [\![n_0; n_b - 1[\![\,,\, \forall\, u \in \mathcal{S}_p\,,\, \exists!\, \lambda \in \mathcal{V}_{p+1}\,;\; \mathcal{R}_p(\lambda; u)\,. \tag{9.33}$$

Le résultat abstrait de construction par récurrence éventuellement finie est le suivant.

Théorème 9.22. *Soit $\mathcal{V}$ un ensemble non vide. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_b \in (]n_0 + 1; +\infty[\![\cup \{+\infty\})$. Soit $\{\mathcal{V}_p; p \in [\![n_0; n_b[\![\}$ une famille de parties non vides de $\mathcal{V}$. Soit $d \in \mathcal{V}_{n_0}$. Pour tout $p \in [\![n_0; n_b[\![$, on définit l'ensemble $\mathcal{S}_p$ par* (9.32)*. On considère une famille de propositions $\{\mathcal{R}_p(\lambda; u)\,;\; p \in [\![n_0; n_b - 1[\![\,, \lambda \in \mathcal{V}_{p+1}\,, u \in \mathcal{S}_p\}$ qui vérifie la propriété* (9.33)*.*
Alors il existe une unique application $v : [\![n_0; n_b[\![\longrightarrow \mathcal{V}$ telle que $v(n_0) = d$ et

$$\forall\, p \in [\![n_0; n_b - 1[\![\,,\, \mathcal{R}_p\Big(v(p+1)\,;\, v_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)\,. \tag{9.34}$$

Remarque 9.23. *Dans la propriété* (9.34)*, il est implicite que la restriction* $v_{|[\![n_0;p]\!]}$ *de* v *à* $[\![n_0;p]\!]$ *appartient à* $\mathcal{S}_p$*, ce qui signifie que, pour tout* $k \in [\![n_0;p]\!]$*,* $v(k) \in \mathcal{V}_k$*.*

Preuve du théorème 9.22 : Pour $n \in [\![n_0;n_b[\![$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$ suivante :
Il existe une unique application $v^{(n)} \in \mathcal{S}_n$ telle que $v^{(n)}(n_0) = d$ et, pour $p \in [\![n_0;n[\![$, on ait

$$\mathcal{R}_p\Big(v^{(n)}(p+1)\,;\, v^{(n)}_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)\,.$$

Soit $v^{(n_0)} : [\![n_0;n_0]\!] \longrightarrow \mathcal{V}_{n_0}$ donnée par $v^{(n_0)}(n_0) = d$. On a bien $v^{(n_0)} \in \mathcal{S}_{n_0}$ et la seconde contition dans $\mathcal{P}(n_0)$ est remplie car $[\![n_0;n_0[\![$ est vide. De plus, $v^{(n_0)}$ est la suite application vérifiant les conditions imposées dans $\mathcal{P}(n_0)$. On a montré que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in [\![n_0;n_b-1[\![$. Soit $v^{(n+1)} : [\![n_0;n+1]\!] \longrightarrow \mathcal{V}$ l'application, dont la restriction à $[\![n_0;n]\!]$ est l'application $v^{(n)}$ fournie par l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$ et dont la valeur en $n+1$ est l'unique $\lambda \in \mathcal{V}_{n+1}$ tel que $\mathcal{R}_n(\lambda\,;\, v^{(n)})$ soit vraie. Par hypothèse de récurrence, on a donc $v^{(n+1)} \in \mathcal{S}_{n+1}$ et $v^{(n+1)}(n_0) = v^{(n)}(n_0) = d$. Soit $p \in [\![n_0;n+1[\![$. Si $p < n$ alors $p+1 \leq n$ donc $v^{(n+1)}(p+1) = v^{(n)}(p+1)$ et $v^{(n+1)}_{|[\![n_0;p]\!]} = v^{(n)}_{|[\![n_0;p]\!]}$. Par l'hypothèse de récurrence,

$$\mathcal{R}_p\Big(v^{(n+1)}(p+1)\,;\, v^{(n+1)}_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)$$

est vraie. De plus, par définition de $v^{(n+1)}(n+1)$,

$$\mathcal{R}_n\Big(v^{(n+1)}(n+1)\,;\, v^{(n+1)}_{|[\![n_0;n]\!]}\Big)$$

est vraie. Donc $v^{(n+1)}$ vérifient les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n+1)$.
Soit $w \in \mathcal{S}_{n+1}$ vérifiant ces mêmes contraintes. La restriction de w à $[\![n_0;n]\!]$ vérifie donc les contraintes imposées par $\mathcal{P}(n)$. D'après l'unicité de $v^{(n)}$, w coïncide avec $v^{(n)}$ sur $[\![n_0;n]\!]$ donc coïncide avec $v^{(n+1)}$ sur $[\![n_0;n]\!]$. Comme

$$\mathcal{R}_n\Big(w(n+1)\,;\, w_{|[\![n_0;n]\!]}\Big)$$

est vraie et comme $w_{|[\![n_0;n]\!]} = v^{(n)}_{|[\![n_0;n]\!]} = v^{(n)}$, on a, d'après (9.33) et la définition de $v^{(n+1)}(n+1)$, $w(n+1) = v^{(n+1)}(n+1)$. Donc $w = v^{(n+1)}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le théorème de récurrence éventuellement finie (cf. théorème 9.17), la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in [\![n_0;n_b[\![$. Pour $(m,n) \in [\![n_0;n_b[\![^2$ avec $m \geq n$, la restriction à $[\![n_0;n]\!]$ de l'application $v^{(m)}$, fournie par $\mathcal{P}(m)$, vérifie les contraintes imposées dans $\mathcal{P}(n)$ donc, par l'unicité dans $\mathcal{P}(n)$, $v^{(m)}_{|[\![n_0;n]\!]} = v^{(n)}$, l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$.
Soit $v : [\![n_0;n_b[\![\longrightarrow \mathcal{V}$ l'application définie par $v(n_0) = d$ et, pour $n \in [\![n_0+1;n_b[\![$, $v(n) = v^{(n)}(n)$, où $v^{(n)}$ est l'application fournie par $\mathcal{P}(n)$. En particulier, pour tout $n \in [\![n_0;n_b[\![$, $v(n) \in \mathcal{V}_n$. Soit $p \in [\![n_0;n_b-1[\![$. D'après $\mathcal{P}(p+1)$, on a

$$\mathcal{R}_p\Big(v^{(p+1)}(p+1)\,;\, v^{(p+1)}_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)\,.$$

Pour $q \in [\![n_0;p]\!]$, $v(q) = v^{(q)}(q) = v^{(p+1)}(q)$, car $q \leq p+1$. Donc $v_{|[\![n_0;p]\!]} = v^{(p+1)}_{|[\![n_0;p]\!]}$. Comme $v(p+1) = v^{(p+1)}(p+1)$, on en déduit que

$$\mathcal{R}_p\Big(v(p+1)\,;\, v_{|[\![n_0;p]\!]}\Big)$$

est vraie. On a montré (9.34).
Il reste à montrer l'unicité de v. Soit $w : [\![n_0;n_b[\![\longrightarrow \mathcal{V}$ vérifiant $w(n_0) = d$ et (9.34) avec v remplacée par w. On a $w(n_0) = d = v(n_0)$. Pour $p \in [\![n_0;n_b-1[\![$, on obtient, comme précédemment, que $w_{|[\![n_0;p]\!]} = v^{(p+1)}_{|[\![n_0;p]\!]} = v_{|[\![n_0;p]\!]}$. Ceci étant vrai pour tout $p \in [\![n_0;+\infty[\![$, $w = v$. □

On est en mesure maintenant de démontrer la proposition 6.27.

Preuve de la proposition 6.27 : Pour simplifier les notations, on oublie les paramètres I et $\mathbb{K}$ et on note $C^n(I;\mathbb{K})$ par C^n. On fixe $N \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})$ et $f \in C^N$. On pose $D_N = \{n \in \mathbb{N}; n \leq N\}$.
Lorsque $N = 0$, on a $D_N = \{0\}$ et l'application $d : \{0\} \longrightarrow C^0$ donnée par $d(0) = f$ convient, (6.10) étant vraie car $N^* \cap D_N = \emptyset$. De plus, d est bien la seule application à vérifier les contraintes demandées.
On suppose désormais $N \geq 1$. Soit $n_b = N + 1$ (avec la convention $n_b = +\infty$ si $N = +\infty$). Soit $\mathcal{V} = C^0$. Pour $k \in [\![0; n_b[\![$, soit $\mathcal{V}_k = C^{N-k}$ (avec la convention $N - k = +\infty$ si $N = +\infty$), qui est bien une partie de $C^0 = \mathcal{V}$, par les propositions 6.24 et 6.26. Pour $k \in [\![0; n_b[\![$, on définit $\mathcal{S}_k$ par (9.32) avec $n_0 = 0$. Pour $p \in [\![0; n_b - 1[\![$, $\lambda \in \mathcal{V}_{p+1}$ et $u \in \mathcal{S}_p$, soit $\mathcal{R}_p(\lambda; u)$ la proposition $(\lambda = (u(p))')$, où g' désigne la dérivée d'une fonction dérivable $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On note que $\mathcal{R}_p(\lambda; u)$ est bien définie car $u(p) \in C^{N-p} \subset C^1$ (cf. propositions 6.24 et 6.26) donc $u(p)$ est dérivable et $(u(p))' \in C^{N-p-1} = \mathcal{V}_{p+1}$ (cf. proposition 6.23).
Soit $p \in [\![0; n_b - 1[\![$ et $u \in \mathcal{S}_p$. Il existe un unique $\lambda \in \mathcal{V}_{p+1}$ tel que $\mathcal{R}_p(\lambda; u)$ est vraie, à savoir $\lambda = (u(p))'$. Donc la famille $\{\mathcal{R}_p(\lambda; u)\,;\, p \in [\![0; n_b - 1[\![, u \in \mathcal{S}_p, \lambda \in \mathcal{V}_{p+1}\}$ vérifie bien (9.33) avec $n_0 = 0$.
On peut donc appliquer le théorème 9.20 avec $n_0 = 0$ et d remplacé par $f \in C^N = \mathcal{V}_0$. Il existe donc une unique suite $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{V}$ telle que $d(0) = f$, pour tout $p \in [\![0; n_b[\![$, $d(p) \in \mathcal{V}_p = C^{N-p}$ et, pour tout $p \in [\![0; n_b - 1[\![$, $d(p+1) = (d(p))'$. On a donc montré (6.10) puisque $\mathbb{N}^* \cap D_N = [\![1; n_b[\![$. De plus, l'unicité précédente garantit celle demandée dans l'énoncé. □

9.3 Formule du binôme de Newton et identité remarquable.

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du résultat, qui porte le nom de formule du binôme de Newton, et d'une identité remarquable.

Proposition 9.24. *Soit $(a; b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. On a*

$$(a + b)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot a^k \cdot b^{n-k} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n} C_\ell^n \cdot a^{n-\ell} \cdot b^\ell \,, \tag{9.35}$$

où, pour $0 \leq k \leq n$, les C_k^n sont les coefficients du binôme de Newton définis par

$$C_k^n \;=\; \frac{n!}{(k!) \cdot ((n-k)!)} \quad \textit{et aussi notés par} \quad \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) .$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$a^{n+1} \,-\, b^{n+1} \;=\; (a - b) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k} \,. \tag{9.36}$$

On constate une grande similarité avec la formule (6.12). En fait, on va montrer (9.24) en suivant quasiment les arguments de la preuve de (6.12).

Preuve de la proposition 9.24 : Tout d'abord, on remarque que, pour $(k; n) \in \mathbb{N}^2$ avec $k \leq n$, on a les propriétés $C_k^n = C_{n-k}^n$, $C_n^n = C_0^n = 1$ et, pour $k \geq 1$, $C_k^n + C_{k-1}^n = C_k^{n+1}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}(n) = ((9.24) \text{ est vraie})$.
Comme $(a + b)^0 = 1 = a^0 = b^0$ et $C_0^0 = 1$, on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc, d'après l'hypothèse de récurrence et la

proposition 3.9, d'après les remarques précédentes,

$$\begin{aligned}
\big(a+b\big)^{n+1} &= (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n} C_k^n\cdot a^k\cdot b^{n-k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_k^n\cdot\big(a^{k+1}\cdot b^{n-k}+a^k\cdot b^{n-k+1}\big)\\
&= \sum_{k=0}^{n} C_k^n\cdot a^{k+1}\cdot b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n} C_k^n\cdot a^k\cdot b^{n+1-k}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n} C_{\ell-1}^n\cdot a^{\ell}\cdot b^{n+1-\ell}+\sum_{k=0}^{n} C_k^n\cdot a^k\cdot b^{n+1-k}\\
&= C_n^n\cdot a^{n+1}\cdot b^0+\sum_{k=1}^{n}\big(C_{k-1}^n+C_k^n\big)\cdot a^k\cdot b^{n+1-k}+C_0^n\cdot a^0\cdot b^{n+1}\\
&= C_{n+1}^{n+1}\cdot a^{n+1}\cdot b^0+\sum_{k=1}^{n} C_k^{n+1}\cdot a^k\cdot b^{n+1-k}+C_0^{n+1}\cdot a^0\cdot b^{n+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1} C_k^{n+1}\cdot a^k\cdot b^{n+1-k} \;=\; \sum_{\ell=0}^{n+1} C_{n+1-\ell}^{n+1}\cdot a^{n+1-\ell}\cdot b^{\ell}\\
&= \sum_{\ell=0}^{n+1} C_{\ell}^{n+1}\cdot a^{n+1-\ell}\cdot b^{\ell}\,.
\end{aligned}$$

On a montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0=0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On a, d'après la proposition 3.9,

$$\begin{aligned}
(a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n-k} &= a\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n-k}\;-\;b\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n-k} \;=\; \sum_{k=0}^{n} a^{k+1}\cdot b^{n-k}\;-\;\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n+1-k}\\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} a^{\ell}\cdot b^{n-\ell+1}\;-\;\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n+1-k}\\
&= a^{n+1}\cdot b^0+\sum_{\ell=1}^{n} a^{\ell}\cdot b^{n-\ell+1}\;-\;a^0\cdot b^{n+1}\;-\;\sum_{k=1}^{n} a^k\cdot b^{n+1-k} \;=\; a^{n+1}-b^{n+1}\,,
\end{aligned}$$

ce qui démontre (9.36). □

On remarque que, lorsque $b=1$ et $a\neq 1$, (9.36) redonne (3.20) avec n remplacé par $n+1$.

9.4 Développement chiffré relativement à une base.

Dans cette partie, on s'intéresse à différentes représentations de nombres réels à l'aide des "chiffres" d'une "base". Un exemple bien connu est donné par le développement décimal (en base 10) des nombres réels. On utilise aussi des écritures en base 2, en informatique notamment.

Prenons un entier naturel $b\in[\![2;+\infty[\![$, qui sera la base. L'ensemble des chiffres associés à la base b est $C_b=[\![0;b-1]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 (inclu) et $b-1$ (inclu). Dans un premier temps, on va donner une écriture des entiers naturels en utilisant une suite finie de chiffres de la base b (ce qui redonnera l'écriture habituelle de ces entiers naturels lorsque $b=10$). Ensuite, pour les réels appartenant à $[0;1[$, on va leur donner un développement faisant intervenir une suite infinie de

chiffres de la base b (ce qui redonnera les développements décimaux de tels nombres lorsque $b = 10$). On terminera par une synthèse des deux écritures précédentes pour les nombres réels positifs.

Définition 9.25. *Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$ et $C_b = [\![0; b-1]\!]$. On note par S^b_{fin} l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans C_b et nulles à partir d'un certain rang. Autrement dit, on pose*

$$S^b_{\text{fin}} \ := \ \left\{ a \in (C_b)^{\mathbb{N}} \, ; \ \exists N \in \mathbb{N} \, ; \ a_n = 0 \ \textit{si} \ n > N \right\} .$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble

$$S^b_{>N} \ := \ \left\{ a \in (C_b)^{\mathbb{N}} \, ; \ a_n = 0 \ \textit{si} \ n > N \right\} .$$

qui contient l'ensemble

$$S^b_N \ := \ \left\{ a \in (C_b)^{\mathbb{N}} \, ; \ a_N \neq 0 \ \textit{et} \ a_n = 0 \ \textit{si} \ n > N \right\} .$$

Pour $a \in S^b_{\text{fin}}$, on pose

$$N_a \ := \ \min \left\{ N \in \mathbb{N}; \forall n \in]\!]N; +\infty[\![\, , \ a_n = 0 \right\} .$$

Pour $(a; a') \in (S^b_{\text{fin}})^2$, on dit que la suite a est (inversement, lexicographiquement,) strictement inférieure à la suite a', on note $a \prec a'$, si $N_a < N_{a'}$ ou bien si

$$\left(N_a \ = \ N_{a'} \right) \quad \textit{et} \quad \left(\exists \, p \in [\![0; N_a]\!] \, ; \ a_p \ < \ a'_p \ \textit{et} \ \left(\forall \, n \in]\!]p; +\infty[\![\, , \ a_n \ = \ a'_n \right) \right) .$$

On introduit sur l'ensemble S^b_{fin} l'ordre lexicographique inversé. Pour $(a; a') \in (S^b_{\text{fin}})^2$, on dit que la suite a est (inversement, lexicographiquement,) inférieure (ou égale) à la suite a', on note $a \preceq a'$, si $a = a'$ ou si $a \prec a'$.

Notons que, dans le cadre de cette définition 9.25, pour $a \in S^b_{\text{fin}}$, il existe forcément un $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a \in S^b_{>N}$. Donc l'ensemble $\{N \in \mathbb{N}; \forall n \in]\!]N; +\infty[\![\, , \ a_n = 0\} = \{N \in \mathbb{N} \, ; \ a \in S^b_{>N}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet, d'après la proposition 9.4, un minimum. Lorsque a est la suite nulle, on a $N_a = 0$. Donnons quelques propriétes de cet ensemble de suites de chiffres.

Proposition 9.26. *Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$.*

1. *Soit $a \in S^b_{\text{fin}} \setminus \{0\}$. Alors $N_a = \max\{n \in \mathbb{N} \, ; \ a_n \neq 0\}$ et $a \in S^b_{N_a}$.*
2. *La relation "$\preceq$" de la définition 9.25 est une relation d'ordre total sur S^b_{fin}. Cela signifie précisément que les propositions suivantes sont vraies :*

$$\mathcal{O}_1 \ = \ \left(\forall \, a \in S^b_{\text{fin}} \, , \, (a \preceq a) \right) , \ \mathcal{O}_2 \ = \ \left(\forall \, (a; a') \in (S^b_{\text{fin}})^2 \, , \, \left((a \preceq a') \ \textit{et} \ (a' \preceq a) \right) \implies (a = a') \right) ,$$

$$\mathcal{O}_3 \ = \ \left(\forall \, (a; a'; a'') \in (S^b_{\text{fin}})^3 \, , \, \left((a \preceq a') \ \textit{et} \ (a' \preceq a'') \right) \implies (a \preceq a'') \right) ,$$

$$\mathcal{O}_4 \ = \ \left(\forall \, (a; a') \in (S^b_{\text{fin}})^2 \, , \, (a \preceq a') \ \textit{ou} \ (a' \preceq a) \right) .$$

3. *En notant par 0 la suite nulle de S^b_{fin}, le singleton $\{0\}$ et les S^b_N, pour $N \in \mathbb{N}$, forment une partition de S^b_{fin}. Cela signifie précisément que*

$$S^b_{\text{fin}} \ = \ \{0\} \ \cup \ \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} S^b_N \right) \tag{9.37}$$

et que les propositions suivantes sont vraies :

$$\left(\forall \, N \in \mathbb{N} \, , \, 0 \notin S^b_N \right) \quad \textit{et} \quad \left(\forall \, (N; N') \in \mathbb{N}^2 \, , \, S^b_N \cap S^b_{N'} \ = \ \emptyset \right) .$$

Preuve : Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$.

1. Prenons $a \in S^b_{\text{fin}} \setminus \{0\}$. On pose $\mathcal{R} := \{N \in \mathbb{N}\,;\, \forall\, n \in \,]\!]N; +\infty[\![\,, a_n = 0\}$ et $\mathcal{D} := \{n \in \mathbb{N}\,;\ a_n \neq 0\}$. Comme a est non nulle, $\mathcal{D}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et, comme a est nulle à partir d'un certain rang, $\mathcal{D}$ est majorée. Par la proposition 9.4, $\mathcal{D}$ admet un maximum m. Comme $a_n = 0$ pour $n > m$, $m \in \mathcal{R}$ donc, par la définition de N_a, $N_a \leq m$. Si l'on avait $N_a < m$ alors, comme $N_a \in \mathcal{R}$, on aurait $a_m = 0$ ce qui contredit le fait que $m \in \mathcal{D}$. Donc $N_a = m = \max \mathcal{D}$. En particulier, $N_a \in \mathcal{D}$ donc $a_{N_a} \neq 0$. Comme $N_a \in \mathcal{R}$, on a $a \in S^b_{N_a}$.

2. Pour $a \in S^b_{\text{fin}}$, on a $a = a$ donc on a aussi $a \preceq a$, d'après la définition 9.25. On a montré $\mathcal{O}_1$.
Soit $(a; a') \in (S^b_{\text{fin}})^2$ avec $a \neq a'$.
Premier cas : $N_a \neq N_{a'}$. Si $N_a < N_{a'}$ alors $a \prec a'$ et la proposition $(a' \preceq a)$ est fausse. Si $N_a > N_{a'}$ alors $a' \prec a$ et la proposition $(a \preceq a')$ est fausse.
Deuxième cas : $N_a = N_{a'}$. L'ensemble $\mathcal{D} := \{n \in [\![0; N_a]\!]\,;\, a_n \neq a'_n\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Par la proposition 9.4, $\mathcal{D}$ admet un maximum p. Comme $p \in \mathcal{D}$, on a, pour $n \in \,]\!]p; N_a]\!]$, $a_n = a'_n$ et, pour $n > N_a$, $a_n = 0 = a'_n$. Si $a_p < a'_p$ alors on a $a \prec a'$ et la proposition $(a' \preceq a)$ est fausse. Si $a_p > a'_p$ alors on a $a' \prec a$ et la proposition $(a \preceq a')$ est fausse.
On a donc montré que, si $a \neq a'$, on a : soit $a \prec a'$ et la proposition $(a' \preceq a)$ est fausse ; soit $a' \prec a$ et la proposition $(a \preceq a')$ est fausse. En particulier, on a donc montré la proposition $\mathcal{O}_2$ en prouvant l'implication qu'elle contient par contraposée. Mais on a aussi montré, pour $a \neq a'$, que l'une des propositions $(a \prec a')$ et $(a' \prec a)$ est vraie, donc que l'une des propositions $(a \preceq a')$ et $(a' \preceq a)$ est vraie. Lorsque $a = a'$, les deux propositions $(a \preceq a')$ et $(a' \preceq a)$ sont vraies. On a donc montré la proposition $\mathcal{O}_4$.
Il reste à montrer la proposition $\mathcal{O}_3$. Soit $(a; a'; a'') \in (S^b_{\text{fin}})^3$ tel que $a \preceq a'$ et $a' \preceq a''$. Supposons que la proposition $(a \preceq a'')$ soit fausse.
On a donc $a \neq a''$ et, par $\mathcal{O}_4$, on a $a'' \preceq a$, donc $a'' \prec a$. Si l'on avait $a' = a$ alors on aurait $a'' \preceq a'$ et, comme $a' \preceq a''$ par hypothèse, on aurait, par $\mathcal{O}_2$, $a = a' = a''$, ce qui contredit $a \neq a''$. Donc $a' \neq a$ et $a \prec a'$. De même, si l'on avait $a' = a''$ alors on aurait $a' \prec a$ et, comme $a \preceq a'$ par hypothèse, on aurait par $\mathcal{O}_2$, $a = a' = a''$. Contradiction avec $a \neq a''$. Donc $a' \neq a''$ et $a' \prec a''$.
On a donc $a'' \prec a$, $a \prec a'$ et $a' \prec a''$. Par définition de la relation "$\prec$", on a $N_{a''} \leq N_a$, $N_a \leq N_{a'}$ et $N_{a'} \leq N_{a''}$. Nécessairement, $N_a = N_{a'} = N_{a''}$ et on note par N la valeur commune. De plus,
a). il existe $p \in [\![0; N]\!]$ tel que $a_p < a'_p$ et, pour $n \in \,]\!]p; +\infty[\![$, $a_n = a'_n$;
b). il existe $p' \in [\![0; N]\!]$ tel que $a'_{p'} < a''_{p'}$ et, pour $n \in \,]\!]p; +\infty[\![$, $a'_n = a''_n$;
c). il existe $p'' \in [\![0; N]\!]$ tel que $a''_{p''} < a_{p''}$ et, pour $n \in \,]\!]p; +\infty[\![$, $a''_n = a_n$.
Supposons $p < p'$. Alors $a_{p'} = a'_{p'}$, par a), et, comme $a'_{p'} < a''_{p'}$ par b), $a_{p'} < a''_{p'}$ donc on doit avoir $p' < p''$, par c). De même, $a'_{p''} = a''_{p''}$, par b), et, comme $a''_{p''} < a_{p''}$ par c), on a $a'_{p''} < a_{p''}$ donc on doit avoir $p'' < p$ par a). On a donc $p < p' < p'' < p$, contradiction.
Supposons $p' < p$. En reprenant le raisonnement précédent en échangeant les rôles de a et a', on trouve une contradiction. On a montré que $p = p'$.
De même, en faisant jouer à a' et a'' les rôles de a et a', respectivement, dans le raisonnement précédent, on obtient $p' = p''$. D'où $p = p' = p''$.
On a donc $a_p < a'_p$, $a'_p = a'_{p'} < a''_{p'} = a''_p$ et $a''_p = a''_{p''} < a_{p''} = a_p$ donc $a_p < a'_p < a''_p < a_p$, contradiction. Donc, l'hypothèse "$(a \preceq a'')$ est fausse" est absurde. On a donc montré que la proposition $(a \preceq a'')$ est vraie et donc aussi $\mathcal{O}_3$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$. Pour $a \in S^b_N$, on a $a_N \neq 0$, par définition, donc a ne peut être nulle et $0 \notin S^b_N$. Soit $N' \in (\mathbb{N} \setminus \{N\})$. Supposons qu'on ait $a \in (S^b_N \cap S^b_{N'})$. Alors, si $N > N'$, on a $a_N \neq 0$ car $a \in S^b_N$ et $a_N = 0$ car $a \in S^b_{N'}$, contradiction, et si $N < N'$, on a $a_{N'} \neq 0$ car $a \in S^b_{N'}$ et $a_{N'} = 0$ car $a \in S^b_N$, contradiction. On a montré que $S^b_N \cap S^b_{N'}$ est vide.
Soit $a \in S^b_{\text{fin}}$. Alors

$$a \in \left(\{0\} \cup \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} S^b_N\right)\right)$$

car soit a est nulle ; soit a est non nulle et $a \in S^b_{N_a}$, par 1. On a montré que

$$S^b_{\text{fin}} \subset \left(\{0\} \cup \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} S^b_N\right)\right).$$

Comme $0 \in S^b_{\text{fin}}$ et comme, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S^b_N \subset S^b_{\text{fin}}$, on a aussi

$$\left(\{0\} \cup \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} S^b_N \right) \right) \subset S^b_f ,$$

ce qui donne (9.37). □

On en vient au résultat principal concernant l'écriture en base b des nombres entiers naturels.

Théorème 9.27. *Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$. Soit $d : S^b_{\text{fin}} \longrightarrow \mathbb{N}$ l'application définie par, pour $a \in S^b_{\text{fin}}$,*

$$d(a) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b^n ,$$

où la somme est finie (la suite a étant nulle à partir d'un certain rang $N+1$, avec $N \in \mathbb{N}$, la somme porte sur l'ensemble d'indices $[\![0; N]\!]$). L'application d est bien définie et bijective. De plus, on a les propriétés suivantes :

1. *La suite $(b^N)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.*
2. *L'application d est strictement croissante relativement à l'ordre "$\preceq$" de la définition 9.25 et à l'ordre naturel de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire*

$$\forall\, (a; a') \in (S^b_{\text{fin}})^2 , \quad \big(a \prec a' \quad \Longrightarrow \quad d(a) \,<\, d(a') \big) . \tag{9.38}$$

3. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'image $d(S^b_N)$ de S^b_N par d est donnée par $d(S^b_N) = [\![b^N; b^{N+1}[\![$.*

Preuve : Pour $N \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}(N) = (b^N \in \mathbb{N}$ et $b^{N+1} > b^N)$. Comme $b^0 = 1 \in \mathbb{N}$ et $b^1 = b > 1 = b^0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(N)$ vraie pour un $N \in \mathbb{N}$. Comme $b \in \mathbb{N}^*$, on a, par l'hypothèse de récurrence, $b^{N+1} = b^N b \in \mathbb{N}$, $b^N > 0$ et $b^{N+1} = b^N b > b^N$. Donc $\mathcal{P}(N+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(N)$ est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}$. On a montré 1.
Soit $N \in \mathbb{N}$ et $a \in S^b_N$. Comme a est à valeurs dans $C_b = [\![0; b-1]\!]$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le a_n \le b-1$. Comme $a \in S^b_N$, on a aussi $a_N \ge 1$, donc, par les propositions 3.9, 3.15 et 3.28, sachant que $b \neq 1$,

$$b^N \;\le\; \left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n \cdot b^n \right) \;+\; a_N \cdot b^N \;=\; \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot b^n \;\le\; \sum_{n=0}^{N} (b-1) \cdot b^n \;=\; (b-1) \cdot \sum_{n=0}^{N} b^n \;=\; b^{N+1} - 1 .$$

On a donc montré, pour $a \in S^b_N$, que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b^n \right) \;\in\; \big[b^N; b^{N+1} - 1 \big] . \tag{9.39}$$

Pour $q \in \mathbb{N}$, on considère la proposition

$$\mathcal{Q}(q) \;=\; \left(\forall\, a \in S^b_{\text{fin}} \;,\; \left(\sum_{n=0}^{q} a_n \cdot b^n \right) \in \mathbb{N} \right) .$$

Soit $a \in S^b_{\text{fin}}$. Donc $a_0 \in C_b \subset \mathbb{N}$ et

$$\sum_{n=0}^{0} a_n \cdot b^n \;=\; a_0 \cdot b^0 \;=\; a_0 \;\in\; \mathbb{N} .$$

Donc $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{Q}(q)$ vraie pour un $q \in \mathbb{N}$. Soit $a \in S^b_{\text{fin}}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(q+1)$ et le fait que $a_{q+1} \in C_b \subset \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{n=0}^{q+1} a_n \cdot b^n \;=\; \left(\sum_{n=0}^{q} a_n \cdot b^n \right) + a_{q+1} \cdot b^{q+1} \;\in\; \mathbb{N} .$$

Donc $\mathcal{Q}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(q)$ est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$. Cela montre que d est bien définie.
Pour $N \in \mathbb{N}$, (9.39) montre que, pour $a \in S_N^b$, $d(a) \in [\![b^N; b^{N+1}[\![$. En particulier, $d(S_N^b) \subset [\![b^N; b^{N+1}[\![$.
Pour $N \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{S}(N) = (d(S_N^b) = [\![b^N; b^{N+1}[\![)$.
Comme $[\![b^0; b^{0+1}[\![= [\![1; b[\![$, on a, pour $d \in [\![1; b[\![\subset C_b$, $d = d(a)$ pour la suite $a : \mathbb{N} \longrightarrow C_b$ donnée par $a_0 = d$ et, pour $n > 0$, $a_n = 0$, suite qui appartient bien à S_0^b. Donc $\mathcal{S}(0)$ est vraie.
Supposons, pour un $N \in \mathbb{N}$, que $\mathcal{S}(k)$ soit vraie, pour tout $k \in [\![0; N]\!]$. Soit $d \in [\![b^{N+1}; b^{N+2}[\![$. D'après les propriétés de la partie entière E (cf. proposition 9.8), on a, comme $1 \leq d/b^{N+1} < b^{N+2}/b^{N+1} = b$,

$$1 \;\leq\; E\big(d/b^{N+1}\big) \;\leq\; d/b^{N+1} \;<\; E\big(d/b^{N+1}\big) + 1$$

donc

$$1 \;\leq\; E\big(d/b^{N+1}\big) \;<\; b \quad \text{et} \quad 0 \;\leq\; d - b^{N+1} \cdot E\big(d/b^{N+1}\big) \;<\; b^{N+1}\,. \tag{9.40}$$

En particulier, $E\big(d/b^{N+1}\big)$ est un entier appartenant à $[1; b[$ donc il appartient à C_b. La seconde propriété de (9.40) garantit que

$$d_1 \;:=\; d - b^{N+1} \cdot E\big(d/b^{N+1}\big) \;\in\; [\![0; b^{N+1}[\![\,.$$

Comme la suite $(b^N)_{N\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, on a

$$[\![0; b^{N+1}[\![\;=\; \bigcup_{k\in[\![0;N]\!]} [\![b^k; b^{k+1}[\![\,,$$

où chaque intervalle est non vide et disjoint des autres. Il existe donc un (unique) $k \in [\![0; N]\!]$ tel que $d_1 \in [\![b^k; b^{k+1}[\![$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $a^{(1)} \in S_k^b$ tel que $d_1 = d(a^{(1)})$. D'où

$$d \;=\; d_1 + b^{N+1} \cdot E\big(d/b^{N+1}\big) \;=\; d(a)$$

où $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}_b$ est définie par, pour $n \leq k$, $a_n = a_n^{(1)}$, $a_{N+1} = E(d/b^{N+1})$ et, pour $n \in]\!]k; +\infty[\![\setminus \{N+1\}$, $a_n = 0$, suite qui appartient bien à S_{N+1}^b. Donc $\mathcal{S}(N+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence forte (cf. théorème 9.14 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{S}(N)$ est vraie pour tout $N \in \mathbb{N}$. On a montré le 3.
Comme $d(0) = 0$, on a, d'après le 3,

$$d\big(S_{\text{fin}}^b\big) \;=\; \{d(0)\} \;\cup\; \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\![b^k; b^{k+1}[\![\right) \;=\; \mathbb{N}\,.$$

Donc d est surjective.
On montre maintenant 2. Soit $(a; a') \in (S_{\text{fin}}^b)^2$ avec $a \prec a'$. Si $a = 0$ alors $d(a) = 0$ et, comme a' est non nulle, $d(a') > 0$, par la proposition 3.28. On suppose désormais $a \neq 0$.
Premier cas : $N_a < N_{a'}$. Par le 1 de la proposition 9.26, $a \in S_{N_a}^b$ et $a' \in S_{N_{a'}}^b$ et, par le 3, $d(a) < b^{N_a+1} \leq b^{N_{a'}} \leq d(a')$.
Deuxième cas : $N_a = N_{a'}$. Par hypothèse, il existe $p \in [\![0; N_a]\!]$ tel que $a_p < a'_p$ et, pour $n > p$, $a_n = a'_n$. Si $p = 0$, on a

$$d(a) \;=\; a_0 \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot b^k \;=\; a_0 \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{N} a'_k \cdot b^k \;<\; a'_0 \cdot b^0 + \sum_{k=1}^{N} a'_k \cdot b^k \;=\; d(a')\,.$$

Si $p \geq 1$, alors, on a, par la preuve de (9.39),

$$\begin{aligned} d(a) \;&=\; \sum_{k=0}^{p-1} a_k \cdot b^k + a_p \cdot b^p + \sum_{k=p+1}^{N} a_k \cdot b^k \;=\; \sum_{k=0}^{p-1} a_k \cdot b^k + a_p \cdot b^p + \sum_{k=p+1}^{N} a'_k \cdot b^k \\ &\leq b^p - 1 + a_p \cdot b^p + \sum_{k=p+1}^{N} a'_k \cdot b^k \;<\; (1 + a_p) \cdot b^p + \sum_{k=p+1}^{N} a'_k \cdot b^k \\ &\leq a'_p \cdot b^p + \sum_{k=p+1}^{N} a'_k \cdot b^k \;\leq\; d(a') \end{aligned}$$

puisque

$$d(a') \;=\; \sum_{k=0}^{p-1} a'_k \cdot b^k \;+\; \sum_{k=p}^{N} a'_k \cdot b^k \;\geq\; \sum_{k=p}^{N} a'_k \cdot b^k \,,$$

d'après la proposition 3.28.
Dans tous les cas, on a $d(a) < d(a')$ ce qui prouve (9.38). On a montré 2.
Il reste à prouver que d est injective (cf. définition 9.1). Prenons $(a;a') \in (S^b_{\text{fin}})^2$ tel que $d(a) = d(a')$. Supposons que $a \neq a'$. Alors, d'après le 1 de la proposition 9.26, on a $a \prec a'$ ou $a' \prec a$. Dans le premier cas, on a, par 2, $d(a) < d(a')$, c'est-à-dire une contradiction, et, dans le second cas, on a, par 2, $d(a') < d(a)$, c'est-à-dire une contradiction aussi. D'où $a = a'$. On a montré que d est injective. □

Définition 9.28. *Soit $b \in [\![2;+\infty[\![$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique suite $a \in S^b_{\text{fin}}$ telle que $d(a) = n$. On dit que a est la suite des chiffres de l'écriture de n dans la base b. L'égalité $n = d(a)$ est le développement de n en base b. On écrit symboliquement $n = a_N a_{N-1} \cdots a_1 a_0$ (avec $N = N_a$).*

Lorsque $b = 10$, on retrouve l'écriture décimale des nombres entiers naturels. Par exemple, 123 désigne le nombre entier n donné par $n = 3 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^3$. En base $b = 2$, 10101 désigne le nombre entier n donné par $n = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^4$ c'est-à-dire $n = 1 + 4 + 16 = 21$, en base 10.
La propriété 2 du théorème 9.27 généralise une propriété admise à l'école sur les nombres entiers écrits en base 10. Selon cette dernière, $123 > 99$ car la suite de chiffres $(3;2;1;\overline{0})$ (où "$\overline{0}$" désigne une suite infinie de 0) est strictement supérieure à la suite de chiffres $(9;9;\overline{0})$, pour l'ordre de la définition 9.25. De même, $307 > 299$ puisque la suite de chiffres $(7;0;3;\overline{0})$ est strictement supérieure à la suite de chiffres $(9;9;2;\overline{0})$.

Toujours pour $b \in [\![2;+\infty[\![$, on va maintenant donner un "développement chiffré infini" pour chaque réel $x \in [0;1[$. Pour ce faire, on commence, comme précédemment, par considérer des suites de chiffres, infinies cette fois, et par mettre un ordre (lexicographique) sur l'ensemble de ces suites.

Définition 9.29. *Soit $b \in [\![2;+\infty[\![$ et $C_b = [\![0;b-1]\!]$. On note par $S^{b;*}$ l'ensemble des suites définies sur $\mathbb{N}^*$ et à valeurs dans C_b. Autrement dit, on pose $S^{b;*} = (C_b)^{\mathbb{N}^*}$.*
Pour $N \in \mathbb{N}$, on note par $S^{b;*}_{>N}$ l'ensemble des suites de $S^{b;*}$ qui sont nulles à partir du rang $N+1$ et par $S^{b;*}_{>N;\,b-1}$ l'ensemble des suites de $S^{b;*}$ qui constantes égales à $(b-1)$ à partir du rang $N+1$, c'est-à-dire

$$S^{b;*}_{>N} \;:=\; \big\{a \in S^{b;*}\,;\; \forall\, n \in]\!]N;+\infty[\![\,,\, a_n \,=\, 0\big\} \text{ et } S^{b;*}_{>N;\,b-1} \;:=\; \big\{a \in S^{b;*}\,;\; \forall\, n \in]\!]N;+\infty[\![\,,\, a_n \,=\, b-1\big\}\,.$$

On note par $S^{b;*}_{\text{fin}}$ l'ensemble des suites de $S^{b;*}$ qui sont nulles à partir d'un certain rang et par $S^{b;*}_{\text{fin}\,;\,b-1}$ l'ensemble des suites de $S^{b;*}$ qui sont constantes égales à $(b-1)$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$S^{b;*}_{\text{fin}} \;:=\; \bigcup_{N\in\mathbb{N}} S^{b;*}_{>N} \quad \text{et} \quad S^{b;*}_{\text{fin}\,;\,b-1} \;:=\; \bigcup_{N\in\mathbb{N}} S^{b;*}_{>N;\,b-1}\,.$$

Soit $(a;a') \in (S^{b;*})^2$ avec $a \neq a'$. L'ensemble $\mathcal{D} = \{n \in \mathbb{N}^*\,;\, a_n \neq a'_n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un minimum k (cf. proposition 9.4). On dit que la suite a est (lexicographiquement,) strictement inférieure à la suite a', on note $a \prec' a'$, si $a_k < a'_k$.
On introduit sur l'ensemble $S^{b;*}$ l'ordre lexicographique. Pour tout $(a;a') \in (S^{b;*})^2$, on dit que la suite a est (lexicographiquement,) inférieure (ou égale) à la suite a', on note $a \preceq' a'$, si $a = a'$ ou si $a \prec' a'$.

Vérifions tout d'abord que la relation "$\prec'$" introduite dans la définition 9.29 définit un ordre total sur $S^{b;*}$, pour $b \in [\![2;+\infty[\![$.

Proposition 9.30. *Soit $b \in [\![2;+\infty[\![$. La relation "$\prec'$" de la définition 9.29 est une relation d'ordre total sur $S^{b;*}$. Cela signifie précisément que les propositions suivantes sont vraies :*

$$\mathcal{O}_1 \;=\; \big(\forall\, a \in S^{b;*}\,,\, (a \preceq' a)\big)\,,\; \mathcal{O}_2 \;=\; \Big(\forall\,(a;a') \in (S^{b;*})^2\,,\, \big((a \preceq' a') \text{ et } (a' \preceq' a)\big) \implies (a = a')\Big)\,,$$

$$\mathcal{O}_3 \;=\; \Big(\forall\,(a;a';a'') \in (S^{b;*})^3\,,\, \big((a \preceq' a') \text{ et } (a' \preceq' a'')\big) \implies (a \preceq' a'')\Big)\,,$$

$$\mathcal{O}_4 \;=\; \big(\forall\,(a;a') \in (S^{b;*})^2\,,\, (a \preceq' a') \text{ ou } (a' \preceq' a)\big)\,.$$

Preuve : Par définition, on a, pour $a \in S^{b;*}$, $a = a$ donc $a \preceq' a$. On a montré $\mathcal{O}_1$.
Soit $(a;a') \in (S^{b;*})^2$ avec $a \neq a'$. Soit $\mathcal{D} := \{n \in \mathbb{N}^* \,;\, a_n \neq a'_n\}$ et $k = \min \mathcal{D}$ (cf. définition 9.29). On a $a_k \neq a'_k$. Si $a_k < a'_k$ alors $a \prec' a'$ et la proposition $(a' \prec' a)$ est fausse. Si $a_k > a'_k$ alors $a' \prec' a$ et la proposition $(a \prec' a')$ est fausse. On a donc montré que, si $a \neq a'$, on a : soit $a \prec' a'$ et la proposition $(a' \prec' a)$ est fausse ; soit $a' \prec' a$ et la proposition $(a \prec' a')$ est fausse. En particulier, on a montré la proposition $\mathcal{O}_2$ en prouvant l'implication qu'elle contient par contraposée. On a aussi montré, pour $a \neq a'$, que l'une des propositions $(a \prec' a')$ et $(a' \prec' a)$ est vraie, donc aussi que l'une des propositions $(a \preceq' a')$ et $(a' \preceq' a)$ est vraie. Lorsque $a = a'$, ces deux dernières propositions sont toutes deux vraies. On a donc montré $\mathcal{O}_4$.
Il reste à montrer $\mathcal{O}_3$. Soit $(a;a';a'') \in (S^{b;*})^3$ tel que $a \preceq' a'$ et $a' \preceq' a''$. Supposons que la proposition $(a \preceq' a'')$ soit fausse.
On a donc $a \neq a''$. Par $\mathcal{O}_4$, on a nécessairement $a'' \preceq' a$, soit $a'' \prec' a$. Si l'on avait $a = a'$ alors on aurait $a'' \preceq' a'$ et, comme $a' \preceq' a''$, on aurait $a'' = a'$, par $\mathcal{Q}_2$, donc $a = a' = a''$, ce qui contredit $a \neq a''$. Donc $a \neq a'$ et $a \prec' a'$. De même, si l'on avait $a' = a''$ alors on aurait $a' \preceq' a$ et, comme $a \preceq' a'$, on aurait $a = a'$, par $\mathcal{Q}_2$, donc $a = a' = a''$, ce qui contredit $a \neq a''$. Donc $a' \neq a''$ et $a' \prec' a''$.
On a donc $a'' \prec' a$, $a \prec' a'$ et $a' \prec' a''$. Soit $\mathcal{D} := \{n \in \mathbb{N}^* \,;\, a_n \neq a'_n\}$, $k = \min \mathcal{D}$, $\mathcal{D}' := \{n \in \mathbb{N}^* \,;\, a'_n \neq a''_n\}$, $k' = \min \mathcal{D}'$, $\mathcal{D}'' := \{n \in \mathbb{N}^* \,;\, a''_n \neq a_n\}$ et $k'' = \min \mathcal{D}''$ (cf. définition 9.29). On a
a). $a_k < a'_k$ et, pour $n \in [\![1; k-1[\![$, $a_n = a'_n$;
b). $a'_{k'} < a''_{k'}$ et, pour $n \in [\![1; k'-1[\![$, $a'_n = a''_n$;
c). $a''_{k''} < a_{k''}$ et, pour $n \in [\![1; k''-1[\![$, $a''_n = a_n$.
Supposons $k < k'$. Alors $a'_k = a''_k$ et, comme $a_k < a'_k$, $a_k < a''_k$, d'où $k > k''$. Donc $a_{k''} = a'_{k''}$ et $a''_{k''} < a'_{k''}$, donc, forcément, $k'' > k'$. D'où $k' > k > k'' > k'$, contradiction.
Supposons $k' < k$. En reprenant le raisonnement précédent en échangeant les rôles de a et a', on trouve une contradiction. On a montré que $k = k'$.
De même, en faisant jouer à a' et a'' les rôles de a et a', respectivement, dans le raisonnement précédent, on obtient $k' = k''$. D'où $k = k' = k''$.
Puisque $a'' \prec' a$, $a \prec' a'$ et $a' \prec' a''$, on a donc $a_k < a'_k < a''_k < a_k$, ce qui est contradictoire. L'hypothèse "$(a \preceq' a'')$ est fausse" est donc absurde, d'où $a \preceq' a''$. On a montré $\mathcal{O}_3$. □

Remarque 9.31. *Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$. On note les différences suivantes entre les notions introduites dans les définitions 9.25 et 9.29. Dans la première définition, on considère des suites définies sur $\mathbb{N}$ et nulles à partir d'un certain rang tandis que, dans la deuxième, les suites sont infinies et définies sur $\mathbb{N}^*$. De plus, les relations d'ordre $\preceq$ et $\preceq'$ sont différentes (puisqu'elles agissent sur des ensembles différents) et sont "inversées" l'une par rapport à l'autre. Illustrons cela par un exemple avec $b = 2$. Soit $a^{(1)} : \mathbb{N} \longrightarrow C_2$ définie par $a^{(1)}_n = 1$ si $n \in \{1;3\}$ et $a^{(1)}_n = 0$, sinon. Soit $a^{(2)} : \mathbb{N} \longrightarrow C_2$ définie par $a^{(2)}_n = 1$ si $n \in \{1;2\}$ et $a^{(2)}_n = 0$, sinon. On a $(a^{(1)};a^{(2)}) \in (S^2_{\text{fin}})^2$ et $a^{(2)} \prec a^{(1)}$. En considérant leur restriction à $\mathbb{N}^*$, on a $(a^{(1)}_{|\mathbb{N}^*}; a^{(2)}_{|\mathbb{N}^*}) \in (S^{2;*})^2$ et $a^{(1)}_{|\mathbb{N}^*} \prec' a^{(2)}_{|\mathbb{N}^*}$.*

Voyons maintenant l'existence d'un "développement infini chiffré" en base b, avec $b \in [\![2; +\infty[\![$, pour les nombres réels appartenant à $[0;1[$.

Théorème 9.32. *Soit $x \in [0;1[$. Au moyen de la fonction partie entière E (cf. proposition 9.8), on considère la suite réelle $a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $a_1 = E(bx)$ et*

$$\forall\, p \in [\![2; +\infty[\![\,, \quad a_p \;=\; E\left(b^p\Big(x \,-\, \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_k}{b^k}\Big)\right) . \tag{9.41}$$

Alors $a \in S^{b;*}$ et la suite réelle

$$s \;:=\; \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k}\right)_{N \in \mathbb{N}^*}$$

converge vers x.

Dans le cadre de ce théorème 9.32, la suite a ainsi associée à x va permettre de définir précisément un développement infini de x dans la base b, comme on va le voir plus loin.

De nouveau, on est confronté à la difficulté de la construction par récurrence d'une suite, difficulté signalée dans la remarque 3.3 et le paragraphe 9.2.2.

Lemme 9.33. *Pour tout $x \in [0;1[$, il existe une unique suite réelle $a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation de récurrence du théorème 9.32.*

Preuve : Voir dans le paragraphe 9.2.3. □.

Preuve du théorème 9.32 : Soit $x \in [0;1[$. La suite a est bien définie d'après le lemme 9.33. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition

$$\mathcal{Q}(p) \;=\; \Big(a_p \in C_b \quad \text{et} \quad b^p\Big(x - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k}\Big) \in [0;1[\Big)\,.$$

Par la proposition 9.8, on a, comme $bx \geq 0$, $0 \leq E(bx) \leq bx < b$ et $E(bx) \in \mathbb{Z}$ donc $a_1 \in [\![0; b-1[\![= C_b$. De plus, $a_1 = E(bx) \leq bx < E(bx) + 1 = a_1 + 1$ donc on obtient $0 \leq bx - a_1 < 1$ soit

$$0 \;\leq b\Big(x - \frac{a_1}{b}\Big) \;<\; 1\,.$$

Donc $\mathcal{Q}(1)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{Q}(p)$ soit vraie pour un $p \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse de récurrence,

$$0 \;\leq\; b^{p+1}\Big(x - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k}\Big) \;<\; b$$

donc, comme

$$a_{p+1} \;=\; E\left(b^{p+1}\Big(x - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k}\Big)\right)\,,$$

on a $a_{p+1} \in \mathbb{Z} \cap [0;b[$ soit $a_{p+1} \in C_b$. De plus, par la proposition 9.8,

$$a_{p+1} \;=\; E\left(b^{p+1}\Big(x - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k}\Big)\right) \;\leq\; b^{p+1}\Big(x - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k}\Big) \;<\; E\left(b^{p+1}\Big(x - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k}\Big)\right) + 1 \;=\; a_{p+1} + 1$$

donc

$$0 \;\leq\; x - \sum_{k=1}^{p+1} \frac{a_k}{b^k} \;<\; \frac{1}{b^{p+1}}$$

et

$$0 \;\leq\; b^{p+1}\Big(x - \sum_{k=1}^{p+1} \frac{a_k}{b^k}\Big) \;<\; 1\,.$$

Donc $\mathcal{Q}(p+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 1$), $\mathcal{Q}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $a_p \in C_b$, d'après $\mathcal{Q}(p)$, donc $a \in S^{b;*}$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, toujours d'après $\mathcal{Q}(p)$, on a

$$0 \;\leq\; x - \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k} \;<\; \frac{1}{b^p}$$

et, comme la suite $(b^{-p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 (cf. proposition 3.58), la suite s tend vers x, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.48). □

Pour mieux comprendre la structure des "développements infinis chiffrés", on établit d'abord la

Proposition 9.34. *Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$ et $a \in S^{b;*}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $N \in [\![p+1; +\infty[\![$.*

1. *On a les inégalités*
$$0 \;\leq\; \sum_{k=p+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;\leq\; \frac{1}{b^p}\cdot\Big(1 - \frac{1}{b^{N-p}}\Big) \tag{9.42}$$
avec égalité dans la deuxième inégalité de (9.42) *si, pour tout* $k \in [\![p+1; N]\!]$, $a_k = b-1$.
2. *On suppose qu'il existe* $m \in [\![p+1; N]\!]$ *tel que* $a_m < b-1$ *et, si* $n \in [\![p+1; m[\![$, $a_n = b-1$. *Alors*
$$\sum_{k=p+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;\leq\; \frac{1}{b^p} - \frac{1}{b^m}\,. \tag{9.43}$$

Preuve : Comme $a \in S^{b;*}$, a est à valeurs dans $C_b = [\![0; b-1]\!]$.
1. Comme a est positive, la suite $(a_k/b^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est aussi positive et, par la proposition 3.28, on a la première inégalité dans (9.42). Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $(a_k/b^k) \leq (b-1)/b^k$ donc, par les propositions 3.28, 3.9 et 3.15,
$$\sum_{k=p+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;\leq\; \sum_{k=p+1}^{N} \frac{b-1}{b^k} \quad \text{et}$$
$$\sum_{k=p+1}^{N} \frac{b-1}{b^k} = \frac{b-1}{b^{p+1}}\cdot\sum_{k=p+1}^{N}\frac{1}{b^{k-p-1}} = \frac{b-1}{b^{p+1}}\cdot\sum_{\ell=0}^{N-p-1}\frac{1}{b^\ell} = \frac{b-1}{b^{p+1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{b^{N-p}}}{1-\frac{1}{b}}$$
$$= \frac{1}{b^p}\cdot\Big(1-\frac{1}{b^{N-p}}\Big)\,, \tag{9.44}$$
ce qui donne la seconde inégalité de (9.42). Si maintenant on a, pour tout $k \in [\![p+1; N]\!]$, $a_k = b-1$ alors (9.44) montre que la seconde inégalité de (9.42) est une égalité.
2. Par la proposition 3.9 et le 1, on a, comme $b - 1 - a_m \geq 1$,
$$\sum_{k=p+1}^{N}\frac{a_k}{b^k} = \sum_{k=p+1}^{m-1}\frac{a_k}{b^k} + \frac{a_m}{b^m} + \sum_{k=m+1}^{N}\frac{a_k}{b^k} = \sum_{k=p+1}^{m-1}\frac{b-1}{b^k} + \frac{a_m}{b^m} + \sum_{k=m+1}^{N}\frac{a_k}{b^k}$$
$$= \sum_{k=p+1}^{m}\frac{b-1}{b^k} + \frac{a_m-(b-1)}{b^m} + \sum_{k=m+1}^{N}\frac{a_k}{b^k}$$
$$= \frac{1}{b^p}\cdot\Big(1-\frac{1}{b^{m-p}}\Big) - \frac{b-1-a_m}{b^m} + \sum_{k=m+1}^{N}\frac{a_k}{b^k}$$
$$\leq \frac{1}{b^p}\cdot\Big(1-\frac{1}{b^{m-p}}\Big) - \frac{1}{b^m} + \frac{1}{b^m} = \frac{1}{b^p} - \frac{1}{b^m}\,,$$
ce qui donne (9.43). □

On montre l'important résultat suivant.

Théorème 9.35. *Soit* $b \in [\![2; +\infty[\![$. *Pour tout* $a \in S^{b;*}$, *la suite réelle*
$$\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{b^k}\right)_{N\in\mathbb{N}^*} \tag{9.45}$$
est convergente et on note sa limite par $f(a)$ *et aussi par*
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{b^k}\,.$$
On définit ainsi une application surjective $f : S^{b;*} \longrightarrow [0;1]$ *et on a les propriétés suivantes.*

1. *Si* $p \in \mathbb{N}$ *et* $a \in S^{b;*}_{>p}$ *alors*
$$f(a) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k}\,. \tag{9.46}$$
2. *Soit* $p \in \mathbb{N}$ *et* $a \in S^{b;*}$ *telle que, si* $n \in \mathbb{N}^* \cap [\![0;p]\!]$, $a_n = 0$. *Alors* $f(a) \in [0;b^{-p}]$. *De plus, on a :* $f(a) = b^{-p} \iff a \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$.
3. *Pour* $a \in S^{b;*}$, *on a :* $f(a) = 0 \iff a = 0$.
4. *L'application* f *n'est pas injective.*
5. *La restriction* $f_{|\hat{S}^{b;*}}$ *de* f *à* $\hat{S}^{b;*} := S^{b;*} \setminus S^{b;*}_{\mathrm{fin}\,;\,b-1}$ (*cf. définition 9.29*) *est bijective de* $\hat{S}^{b;*}$ *sur* $[0;1[$.
6. *Pour* $(s;t) \in (S^{b;*})^2$. *On a les propriétés*
$$f(s) < f(t) \quad\Longrightarrow\quad s \prec' t\;, \tag{9.47}$$
$$s \prec' t \quad\Longrightarrow\quad f(s) \le f(t)\;, \tag{9.48}$$
$$\big(f(s) = f(t) \quad et \quad s \prec' t\big) \iff \tag{9.49}$$
$$\big(\exists p \in \mathbb{N}^*\,;\; t \in S^{b;*}_{>p} \quad et \quad s \in S^{b;*}_{>p;\,b-1} \quad et \quad t_{|[\![1;p[\![} = s_{|[\![1;p[\![} \quad et \quad t_p = s_p + 1\big)\,.$$
7. *Pour* $x \in [0;1[$, *l'image réciproque* $f^{-1}(x)$ *de* $\{x\}$ *par* f *a deux éléments si et seulement s'il* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $m \in]\!]0;b^p[\![\setminus \{b^j\,;\, j \in [\![0;p-1]\!]\}$ *tels que* $x = mb^{-p}$.

On repousse la preuve de ce théorème pour donner tout de suite la définition de la notion de "développement infini chiffré" en base b, pour $b \in [\![2;+\infty[\![$, et quelques commentaires.

Définition 9.36. *Soit* $b \in [\![2;+\infty[\![$ *et* $x \in [0;1[$. *On utilise les notations du théorème 9.35. Tout antécédent* a *de* x *par* f *fournit un développement infini chiffré de* x *en base* b *par la formule*
$$x \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k} \;:=\; \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k}\,.$$
La suite a *est la suite des chiffres de ce développement. On note parfois, de manière symbolique,*
$$x \;=\; 0,a_1a_2a_3a_4a_5\cdots \quad . \tag{9.50}$$
On dit que le développement de x *est propre, lorsque* $a \in \hat{S}^{b;*}$, *et impropre, lorsque* $a \in S^{b;*}_{\mathrm{fin}\,;\,b-1}$.

Soit $b \in [\![2;+\infty[\![$. On note tout d'abord que, d'après le 5 du théorème 9.35, tout nombre réel $x \in [0;1[$ admet un unique développement infini chiffré propre en base b. De plus, d'après (9.49), un tel x admet au plus deux développements.

Remarque 9.37. *Lorsque* $b = 10$, *on retrouve des choses vues à l'école. Tout d'abord la notation symbolique pour un développement* (9.50). *Par exemple,*
$$\frac{1}{3} \;=\; 0,333333\cdots \quad .$$
*Cette notation est ambigüe car il est implicite que l'on considère une suite infinie de "*3*". On préfère la notation* $0{,}\overline{3}$ *ou bien* $0{,}333333\overline{3}$, *où* $\overline{3}$ *indique une suite infinie de "*3*".*
La propriété (9.48) *est utilisée lorsqu'on affirme que*
$$0,3333333\overline{3} \;\ge\; 0,09999\overline{57} \quad .$$
Ici $\overline{57}$ *désigne une suite infinie de "*57*" : "*$57575757\cdots$*".*
La propriété (9.49) *est utilisée lorsqu'on écrit*
$$0,09999\overline{9} \;=\; 0,100000\overline{0} \quad .$$

La propriété 2 du théorème 9.35 est utilisée lorsqu'on affirme que

$$0,00247568\overline{9123} \;\leq\; 10^{-2} \quad .$$

Les nombres ayant deux développements décimaux sont appelés nombres décimaux. Par le 7 du théorème 9.35, ils sont de la forme $m/(10)^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \left]\!\right]0;(10)^p\left[\!\right] \setminus \{(10)^j \,;\, j \in [\![0;p-1]\!]\}$.

Preuve du théorème 9.35 : Soit $a \in S^{b;*}$. Comme la suite $(a_k/b^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est positive, la suite (9.45) est croissante, par la proposition 3.28, donc elle tend vers sa borne supérieure, d'après la proposition 3.51. D'après (9.42) avec $p = 0$, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \;\leq\; \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;\leq\; \frac{1}{b^0} \cdot \Big(1 - \frac{1}{b^N}\Big) \;\leq\; 1\,. \tag{9.51}$$

La suite (9.45) est donc minorée par 0 et majorée par 1, donc sa borne supérieure qui appartient à $[0;1]$. Cela montre que f est bien définie à valeurs dans $[0;1]$.
D'après le théorème 9.32, tout $x \in [0;1[$ est dans l'image de f. De plus, par le 2 (que l'on va démontrer ci-dessous) avec $p = 0$, $1 = b^{-0}$ appartient aussi à l'image de f. D'où $[0;1] \subset f(S^{b;*})$. Comme on a vu que $f(S^{b;*}) \subset [0;1]$, on a $f(S^{b;*}) = [0;1]$ et f est surjective.
Preuve de 1 : Soit $p \in \mathbb{N}$ et $a \in S^{b;*}_{>p}$. On note par S le membre de droite de (9.46). Pour $N \in [\![p+1;+\infty\left[\!\right]$, on a, d'après la proposition 3.9,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;=\; S \,+\, \sum_{k=p+1}^{N} \frac{0}{b^k} \;=\; S$$

donc la suite (9.45) est constante égale à S à partir du rang $p+1$ donc elle converge vers S (cf. propositions 3.41 et 3.35).
Preuve de 2 : Sous l'hypothèse sur a, on a, pour $N \in [\![p+1;+\infty\left[\!\right]$, par la proposition 3.9,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;=\; \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k} \,+\, \sum_{k=p+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;=\; \sum_{k=p+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \tag{9.52}$$

et, d'après (9.42), on a

$$0 \;\leq\; \sum_{k=p+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;\leq\; \frac{1}{b^p} \cdot \Big(1 - \frac{1}{b^{N-p}}\Big) \tag{9.53}$$

avec le membre de droite de (9.53) qui tend vers b^{-p}, quand N tend vers $+\infty$, d'après les propositions 3.58 et 3.46. Par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.48), on obtient $0 \leq f(a) \leq b^{-p}$ c'est-à-dire $f(a) \in [0;b^{-p}]$.
Supposons que $a \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$, en plus de l'autre hypothèse sur a. Donc la restriction de a à $[\![0;p]\!]$ est nulle et la restriction de a à $[\![p+1;+\infty\left[\!\right]$ est constante égale à $(b-1)$. Donc, pour $N \in [\![p+1;+\infty\left[\!\right]$, on a, d'après (9.52) et (9.44),

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;=\; \frac{1}{b^p} \cdot \Big(1 - \frac{1}{b^{N-p}}\Big)$$

qui tend vers b^{-p}, quand N tend vers $+\infty$, d'après les propositions 3.58 et 3.46. Donc $f(a) = b^{-p}$.
Supposons que $f(a) = b^{-p}$. On a (9.52) pour $N \in [\![p+1;+\infty\left[\!\right]$. Supposons qu'il existe $m \in [\![p+1;+\infty\left[\!\right]$ tel que $a_m \neq (b-1)$. Alors $a_m + 1 \leq (b-1)$. Donc, pour $N \in [\![m;+\infty\left[\!\right]$, on a, par (9.52) et proposition 3.9,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;&=\; \sum_{k=p+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;=\; \sum_{k=p+1}^{m-1} \frac{a_k}{b^k} \,+\, \frac{a_m}{b^m} \,+\, \sum_{k=m+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \\ &\leq\; \sum_{k=p+1}^{m-1} \frac{b-1}{b^k} \,+\, \frac{b-1}{b^m} \,-\, \frac{1}{b^m} \,+\, \sum_{k=m+1}^{N} \frac{b-1}{b^k} \;=\; -\,\frac{1}{b^m} \,+\, \sum_{k=p+1}^{N} \frac{b-1}{b^k}\,,\end{aligned}$$

donc, par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.48) et le calcul précédent, $f(a) \leq -b^{-m} + b^{-p} < b^{-p}$. Contradition avec $f(a) = b^{-p}$. Donc $a \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$.
On a montré 2.
Preuve de 3 : Si $a = 0$ alors $a \in S^{b;*}_{>0}$ donc, par 1, $f(a) = 0$. Si $a \neq 0$ alors l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \,;\, a_n \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc, par la proposition 9.4, il admet un minimum $p+1$, pour un $p \in \mathbb{N}$. En particulier, si $n \in [\![1;p]\!]$, $a_n = 0$ donc a satisfait l'hypothèse du 1. D'après (9.52), on a, pour $N \in [\![p+1;+\infty[\![$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;=\; \sum_{k=p+1}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;=\; \frac{a_{p+1}}{b^{p+1}} + \sum_{k=p+2}^{N} \frac{a_k}{b^k} \;\geq\; \frac{a_{p+1}}{b^{p+1}}$$

donc, par passage à la limite dans les inégalités (cf. proposition 3.48), $f(a) \geq (a_{p+1}/b^{p+1}) > 0$. On a montré 3.
Preuve de 4 : Soit $p \in \mathbb{N}$. On montre que b^{-p} a deux antécédents par f. On considère la suite $e^{(p)} \in S^{b;*}$ définie par $e^{(p)}_n = 0$, si $n \neq p$, et $e^{(p)}_p = 1$. Comme $e^{(p)} \in S^{b;*}_{>p}$, on a, par 1,

$$f\big(e^{(p)}\big) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \frac{e^{(p)}_k}{b^k} \;=\; \sum_{k=1}^{p-1} \frac{0}{b^k} + \frac{1}{b^p} \;=\; \frac{1}{b^p}\,.$$

Soit $a^{(p)} \in S^{b;*}$ définie par $a^{(p)}_n = 0$ si $n \leq p$ et, $a^{(p)}_n = b-1$, sinon. La suite $a^{(p)}$ satisfait l'hypothèse du 2 et appartient à $S^{b;*}_{>p;\,b-1}$. On a montré dans le 2 que, dans ce cas, $f(a^{(p)}) = b^{-p}$.
Comme $e^{(p)}_p = 1 \neq 0 = a^{(p)}_p$, les suites $e^{(p)}$ et $a^{(p)}$ sont différentes. Comme elles ont même image par f, f n'est pas injective (cf. définition 9.1). On a montré 4.
Preuve de 6 : On montre d'abord (9.48). Soit $(s;t) \in (S^{b;*})^2$ avec $s \prec' t$. Par la définition 9.29, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $s_p < t_p$ et, pour $n \in [\![1;p[\![$, $s_n = t_n$. Pour tout $N \in [\![p+1;+\infty[\![$, on a donc, d'après les propositions 3.9 et 3.28 et d'après (9.42),

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{s_k}{b^k} \;&=\; \sum_{k=1}^{p-1} \frac{s_k}{b^k} + \frac{s_p}{b^p} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{s_k}{b^k} \;=\; \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t_k}{b^k} + \frac{t_p}{b^p} + \frac{s_p - t_p}{b^p} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{s_k}{b^k} \\ &\leq\; \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t_k}{b^k} + \frac{t_p}{b^p} + \frac{s_p - t_p}{b^p} + \frac{1}{b^p} \;\leq\; \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t_k}{b^k} + \frac{t_p}{b^p} \;\leq\; \sum_{k=1}^{p} \frac{t_k}{b^k} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{t_k}{b^k}\,,\end{aligned}$$

puisque le dernier terme est positif. Par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.48), on obtient $f(s) \leq f(t)$. On a montré (9.48).
Passons à (9.47). Soit $(s;t) \in (S^{b;*})^2$ avec $f(s) < f(t)$. D'après la proposition 9.30, on a trois cas : $s = t$, $t \prec' s$ et $s \prec' t$.
Premier cas : $s = t$. Alors $f(s) = f(t)$. Contradiction avec l'hypothèse.
Deuxième cas : $t \prec' s$. Par (9.48), on a $f(t) \leq f(s)$. Contradiction avec l'hypothèse.
On se trouve donc forcément dans le troisième cas, donc $s \prec' t$. On a montré (9.47).
Il reste à montrer l'équivalence (9.49).
$\Longleftarrow$) : Par hypothèse, pour un $p \in \mathbb{N}^*$, s et t coïncident sur $[\![1;p[\![$ et $t_p = s_p + 1$ donc $s \prec' t$ par la définition 9.29. De plus, en utilisant le fait que $t \in S^{b;*}_{>p}$ et $s \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$, on a, pour $N \in [\![k+1;+\infty[\![$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{s_k}{b^k} \;&=\; \sum_{k=1}^{p-1} \frac{s_k}{b^k} + \frac{s_p}{b^p} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{s_k}{b^k} \;=\; \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t_k}{b^k} + \frac{s_p}{b^p} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{b-1}{b^k} \\ &=\; \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t_k}{b^k} + \frac{t_p - 1}{b^p} + \frac{1}{b^p} \cdot \Big(1 - \frac{1}{b^{N-p}}\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \frac{t_k}{b^k} - \frac{1}{b^N} \;=\; \sum_{k=1}^{N} \frac{t_k}{b^k} - \frac{1}{b^N}\,,\end{aligned}$$

d'après la proposition 3.9 et (9.44). Par passage à la limite $N \to +\infty$, on a, par unicité de la limite (cf. proposition 3.35) et la proposition 3.58, $f(s) = f(t) + 0 = f(t)$.
$\Longrightarrow$) : Par hypothèse $f(t) = f(s)$ et $s \prec' t$. Par la définition 9.29, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que s et t coïncident

sur $[\![1;p[\![$ et $t_p > s_p$, soit $t_p \geq s_p + 1$. On introduit les suites $(s';t') \in (S^{b;*})^2$ définies par, pour $n \in [\![1;p]\!]$, $s'_n = t'_n = 0$ et, pour $n \in [\![p+1;\infty[\![$, $s'_n = s_n$ et $t'_n = t_n$. Elles vérifient l'hypothèse du 2. Pour $N \in [\![p+1;+\infty[\![$, on a, d'après la proposition 3.9,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{t_k}{b^k} &= \sum_{k=1}^{p-1} \frac{t_k}{b^k} + \frac{t_p}{b^p} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{t_k}{b^k} = \sum_{k=1}^{p} \frac{s_k}{b^k} + \frac{t_p - s_p}{b^p} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{t_k}{b^k} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{s_k}{b^k} - \sum_{k=p+1}^{N} \frac{s_k}{b^k} + \frac{t_p - s_p}{b^p} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{t_k}{b^k} \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{s_k}{b^k} - \sum_{k=p+1}^{N} \frac{s'_k}{b^k} + \frac{t_p - s_p}{b^p} + \sum_{k=p+1}^{N} \frac{t'_k}{b^k}\,.\end{aligned}$$

D'après 2 et grâce à la proposition 3.46, on a, par passage à la limite $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente, $f(t) = f(s) - f(s') + (t_p - s_p)b^{-p} + f(t')$. Comme $f(t) = f(s)$, par hypothèse, on en déduit donc que $f(s') = (t_p - s_p)b^{-p} + f(t')$. Par 2, $f(s') \leq b^{-p}$ et $f(t') \geq 0$, donc $(t_p - s_p)b^{-p} + f(t') \leq b^{-p}$ et $(t_p - s_p)b^{-p} \leq b^{-p}$. D'où $t_p - s_p \leq 1$. Comme $t_p \geq s_p + 1$, on a $t_p = s_p + 1$. Donc $f(s') = b^{-p} + f(t')$. Comme $f(s') \leq b^{-p}$ et $f(t') \geq 0$, on a donc $f(t') = 0$ et $f(s') = b^{-p}$. Par 3, $t' = 0$ et, par 2, $s' \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$. Donc $t \in S^{b;*}_{>p}$ et $s \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$.
On a montré (9.49) et donc aussi 6.
Preuve de 5 : Soit $x \in [0;1[$. Par le théorème 9.32, il existe $a \in S^{b;*}$ telle que $f(a) = x$.
Premier cas : $a \in \hat{S}^{b;*}$. Alors $x \in f(\hat{S}^{b;*})$.
Deuxième cas : $a \in S^{b;*}_{\text{fin}\,;\,b-1}$. Il existe $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $a \in S^{b;*}_{>\ell;\,b-1}$. L'ensemble $\mathcal{D} = \{\ell \in \mathbb{N}\,;\ a \in S^{b;*}_{\ell;\,b-1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc elle admet un minimum p (cf. proposition 9.4). On a donc $a \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$ et $a_p < (b-1)$.
Soit $s : \mathbb{N}^* \longrightarrow C_b$ définie par, pour $n \in [\![p+1;+\infty[\![$, $s_n = 0$, par, pour $n \in [\![1;p[\![$, $s_n = a_n$ si $n < p$, et par $s_p = a_p + 1$. On a $s \in S^{b;*}_{>p}$. Le membre de droite de l'équivalence (9.49) avec $t = a$ est vrai donc, par (9.49), $f(a) = f(t) = f(s)$ avec $s \in S^{b;*}_{>p}$, donc en particulier $s \in \hat{S}^{b;*}$. D'où $x \in f(\hat{S}^{b;*})$.
On a montré que $[0;1[\subset f(\hat{S}^{b;*})$.
D'après 2 avec $p = 0$, tout antécédent de 1 par f appartient à $S^{b;*}_{>0;\,b-1}$ donc n'appartient pas à $\hat{S}^{b;*}$. Donc $1 \notin f(\hat{S}^{b;*})$ et, comme f est à valeurs dans $[0;1]$, $f(\hat{S}^{b;*}) \subset [0;1[$.
On a montré que $f(\hat{S}^{b;*}) = [0;1[$.
Soit $(a,a') \in \hat{S}^{b;*}$ tel que $f(a) = f(a')$. Supposons que $a \neq a'$. Par $\mathcal{O}_4$ dans la proposition 9.30, on a soit $a \prec' a'$ ou $a' \prec' a$.
Premier cas : $a \prec' a'$. Le membre de gauche de (9.49), avec $s = a$ et $t = a'$, est vrai donc, par (9.49), $a \in S^{b;*}_{\text{fin}\,;\,b-1}$. Contradiction avec le fait que $a \in \hat{S}^{b;*}$.
Deuxième cas : $a' \prec' a$. Par le raisonnement précédent, en échangeant les rôles de a et a', on obtient aussi une contradiction.
L'hypothèse "$a \neq a'$" est donc absurde et $a = a'$. On a montré que $f_{|\hat{S}^{b;*}}$ est injective.
On a montré que $f_{|\hat{S}^{b;*}}$ est bijective de $\hat{S}^{b;*}$ sur $[0;1[$ (cf. proposition 9.2).
Preuve de 7 :
$\Longleftarrow$) : Si, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $x = mb^{-p}$ avec $m \in \,]\!]0;b^p[\![\setminus \{b^j\,;\, j \in [\![0;p-1]\!]\}$ alors, d'après le théorème 9.27 appliqué à m, on a, pour une suite $\alpha \in S^b_{p-1}$ avec $\alpha_0 \geq 1$,

$$x = \frac{1}{b^p} \cdot \sum_{\ell=0}^{p-1} \alpha_\ell \cdot b^\ell = \sum_{\ell=0}^{p-1} \frac{\alpha_\ell}{b^{p-\ell}} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\alpha_{p-k}}{b^k}\,,$$

par changement d'indice (cf. proposition 3.9). Par 1, $x = f(t)$ pour la suite $t \in S^{b;*}_{>p}$ définie par $t_n = 0$ si $n \in [\![p+1;+\infty[\![$ et $t_n = \alpha_{p-n}$ si $n \in [\![1;p]\!]$. En particulier $t_p \geq 1$. Soit $s \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$ la suite définie par $s_{|[\![1;p[\![} = t_{|[\![1;p[\![}$, $s_p = t_p - 1$ et $s_{|[\![p+1;+\infty[\![} = 0$. Le membre de droite de (9.49) est vrai, donc, par (9.49), $x = f(t) = f(s)$ avec $s \prec' t$. Donc x admet deux développements (un propre et un impropre).
$\Longrightarrow$) : On suppose que x admet deux développements alors $x = f(t) = f(s)$ avec $(s;t) \in (S^{b;*})^2$ et $s \prec' t$

(cf. $\mathcal{O}_4$ dans la proposition 9.30). Le membre de gauche de (9.49) est vrai donc, par (9.49), $t \in S^{b;*}_{>p}$, $s \in S^{b;*}_{>p;\,b-1}$, $t_{|[\![1;p[\![} = s_{|[\![1;p[\![}$, $t_p = s_p + 1 > 0$ donc, par 1,

$$x \;=\; f(t) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \frac{t_k}{b^k} \;=\; \frac{1}{b^p} \cdot \sum_{k=1}^{p} t_k \cdot b^{p-k} \;=\; \frac{1}{b^p} \cdot \sum_{\ell=0}^{p-1} t_{p-\ell} \cdot b^{\ell} \;=:\; \frac{m}{b^p}$$

par changement d'indice (cf. proposition 3.9). Comme $t_p \neq 0$, $m \in [\![0; b^p[\![\setminus \{b^j \,;\, j \in [\![0; p-1]\!]\}$. □

Le théorème 9.32 donne, pour tout $x \in [0;1[$, une contruction d'un développement. Mais les x vérifiant les conditions du 7 du théorème 9.35 ont deux développements. Dans ce cas, lequel est fourni par la construction du théorème 9.32 ? C'est le développement propre, comme l'établit la

Proposition 9.38. *Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$ et $x \in [0;1[$.*

1. *S'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et $m \in]\!]0; b^p[\![\setminus \{b^j \,;\, j \in [\![0; p-1]\!]\}$ tels que $x = mb^{-p}$ alors la suite $a \in S^{b;*}$ vérifiant la relation de récurrence du théorème 9.32 satisfait la condition*

$$b^p\Big(x - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{a_k}{b^k}\Big) \;\in\; \mathbb{N}^* \quad et \quad \big(\forall\, n \in [\![p+1; +\infty[\![\,,\, a_n \,=\, 0\big)\,. \tag{9.54}$$

   En particulier, $a \in S^{b;*}_{>p}$ donc $a \in \hat{S}^{b;*}$ (Le développement associé à a est donc propre.).

2. *Réciproquement, si la suite $a \in S^{b;*}$ vérifiant la relation de récurrence du théorème 9.32 satisfait la condition* (9.54)*, pour un $p \in \mathbb{N}^*$, alors il existe $m \in]\!]0; b^p[\![\setminus \{b^j \,;\, j \in [\![0; p-1]\!]\}$ tel que $x = mb^{-p}$.*

On utilise ici la convention

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{a_k}{b^k} \;=\; 0\,.$$

Preuve : Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$ et $x \in [0;1[$.
Preuve de 1 : On suppose que $x = mb^{-p}$, pour un $p \in \mathbb{N}^*$ et un $m \in]\!]0; b^p[\![\setminus \{b^j \,;\, j \in [\![0; p-1]\!]\}$. D'après la preuve du 7 du théorème 9.35, $x = f(t)$ avec $t \in S^{b;*}_{>p}$, $t_p > 0$ et

$$x \;=\; f(t) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \frac{t_k}{b^k}\,. \tag{9.55}$$

Soit $q \in [\![1; p[\![$. On a, d'après (9.55) et la proposition 3.9,

$$x_q \;:=\; b^q\Big(x - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{t_k}{b^k}\Big) \;=\; b^q \sum_{k=q}^{p} \frac{t_k}{b^k} \;=\; \sum_{k=q}^{p} \frac{t_k}{b^{k-q}} \;=\; \sum_{\ell=0}^{p-q} \frac{t_{\ell+q}}{b^{\ell}} \;=\; t_q + \sum_{\ell=1}^{p-q} \frac{t_{\ell+q}}{b^{\ell}} \;=\; t_q + f(s)\,,$$

pour la suite $s = (t_{\ell+q})_{\ell \in \mathbb{N}^*} \in S^{b;*}_{>p-q}$. D'après le 5 du théorème 9.35, $f(s) \in [0;1[$ donc $t_q \leq x_q < t_q + 1$. Comme $t_q \in \mathbb{Z}$, on a, par la proposition 9.8, $t_q = E(x_q)$.
Si $q = p$, on a, de même,

$$x_q \;:=\; b^q\Big(x - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{t_k}{b^k}\Big) \;=\; t_p + 0 \;=\; t_p \in \mathbb{N}^*$$

et $t_p = E(x_p)$.
Si $q \in [\![p+1; +\infty[\![$, on a, de même,

$$x_q \;:=\; b^q\Big(x - \sum_{k=1}^{q-1} \frac{t_k}{b^k}\Big) \;=\; b^q \sum_{k=q}^{p} \frac{t_k}{b^k} \;=\; 0$$

donc $E(x_q) = 0 = t_q$. La suite t vérifie donc la relation de récurrence du théorème 9.32 donc, par le lemme 9.33, $t = a$. Par les propriétés de t, on obtient (9.54).
Preuve de 2 : On suppose que la suite $a \in S^{b;*}$ vérifiant la relation de récurrence du théorème 9.32 satisfait la condition (9.54). Alors $a \in S^{b;*}_{>p}$ donc, d'après le théorème 9.32 et (9.46),

$$x \;=\; f(a) \;=\; \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{b^k}\,.$$

Par la preuve du 7 du théorème 9.35, il existe $m \in \left]0; b^p\right[\setminus \{b^j\,;\, j \in [\![0; p-1]\!]\}$ tel que $x = mb^{-p}$. □

La procédure par récurrence du théorème 9.32 peut être recyclée pour déterminer le développement d'un nombre entier naturel dans la base b, avec $b \in [\![2; +\infty[\![$.

Proposition 9.39. *Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $m \in [\![b^N; b^{N+1}[\![$. On considère la suite réelle $a : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la relation de récurrence du théorème 9.32 pour le nombre réel $x = m \cdot b^{-N-1} \in [0; 1[$. On a $a_1 = E(mb^{-N})$ et*

$$\forall\, p \in [\![2; +\infty[\![\,, \quad a_p \;=\; E\left(b^{p-N-1}\left(m \,-\, \sum_{k=1}^{p-1} a_k \cdot b^{N+1-k}\right)\right)\,. \tag{9.56}$$

De plus, $a \in S^{b;*}_{>N+1}$ et la suite des chiffres du développement de m dans la base b (cf. définition 9.28 et théorème 9.27) est la suite $c \in S^b_{>N}$ donnée par, pour $n \in [\![0; N]\!]$, $c_n = a_{N+1-n}$ et, pour $n \in [\![N+1; +\infty[\![$, $c_n = 0$. En particulier, on a

$$m \;=\; d(c) \;=\; \sum_{k=0}^{N} c_k \cdot b^k \;=\; \sum_{k=0}^{N} a_{N+1-k} \cdot b^k\,. \tag{9.57}$$

Preuve de la proposition 9.39 : Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$ et $m \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(b^p)_{p\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ (cf. théorème 9.27), elle n'est pas majorée (cf. proposition 3.48). L'ensemble $D = \{p \in \mathbb{N}\,;\, b^p > m\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. Par la proposition 9.4, il admet un minimum. Comme $m \geq 1$, $\min D > 0$. Soit $N = (\min D) - 1 \in \mathbb{N}$. Comme $N + 1 = \min D$, $(N+1) \in D$ donc $b^{N+1} > m$. Comme $N < \min D$, $m \notin D$ donc $b^N \leq m$. D'où $m \in [\![b^N; b^{N+1}[\![$.
D'après la relation de récurrence du théorème 9.32 pour $x = m\cdot b^{-N-1} \in [0; 1[$, on a $a_1 = E(b\cdot m\cdot b^{-N-1}) = E(m \cdot b^{-N})$ et (9.41) donne (9.56). Par le 1 de la proposition 9.38 avec $p = N + 1$, on a $a \in S^{b;*}_{>N+1}$ et, d'après (9.46) avec $p = N + 1$ aussi et les théorèmes 9.32 et 9.35,

$$\frac{m}{b^{N+1}} \;=\; f(a) \;=\; \sum_{k=1}^{N+1} \frac{a_k}{b^k}$$

donc

$$m \;=\; \sum_{k=1}^{N+1} a_k \cdot b^{N+1-k} \;=\; \sum_{\ell=0}^{N} a_{N+1-\ell} \cdot b^{\ell} \tag{9.58}$$

avec les $a_{N+1-\ell} \in C_b$, pour $\ell \in [\![0; N]\!]$. Par l'unicité du développement de m en base b (cf. théorème 9.27), la suite des chiffres de ce développement est bien la suite c. De plus, (9.58) donne (9.57). □

Pour $b \in [\![2; +\infty[\![$, on combine maintenant les developpements en base b des entiers naturels et ceux des nombres réels de $[0; 1[$ pour obtenir les développements des nombres réels positifs.

Définition 9.40. *Soit $b \in [\![2; +\infty[\![$ et $x \in \mathbb{R}^+$. On note par E la fonction partie entière (cf. proposition 9.8). Soit $c \in S^b_{\text{fin}}$ la suite finie des chiffres du développement en base b de l'entier naturel $E(x)$ (cf. définition 9.28 et théorème 9.27). Soit $a \in S^{b;*}$ la suite infinie des chiffres d'un développement en base b de $(x - E(x)) \in [0; 1[$ (cf. définition 9.36 et théorème 9.35). On dit que l'égalité*

$$x \;=\; E(x) \,+\, \big(x \,-\, E(x)\big) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot b^k \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{b^k}$$

est un développement chiffré en base b du nombre réel x.

Lorsque $b = 10$, on retrouve les développements décimaux vus à l'école. Par exemple,

$$\frac{100}{3} \;=\; 33 + \frac{1}{3} \;=\; 3\cdot(10)^0 + 3\cdot(10)^1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{(10)^k}\,.$$

On note symboliquement ce développement par

$$\frac{100}{3} \;=\; 33{,}333333\overline{3}\,.$$

Les nombres de la forme $q/(10)^p$ avec $(p;q)\in\mathbb{N}^2$ sont appelés nombres décimaux. Ils ont deux développements décimaux d'après le théorème 9.35.

9.5 Suites réelles récurrentes définies par une fonction.

Dans cette partie, on donne une introduction à l'étude des suites récurrentes réelles définies par une fonction (cf. paragraphe 3.2.1). On donne un résultat général, le théorème du point fixe, et on présente une stratégie d'étude de telles suites sur des exemples. On aborde aussi, sur un exemple, la cas où une relation de récurrence donnée par une fonction n'est remplie par aucune suite.

9.5.1 Fonctions contractantes et théorème du point fixe.

Dans ce paragraphe, on poursuit l'étude des fonctions lipschitziennes entamée dans le paragraphe 5.3 et on introduit la notion de fonction contractante puis on établit le théorème du point fixe.

Commençons par donner une condition suffisante simple sur une fonction dérivable pour établir qu'elle est lipschitzienne (cf. définition 5.7).

Proposition 9.41. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$ et $f : I\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable.*

1. *Si I est un segment et f' est continue alors f est lipschitzienne.*
2. *Si*

$$k \;\geq\; \sup_{x\in I}\big|f'(x)\big| \;<\; +\infty\,, \tag{9.59}$$

alors f est k-lipschitzienne.

Preuve : On montre d'abord 2. Soit $(x;y)\in I^2$. Si $x=y$ alors $|f(x)-f(y)| = 0 \leq 0 = k|x-y|$.
Cas où $x<y$: Par hypothèse, f est dérivable sur $[x;y]$ donc continue sur $[x;y]$ (cf. proposition 6.6). Comme f est dérivable sur $]x;y[$, on a, par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), l'existence d'un $c\in]x;y[$ tel que $f(x)-f(y) = f'(c)(x-y)$. Donc

$$\big|f(x)\;-\;f(y)\big| \;=\; \big|f'(c)\big|\cdot|x-y| \;\leq\; k\cdot|x-y|\,,$$

par (9.59).
Cas où $x>y$: Par hypothèse, f est dérivable sur $[y;x]$ donc continue sur $[y;x]$ (cf. proposition 6.6). Comme f est dérivable sur $]y;x[$, on a, par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), l'existence d'un $c\in]y;x[$ tel que $f(x)-f(y) = f'(c)(x-y)$. Donc

$$\big|f(x)\;-\;f(y)\big| \;=\; \big|f'(c)\big|\cdot|x-y| \;\leq\; k\cdot|x-y|\,,$$

par (9.59).
On a montré 2.
Si I est un segment et f' est continue alors, par le théorème de Heine appliqué à la fonction f' (cf. théorème 5.3), f' est bornée ce qui implique (9.59) (cf. proposition 4.8). En appliquant le 2, on obtient que f est k-lipschitzienne donc lipschitzienne. On a monté 1. □

Définition 9.42. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. *On dit que la fonction f est contractante (sur I) s'il existe $k \in [0;1[$ tel que f soit k-lipschitzienne.*
2. *On appelle point fixe de f toute solution de l'équation d'inconnue $x \in I$ donnée par $f(x) = x$.*

Une propriété importante des fonctions contractantes est donnée dans la

Proposition 9.43. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction contractante. Alors f a au plus un point fixe.*

Preuve : Soit x et y des solutions de l'équation (E) d'inconnue $z \in I$ donnée par $f(z) = z$. Par la définition 9.42, il existe $k \in [0;1[$ tel que f soit k-lipschitzienne. En particulier, on a $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$. Comme x et y sont des solutions de (E), on a donc $|x-y| = |f(x)-f(y)| \leq k|x-y|$ soit $0 \geq (1-k)|x-y|$. Comme $1-k > 0$ et $|x-y| \geq 0$, on a nécessairement $|x-y| = 0$ soit $x = y$ (cf. (2.9)). □

Donnons un cas d'existence d'un point fixe.

Proposition 9.44. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f([a;b]) \subset [a;b]$. Alors il existe $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve : Soit $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$. g est continue par le paragraphe 4.2.2 et la proposition 4.32. Comme $f([a;b]) \subset [a;b]$, on a $g(a) \geq 0$, car $f(a) \geq a$, et $g(b) \leq 0$, car $f(b) \leq b$. Par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à g (cf. théorème 5.1), il existe $x \in [a;b]$ tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire $f(x) = x$. □

On en vient au théorème du point fixe.

Théorème 9.45. Théorème du point fixe. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ contractante et telle que $f([a;b]) \subset [a;b]$. Alors f a un unique point fixe $\ell \in [a;b]$. De plus, pour tout $d \in [a;b]$, la suite récurrente $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par $u_0 = d$ et la relation de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, est bien définie et convergente vers ℓ.*

Preuve : Comme f est contractante, f est k-lipschitzienne pour un $k \in [0;1[$ (cf. Définition 9.42). Par la proposition 5.8, f est continue. Comme $f([a;b]) \subset [a;b]$, f a un point fixe $\ell \in [a;b]$, par la proposition 9.44. Comme f est contractante, la proposition 9.43 assure que ce point fixe est unique.
Comme $f([a;b]) \subset [a;b]$, on sait, par la proposition 3.2, que les suites récurrentes u considérées sont toutes bien définies. Soit $d \in [a;b]$ et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente vérifiant $u_0 = d$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $(|u_n - \ell| \leq k^n|u_0 - \ell|)$.
Comme $k^0 = 1$, $|u_0 - \ell| = k^0|u_0 - \ell|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Par la définition de u et comme ℓ est un point fixe de f, on a $u_{n+1} - \ell = f(u_n) - f(\ell)$. Comme f est k-lipschitzienne, $|f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|$. Par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$|u_{n+1} - \ell| \;=\; \big|f(u_n) \,-\, f(\ell)\big| \;\leq\; k \cdot |u_n - \ell| \;\leq\; k \cdot k^n \cdot |u_0 - \ell| \;=\; k^{n+1} \cdot |u_0 - \ell|\,,$$

ce qui établit $\mathcal{P}(n+1)$.
Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $k \in [0;1[$, $\lim k^n = 0$, par la proposition 3.58, et $\lim k^n|u_0 - \ell| = 0$, par la proposition 3.46. D'après les propriétés $\mathcal{P}(n)$ et le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.45), la suite u converge vers ℓ. □

9.5.2 Étude de suites récurrentes réelles.

Dans ce paragraphe, on donne une stratégie d'étude des suites récurrentes définies par une fonction à valeurs réelles. On illustre cette stratégie sur des exemples simples. On montre aussi des limites de cette stratégie et on pointe certaines difficultés.

On se place dans le cadre de la proposition 3.2 du paragraphe 3.2.1. Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Étant donné un $d \in \mathcal{D}$, il existe, d'après la proposition 3.2, une unique suite récurrente u associée à f et de premier terme d, c'est-à-dire une application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ vérifiant $u_0 = d$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On cherche la nature d'une telle suite. Converge-t-elle ? Si oui, vers quoi ? Voici un premier résultat dans ce sens.

Proposition 9.46. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide $\mathbb{R}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Soit $d \in \mathcal{D}$ et $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ la suite récurrente associée à f de premier terme d. On suppose que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathcal{D}$. Alors $f(\ell) = \ell$.*

1. *On suppose que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathcal{D}$. Alors $f(\ell) = \ell$.*
2. *On suppose que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Alors ℓ est adhérent à $\mathcal{D}$. Si, de plus, $\lim\limits_{\ell} f$ existe alors $\ell = \lim\limits_{\ell} f$.*

Remarque 9.47. *Dans le cadre de la proposition 9.46, une solution de l'équation d'inconnue $x \in \mathcal{D}$ donnée par $f(x) = x$ est appelée un point fixe de f. L'action de f sur un tel point ne le change pas, d'où le nom de point fixe. Le résultat du 1 de cette proposition 9.46 dit que la limite possible dans $\mathcal{D}$ d'une suite récurrente associée à une fonction continue doit être un point fixe de la fonction en question. Attention, ce résultat ne s'applique que si l'on sait déjà que la suite considérée a une limite finie dans $\mathcal{D}$.*

Preuve de la proposition 9.46 : On suppose que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. Par définition de la limite (cf. définition 3.34), tout voisinage U de ℓ contient tous les termes de u à partir d'un certain rang. Comme ces termes sont dans $\mathcal{D}$, $U \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Donc ℓ est adhérent à $\mathcal{D}$ (cf. remarque 4.9).
On suppose de plus que $s := \lim\limits_{\ell} f$ existe. D'après la proposition 4.15, la suite $f \circ u$ tend vers s. Comme u est une suite récurrente associée à f, cette suite $f \circ u$ est la sous-suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ de u. Comme u tend vers ℓ, $f \circ u$ tend aussi vers ℓ, par la proposition 3.55. Par unicité de la limite de suite (cf. proposition 3.35), $s = \lim(f \circ u) = \ell$. On a montré le 2.
On suppose maintenant que $\ell = \lim u$ existe dans $\mathcal{D}$. Comme f est continue sur $\mathcal{D}$, $\lim\limits_{\ell} f$ existe et vaut $f(\ell)$ (cf. définition 4.14). En appliquant le 2, on obtient $\ell = f(\ell)$. □

Ce résultat suggère immédiatement la stratégie suivante pour l'étude d'une suite récurrente associée à une fonction continue : on cherche les points fixes de l'application, puis, pour un tel point fixe ℓ, on cherche à montrer que la suite considérée tend vers ℓ.
Si la suite considérée ne converge pas, cette stratégie n'aboutit pas, bien sûr. Mais si elle converge, on sait que la limite est parmi les points fixes. Souvent l'ensemble des points fixes est fini. On a donc qu'un nombre fini de candidat pour être limite de la suite considérée. On peut étudier tous les cas, à condition d'avoir pu identifier tous les points fixes.

Pour mettre en pratique cette stratégie, on essaye de dessiner la "toile d'araignée" associée à la suite considérée. Si cette dernière est une suite u associée à une fonction f, on place sur un dessin les points $(u_0, f(u_0))$, $(f(u_0); f(u_0)) = (u_1; u_1)$, $(u_1, f(u_1))$, $(f(u_1); f(u_1)) = (u_2; u_2)$, etc ... et on les relie dans l'ordre d'apparition. Ce graphe est la " toile d'araignée" associée à la suite. Lorsque la fonction f est croissante et a un point fixe ℓ, on obtient souvent un "escalier" montant ou descendant "tendant" vers le point $(\ell; \ell)$. Lorsque la fonction f est décroissante et a un point fixe ℓ, on obtient souvent un "colimaçon" sur lequel on voit que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et tendent toutes deux vers ℓ. Ce dessin permet souvent de deviner la limite (quand il y a convergence mais plusieurs points fixes) et aussi de dégager des propriétés pour montrer la convergence. En particulier, il peut être précieux lorsque l'on

souhaite appliquer le théorème du point fixe (cf. théorème 9.45). En effet, il peut être difficile de deviner un segment $[a;b]$ envoyé dans lui-même par f et sur lequel f est contractante (ou la valeur absolue $|f'|$ de la dérivée f' est petite).

Dans la suite, on va illustrer cette stratégie sur des exemples simples et entrevoir aussi ses limites. On commence par un exemple pour lequel on peut appliquer le théorème du point fixe (cf. théorème 9.45). Soit $f_1 :]1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_1(x) = (x+1)^{-1}$. D'après les propositions 4.23 et 4.32, la fonction $]-1;+\infty[\ni x \mapsto x+1$ est continue. De plus, elle ne s'annule pas donc, par inversion, f est continue (cf. proposition 4.32). Cherchons les points fixes de f_1. Pour $x > -1$, on a

$$f_1(x) \;=\; x \iff 1 \;=\; (x+1)x \iff x^2 + x - 1 \;=\; 0$$

et, comme la fonction polynôme $x \mapsto x^2+x-1$ a une unique racine dans $]1;+\infty[$, à savoir $r := (-1+\sqrt{5})/2$, on en déduit que r est l'unique point fixe de f_1. En dessinant la "toile d'araignée", on s'attend à pouvoir appliquer le théorème du point fixe sur le segment $I := [(1/2);1]$. Vérifions ce point.
Pour $x \in I$, on a $2 \geq x+1 \geq 1$ donc $(1/2) \leq f_1(x) \leq 1$. Donc $f_1(I) \subset I$. Par les propositions 6.5 et 6.8, f_1 est dérivable et, pour $x > -1$,

$$f_1'(x) \;=\; \frac{-1}{(x+1)^2}\,.$$

Pour $x \in I$, on a $1 + x \geq 3/2 > 0$ donc $(1+x)^2 \geq 9/4$ donc $|f_1'(x)| \leq (4/9)$. D'après la proposition 9.41, f_1 est $(4/9)$-lipschitzienne et, comme $0 < (4/9) < 1$, f_1 est contractante (cf. définition 9.42). Soit $d \in I$. D'après le théorème du point fixe pour $[a;b] = I$ (cf. théorème 9.45), la suite récurrente associée à f_1 de premier terme d est bien définie et converge vers l'unique point fixe de f_1 qui appartient à I. Comme f_1 a un unique point fixe r, celui qui appartient à I est forcément r.

Voyons maintenant une situation où l'on ne peut pas appliquer le théorème du point fixe sur un segment contenant un seul point fixe. Soit $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f_2(x) = 1 - x^2$. D'après les propositions 4.23 et 4.32, f_2 est continue. Quels sont ses points fixes ? Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_2(x) \;=\; x \iff x^2 + x - 1 \;=\; 0$$

et, comme la fonction polynôme $x \mapsto x^2 + x - 1$ a pour racine $r = (-1+\sqrt{5})/2$ et $\tilde{r} = (-1-\sqrt{5})/2$, les points fixes de f_2 sont précisément r et $\tilde{r}$.
Montrons que l'on ne peut appliquer le théorème du point fixe (cf. théorème 9.45) sur aucun segment $[a;b]$ contenant strictement r (i.e. $r \in [a;b]$ mais $\{r\} \neq [a;b]$). Pour ce faire, il suffit de montrer que f_2 ne peut être contractante sur un tel segment.
Supposons que f_2 soit contractante sur un segment $[a;b]$ tel que $r \in [a;b]$ et $[a;b] \setminus \{r\} \neq \emptyset$. Il existe donc $k \in [0;1[$ tel que, pour tout $(x;y) \in [a;b]^2$, $|f_2(x) - f_2(y)| \leq k|x-y|$. Pour tout $x \in [a;b] \setminus \{r\}$, on a donc $|f_2(x) - f_2(r)| \leq k|x-r|$ donc

$$\left|\frac{f_2(x) - r}{x - r}\right| \;=\; \frac{|f_2(x) - f_2(r)|}{|x-r|} \;\leq\; k\,. \tag{9.60}$$

Pour $x \in [a;b] \setminus \{r\}$,

$$\frac{f_2(x) - r}{x - r} \;=\; \frac{r^2 - x^2}{x - r} \;=\; -(r+x)\,.$$

Cette fraction tend vers $-2r$ lorsque x tend vers r (cf. propositions 4.23 et 4.32). D'après la proposition 4.32, la valeur absolue de cette fraction tend, lorsque x tend vers r, vers le réel $|-2r| = 2r$. Par passage à la limite $x \to r$ dans les inégalités (9.60) (cf. proposition 4.36), on obtient $2r \leq k < 1$. Contradiction car $2r = -1 + \sqrt{5} > -1 + \sqrt{4} = -1 + 2 = 1$, par la proposition 9.10.

Même lorsque le théorème du point fixe (cf. théorème 9.45) s'applique, il est parfois plus commode de refaire sa preuve dans le cas particulier que l'on considère. Voyons un exemple. Soit $\mathcal{D} = [-(1/2);+\infty[$ et $f_3 : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par, pour $x \in \mathcal{D}$, $f_3(x) = \sqrt{2x+1}$.
D'après les propositions 4.23 et 4.32, la fonction $]-(1/2);+\infty[\ni x \mapsto 2x+1$ est continue. De plus, elle est

strictement positive donc, par composition avec la racine carrée qui est continue (cf. proposition 9.10), f_3 est bien définie et continue (cf. proposition 4.32).
Cherchons les points fixes de f_3. Pour $x \geq -(1/2)$, on a, d'après la proposition 9.10,

$$f_3(x) = x \iff \left\{ \begin{array}{c} f_3(x) = x \\ \text{et } x \geq 0 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{c} 2x + 1 = x^2 \\ \text{et } x \geq 0 \end{array} \right\} \iff x = 1 + \sqrt{2}\,.$$

La fonction f_3 a donc $s := 1 + \sqrt{2}$ pour unique point fixe.
On vérifie que $f_3(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$. Pour $x \geq -(1/2)$, $f_3(x) \geq 0 \geq -(1/2)$ donc $f_3(x) \in \mathcal{D}$. Ceci étant vrai pour tous les $x \geq -(1/2)$, on a montré que $f_3(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$.
Soit $d \in \mathbb{R}^+$. Par la proposition 3.2, la suite récurrente u associée à f_3 de premier terme d est bien définie. On cherche à montrer que u converge vers s.
On vérifie tout d'abord que u est positive. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (u_n \geq 0)$. Comme $u_0 = d \geq 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} = f_3(u_n) \geq 0$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite u est donc positive.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $f_3(u_n) + f_3(s) \geq f_3(s) = s > 0$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - s &= f_3(u_n) - f_3(s) = \frac{\big(f_3(u_n) - f_3(s)\big) \cdot \big(f_3(u_n) + f_3(s)\big)}{f_3(u_n) + f_3(s)} = \frac{f_3(u_n)^2 - f_3(s)^2}{f_3(u_n) + f_3(s)} \\ &= 2 \cdot \frac{u_n - s}{f_3(u_n) + f_3(s)}\,. \end{aligned}$$

Comme $u_n \geq 0$, on a $f_3(u_n) \geq f_3(0) = 1$ (cf. proposition 9.10) et $f_3(u_n) + f_3(s) \geq 1 + s$ donc

$$\big|u_{n+1} - s\big| = 2 \cdot \frac{|u_n - s|}{f_3(u_n) + f_3(s)} \leq \frac{2}{1 + s} \cdot |u_n - s| = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \cdot |u_n - s|\,. \tag{9.61}$$

Soit $k := 2/(2+\sqrt{2}) \in [0;1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{Q}(n) = (|u_n - s| \geq |d - s|k^n)$. Comme $|u_0 - s| = |d - s|k^0$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. D'après (9.61) et l'hypothèse de récurrence,

$$\big|u_{n+1} - s\big| \leq k \cdot |u_n - s| = k \cdot |d - s| \cdot k^n = |d - s| \cdot k^{n+1}\,.$$

Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $k \in [0;1[$, la suite (k^n) tend vers 0 (cf. proposition 3.58) et, par produit (cf. proposition 3.46), la suite $(|d - s|k^n)$ tend aussi vers 0. D'après les propriétés $\mathcal{Q}(n)$ et le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.45), u converge vers s.

9.5.3 Autour de l'existence de suites récurrentes réelles.

Dans la proposition 3.2, on a vu une condition suffisante pour qu'une suite récurrente soit bien définie. Que se passe-t-il lorsque cette condition n'est pas vérifiée ? L'objet de ce paragraphe est de traiter cette question sur un exemple. On va voir que la valeur initiale choisie peut jouer un rôle. En particulier, on verra que, pour certaines valeurs initiales, la relation de récurrence ne définit pas une suite. Pour bien comprendre ce phénomène, on étudie une autre suite récurrente.

On considère la fonction $f : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2\sqrt{x-1}$. On note que $f([1;+\infty[) \not\subset [1;+\infty[$ puisque $f(1) = 0 \notin [1;+\infty[$. On se demande pour quelles valeurs initiales $d \in \mathbb{R}$, la suite récurrente u associée à f est bien définie (cf. définition 3.4).
On remarque que $f([2;+\infty[) \subset [2;+\infty[$. En effet, si $x \geq 2$ alors $x - 1 \geq 1$ et, comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante (cf. proposition 9.10 ou bien proposition 8.13), $f(x) \geq 2\sqrt{1} = 2$. D'après la proposition 3.2, u est bien définie si $d \geq 2$.
Si $d < 1$ alors d n'appartient pas au domaine de définition de f donc u_1 n'est pas défini. Si $d = 1$, on a bien $u_1 = 2\sqrt{1-1} = 2\sqrt{0} = 0$ (cf. proposition 9.10 ou bien proposition 8.13) mais, comme u_1 n'appartient pas

au domaine de définition de f, u_2 n'est pas défini. On se demande donc pour quels $d \in]1;2[$ la procédure de récurrence amène à un terme strictement inférieur à 1. On va voir que c'est toujours le cas.
Tout d'abord, on vérifie que f est continue et que 2 est son unique point fixe. D'après les propositions 4.23 et 4.32, la fonction $[1;+\infty[\ni x \mapsto x-1$ est continue. Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on peut la composer avec $\sqrt{\cdot}$. Donc f est bien définie et, comme $\sqrt{\cdot}$ est continue (cf. proposition 9.10 ou bien proposition 8.13), f l'est aussi par composition (cf. corollaire 4.30). De plus, pour $x \geq 1$,

$$x \;=\; 2\sqrt{x-1} \iff \frac{x^2}{4} \;=\; x-1 \iff x^2-4x+4 \;=\; 0 \iff x \;=\; 2\,.$$

Donc 2 est le seul point fixe de f.
Prenons $d \in]1;2[$ et supposons que u soit bien définie. Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1;+\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(u_n-2)^2 \geq 0$ donc $u_n^2/4 \geq u_n - 1$ et, comme $\sqrt{\cdot}$ est croissante (cf. proposition 9.10 ou bien proposition 8.13), $u_n = \sqrt{u_n^2} = 2\sqrt{u_n^2/4} \geq 2\sqrt{u_n-1} = f(u_n) = u_{n+1}$. Par la proposition 3.23, u est décroissante. Par la proposition 3.51, u tend vers $\inf u$. Comme u est minorée par 1, $1 \leq \inf u \leq u_0 < 2$. Comme f est continue et $\lim u$ est un réel dans $[1;+\infty[$, $\lim u = \inf u$ doit être un point fixe de f, par la proposition 9.46. Contradiction car $\lim u = \inf u < 2$ et 2 est le seul point fixe de f. Cette contradiction montre que la suite u n'est pas bien définie.

On a donc montré que, pour $d \geq 2$, la suite u est bien définie et, pour $d < 2$, elle n'est pas définie. On voit que l'existence même de la suite dépend crucialement du premier terme. C'est un exemple de la sensibilité du processus de construction par récurrence d'une suite à la valeur initiale.

Pour mieux comprendre pourquoi u n'est pas définie dans le cas $d \in]1;2[$. On procède à une étude plus précise de f. On montre tout d'abord que f est continue et bijective de $[1;+\infty[$ sur $\mathbb{R}^+$.
D'après les propositions 4.23 et 4.32, la fonction $[1;+\infty[\ni x \mapsto x-1$ est continue. Comme elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on peut la composer avec $\sqrt{\cdot}$. Donc f est bien définie et, comme $\sqrt{\cdot}$ est continue (cf. proposition 9.10 ou bien proposition 8.13), f est aussi continue par composition (cf. corollaire 4.30). Pour $x > x' \geq 1$, on a $x-1 > x'-1$ et, comme $\sqrt{\cdot}$ est strictement croissante (cf. proposition 9.10 ou bien proposition 8.13), $f(x) = 2\sqrt{x-1} > 2\sqrt{x'-1} = f(x')$. Donc f est strictement croissante. Par la proposition 7.3, f est bijective de $[1;+\infty[$ sur $f([1;+\infty[)$ et sa bijection réciproque est continue. Comme $\sqrt{\cdot}$ est positive (cf. proposition 9.10 ou bien proposition 8.13), f l'est aussi. Donc $f([1;+\infty[) \subset \mathbb{R}^+$. Soit $y \in \mathbb{R}^+$. On résoud, pour $x \geq 1$, l'équation $f(x) = y$. Comme $y \geq 0$, on a

$$y \;=\; 2\sqrt{x-1} \iff \frac{y^2}{4} \;=\; x-1 \iff x \;=\; 1+\frac{y^2}{4}\,.$$

On a, en particulier, $y \in f([1;+\infty[)$. On a montré donc que $\mathbb{R}^+ \subset f([1;+\infty[)$ et, par l'inclusion inverse, on obtient $f([1;+\infty[) = \mathbb{R}^+$. De plus, les équivalences précédentes montrent, par la proposition 9.2, que la bijection réciproque $g = f^{\langle -1\rangle}$ de f est la bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1;+\infty[$ donnée par, pour $y \geq 0$, $g(y) = 1 + y^2/4$.
Maintenant, on étudie les (éventuelles) suites récurrentes associées à g. Comme $g(\mathbb{R}^+) = [1;+\infty[\subset \mathbb{R}^+$, on a, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, l'existence de la suite récurrente v associée à g de premier terme a, d'après la proposition 3.2. Pour étudier v, on a vu plus haut qu'il est pertinent de chercher les points fixes de g, puisque g est continue. Pour $x \geq 0$, on a

$$g(x) \;=\; x \iff 1+\frac{x^2}{4} \;=\; x \iff x^2-4x+4 \;=\; 0 \iff (x-2)^2 \;=\; 0 \iff x \;=\; 2\,.$$

Donc 2 est l'unique point fixe de g. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n \;=\; \frac{v_n^2 - 4v_n + 4}{4} \;=\; \frac{(v_n-2)^2}{4} \;\geq\; 0\,. \tag{9.62}$$

Par la proposition 3.23, v est croissante et, comme $v_0 = a \geq 0$, v est positive. Comme v est croissante, elle admet $\sup v \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ pour limite, par la proposition 3.51. Si $\sup v \in \mathbb{R}^+$ alors, par la proposition 9.46, $\sup v$ est un point fixe de g donc $\sup v = 2$.

Si $a > 2$ alors $\sup v \geq v_0 = a > 2$ donc, d'après ce que l'on vient de démontrer, $\sup v \notin \mathbb{R}$ ce qui donne $\lim v = \sup v = +\infty$.
Prenons $a \in [0;2[$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n) = (v_n \in [0;2[)$ est vraie. Comme $v_0 = a \in [0;2[$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Comme v est positive, $v_{n+1} \geq 0$. De plus,

$$v_{n+1} - 2 = g(v_n) - g(2) = \frac{v_n^2}{4} - \frac{4}{4} = \frac{v_n^2 - 4}{4} < 0\,,$$

puisque, par hypothèse de récurrence, $0 \leq v_n < 2$ donc $v_n^2 < 4$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, 2 majore la suite positive v donc $\sup v \in [0;2]$. D'après ce qui précède, $\lim v = \sup v = 2$.
Prenons $a = 2$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{Q}(n) = (v_n = 2)$ est vraie. Comme $v_0 = a = 2$, $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+1} = f(v_n) = f(2) = 2$. Donc $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour toute valeur initiale $a \in \mathbb{R}^+$, on a donc montré l'existence de la limite de v en s'appuyant sur la stratégie du début du présent paragraphe. Au passage, on a aussi constaté une dépendance de cette limite à la valeur initiale : si $a \leq 2$, v tend vers 2 et si $a > 2$, v tend vers $+\infty$.

Voyons maintenant comment l'étude de v permet de comprendre, dans le cas où $d \geq 1$, que la non-existence de u implique que $d < 2$. On suppose donc $d \geq 1$. Si la relation de récurrence donnée par f ne définit pas une suite récurrence u la satisfaisant alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et une application $u^{(p)} : [\![0;p]\!] \longrightarrow [1;+\infty[$ tels que $u^{(p)}(0) = d$, $f(u^{(p)}(p)) < 1$ et

$$\forall\, n \in [\![0;p-1]\!]\,, \quad u^{(p)}(n+1) = f\big(u^{(p)}(n)\big)\,.$$

Soit $a := f(u^{(p)}(p)) \in \mathbb{R}^+$. Considérons la suite récurrente v associée à g et de premier terme a. Pour $q \in [\![1;p]\!]$, soit

$$\mathcal{R}(q) = \Big(u^{(p)}(p-q) = v_q\Big)\,.$$

Comme $v_0 = a = f(u^{(p)}(p))$, on a $v_1 = g(v_0) = (g \circ f)(u^{(p)}(p)) = u^{(p)}(p)$, puisque $g \circ f = \mathrm{id}_{|[1;+\infty[}$ (cf. proposition 9.2). Donc $\mathcal{R}(1)$ est vraie. Si $p = 1$, on a montré que $\mathcal{R}(q)$ est vraie pour tout $q \in [\![1;p]\!]$.
Supposons maintenant que $p > 1$. Supposons $\mathcal{R}(q)$ vraie pour un $q \in [\![1;p[\![$. On a $u^{(p)}(p-q) = v_q$ donc $v_{q+1} = g(v_q) = (g \circ f)(u^{(p)}(p-q-1)) = u^{(p)}(p-(q+1))$. Donc $\mathcal{R}(q+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence finie (cf. théorème 9.15 avec $n_0 = 1$ et $n_1 = p$), $\mathcal{R}(q)$ est vraie pour tout $q \in [\![1;p]\!]$.
Dans tous les cas, on a, par $\mathcal{R}(p)$ et $\mathcal{P}(p)$, $d = u^{(p)}(0) = v_p < 2$.

9.6 Convexité.

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de convexité d'une fonction réelle définie sur un intervalle, notion très importante notamment pour les problèmes d'extréma (voir plus loin). La convexité d'une telle fonction exprime une propriété géométrique de son graphe et ne semble pas, de prime abord, être reliée à la régularité de la fonction. C'est pourtant le cas. De plus, pour les fonctions régulières, on dispose d'une condition suffisante simple pour avoir une fonction convexe.

Une partie $\mathcal{A}$ du plan est dite *convexe* quand elle vérifie la propriété suivante : si M et N sont deux points de $\mathcal{A}$, alors le segment $[MN]$ est tout entier contenu dans $\mathcal{A}$. Une fonction définie sur un intervalle I est convexe si la partie du plan située au-dessus de son graphe est convexe. Ceci se traduit par la définition suivante :

Définition 9.48. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est* convexe *(sur I) si, pour tout $(a;b) \in I^2$ avec $a < b$, pour tout $t \in]0;1[$, on a*
$$f\big(ta + (1-t)b\big) \;\leq\; tf(a) \,+\, (1-t)f(b)\,.$$
2. *On dit que f est* strictement convexe *(sur I) si, pour tout $(a;b) \in I^2$ avec $a < b$, pour tout $t \in]0;1[$, on a*
$$f\big(ta + (1-t)b\big) \;<\; tf(a) \,+\, (1-t)f(b)\,.$$
3. *On dit que f est* concave *si $-f$ est convexe, c'est-à-dire si, pour tout $(a;b) \in I^2$ avec $a < b$, pour tout $t \in]0;1[$, on a*
$$f\big(ta + (1-t)b\big) \;\geq\; tf(a) \,+\, (1-t)f(b)\,.$$
4. *On dit que f est* strictement concave *si $-f$ est strictement convexe, c'est-à-dire si, pour tout $(a;b) \in I^2$ avec $a < b$, pour tout $t \in]0;1[$, on a*
$$f\big(ta + (1-t)b\big) \;>\; tf(a) \,+\, (1-t)f(b)\,.$$

Donnons tout de suite deux exemples. Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. L'application $\mathrm{Id} : I \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\mathrm{Id}(x) = x$, pour $x \in I$, est convexe. Elle est aussi concave ! Soit $c \in \mathbb{R}$. L'application constante égale à c sur I est aussi convexe et concave.
Dans le cadre de cette définition 9.48, on remarque que, lorsque $t = 0$, on a $f(ta + (1-t)b) = f(b) = tf(a) + (1-t)f(b)$ et, lorsque $t = 1$, on a $f(ta + (1-t)b) = f(a) = tf(a) + (1-t)f(b)$.

On dispose d'une caractérisation de la convexité en terme de "cordes". Étant donnés un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ et une fonction $I \longrightarrow \mathbb{R}$, une corde est un segment qui relie deux points du graphe de f.

Proposition 9.49. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe sur I, i.e.*
$$\forall (a;b) \in I^2\,;\, a < b\,, \forall t \in]0;1[\,, f\big(ta + (1-t)b\big) \;\leq\; tf(a) \,+\, (1-t)f(b)\,. \tag{9.63}$$
2. *Pout tout $(x;y;z) \in I^3$ avec $x < y < z$, les pentes des trois cordes reliant respectivement $(x;f(x))$ et $(y;f(y))$, $(x;f(x))$ et $(z;f(z))$, $(y;f(y))$ et $(z;f(z))$, vérifient les inégalités*
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\leq\; \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \;\leq\; \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\,. \tag{9.64}$$
3. *Pour tout $a \in I$, la fonction $\varphi_a \;: I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in I \setminus \{a\}$,*
$$\varphi_a(t) \;=\; \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \tag{9.65}$$
est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

On a aussi l'équivalence des propositions suivantes :

1' La proposition 1 avec la dernière inégalité dans (9.63) *remplacée par une inégalité stricte (proposition disant que f est strictement convexe).*

2' La proposition 2 avec des inégalités strictes dans (9.64)*.*

3' La proposition 3 disant cette fois que φ_a est strictement croissante.

Preuve : Montrons d'abord (2) $\Longleftrightarrow$ (3), puis (2) $\Longleftrightarrow$ (1) et, enfin, (1′) $\Longleftrightarrow$ (2′) $\Longleftrightarrow$ (3′).
(3) $\Longrightarrow$ (2) : On suppose (3) vraie. Prenons $x < y < z$ dans I. Comme φ_x est croissante, on obtient la première inégalité de (9.64). En remarquant que
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \;=\; \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \;=\; \varphi_z(x) \quad \text{et} \quad \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \;=\; \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \;=\; \varphi_z(y)\,,$$

et en utilisant la croissance de φ_z, on obtient la seconde inégalité de (9.64). On a montré (2).
(2) $\Longrightarrow$ (3) : On suppose (2) vraie. Soit $a \in I$. Par la définition 4.6, il suffit de montrer que, si $s \leq t$ dans $I \setminus \{a\}$, alors $\varphi_a(s) \leq \varphi_a(t)$. Si $s = t$ dans $I \setminus \{a\}$, on a $\varphi_a(s) = \varphi_a(t)$ donc $\varphi_a(s) \leq \varphi_a(t)$. Prenons $(s;t) \in (I \setminus \{a\})^2$ avec $s < t$. On montre que $\varphi_a(s) \leq \varphi_a(t)$, ce qui donnera (3).
Premier cas : $s < t < a$.
La seconde inégalité dans (9.64), appliquée à $(x;y;z) = (s;t;a)$, donne $\varphi_a(s) \leq \varphi_a(t)$.
Deuxième cas : $s < a < t$.
Les deux inégalités dans (9.64), appliquée à $(x;y;z) = (s;a;t)$, implique $\varphi_a(s) \leq \varphi_a(t)$.
Troisième cas : $a < s < t$.
La première inégalité dans (9.64), appliquée à $(x;y;z) = (a;s;t)$, donne $\varphi_a(s) \leq \varphi_a(t)$.
On a montré (3).
(2) $\Longrightarrow$ (1) : On suppose (2) vraie. Prenons $x < z$ dans I. Soit $t \in]0;1[$ et $y = tx + (1-t)z$. Comme $y - x = (t-1)(x-z) > 0$ et $y - z = t(x-z) < 0$, on a $y \in]x;z[\subset I$. La première inégalité de (9.64) donne

$$\frac{f(y) - f(x)}{(1-t)(z-x)} \;\leq\; \frac{f(z) - f(x)}{z-x}$$

ce qui implique, puisque $(1-t)(z-x) > 0$,

$$f\big(tx + (1-t)z\big) \;=\; f(y) \;\leq\; f(x) \,+\, (1-t)\cdot\big(f(z) - f(x)\big) \;=\; tf(x) \,+\, (1-t)f(z)\,.$$

Ceci étant vrai pour tout $(x;z) \in I^2$ avec $x < z$ et tout $t \in]0;1[$, on obtient donc (9.63) (avec a remplacé par x et b remplacé par z). On a montré (1).
(1) $\Longrightarrow$ (2) : On suppose (1) vraie. Prenons $x < y < z$ dans I. Il existe $t \in]0;1[$ tel que $y = tx + (1-t)z$. En effet, en posant

$$t \;:=\; \frac{y-z}{x-z}\,,$$

on a bien $y = tx + (1-t)z$ et, comme $x < y < z$, $t \in]0;1[$.
D'après l'hypothèse avec $(a;b) = (x;z)$, on a $f(y) - f(x) \leq (1-t)(f(z) - f(x))$ et, en divisant par $(1-t)(z-x) > 0$, on obtient, comme $y - x = (1-t)(z-x)$,

$$\frac{f(y) - f(x)}{y-x} \;=\; \frac{f(y) - f(x)}{(1-t)(z-x)} \;\leq\; \frac{f(z) - f(x)}{z-x}\,,$$

ce qui donne la première inégalité de (9.64). Toujours d'après l'hypothèse avec $(a;b) = (x;z)$, on a aussi $f(y) - f(z) \leq t(f(x) - f(z))$ et, en divisant par $t(x-z) < 0$, on obtient, comme $y - z = t(x-z)$,

$$\frac{f(y) - f(z)}{y-z} \;=\; \frac{f(y) - f(z)}{t(x-z)} \;\geq\; \frac{f(x) - f(z)}{x-z}\,,$$

ce qui donne la seconde inégalité de (9.64). On a montré (9.64) et aussi (2).
On peut reprendre les arguments précédents, en remplaçant de manière appropriée des inégalités larges par des inégalités strictes, pour obtenir l'équivalence des propositions (1′), (2′) et (3′). □

Donnons d'autres exemples de fonctions convexes. Soit $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $g(x) = \alpha x + \beta$, pour $x \in \mathbb{R}$. Là encore g est convexe et concave ! Il y a égalité dans l'inégalité (9.63) avec f remplacée par g. La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ mais pas concave sur $\mathbb{R}$. Vérifions ces affirmations.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = |x|$, pour $x \in \mathbb{R}$. Si f était concave, $-f$ serait convexe et on aurait, en particulier, pour $a = -1 < 1 = b$ et $t = 1/2$,

$$-\left|(-1)\cdot\frac{1}{2} \,+\, 1\cdot\Big(1 \,-\, \frac{1}{2}\Big)\right| \;\leq -|-1|\cdot\frac{1}{2} \,+\, \big(-|1|\big)\cdot\Big(1 \,-\, \frac{1}{2}\Big)$$

soit $0 \leq -1$. Contradiction.
Montrons maintenant que f est convexe. On montre que φ_a est croissante pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Permier cas : $a = 0$. φ_a est constante égale à -1 sur $]-\infty;0[$ et constante égale à 1 sur $]0;+\infty[$, donc

croissante.
Deuxième cas : $a > 0$. φ_a est constante égale à 1 sur $[0;+\infty[\setminus\{a\}$. Pour $t < 0$, $\varphi_a(t) = -(t+a)/(t-a)$. Elle est donc dérivable sur $]-\infty;0[$ (cf. propositions 6.5 et 6.8) et, pour $t < 0$, d'après (6.4),

$$\varphi_a'(t) \;=\; -\frac{t-a-(t+a)}{(t-a)^2} \;=\; \frac{2a}{(t-a)^2} \;\geq\; 0$$

donc φ_a croît sur $]-\infty;0]$ jusqu'à $\varphi_a(0) = 1$, par le corollaire 6.15. On a montré la croissance de φ_a.
Troisième cas : $a < 0$. φ_a est constante égale à -1 sur $]-\infty;0]\setminus\{a\}$. Pour $t > 0$, $\varphi_a(t) = (t+a)/(t-a)$. Elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ (cf. propositions 6.5 et 6.8) et, pour $t > 0$, d'après (6.4),

$$\varphi_a'(t) \;=\; \frac{t-a-(t+a)}{(t-a)^2} \;=\; \frac{-2a}{(t-a)^2} \;\geq\; 0$$

donc φ_a croît sur $[0;+\infty[$ à partir de $\varphi_a(0) = -1$, par le corollaire 6.15. On a montré la croissance de φ_a. Par la proposition 9.49, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Voyons maintenant une propriété remarquable des fonctions convexes sur un intervalle **ouvert**. Elles sont automatiquement continues et ont une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point de l'intervalle, comme l'atteste la

Proposition 9.50. *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On a les propriétés suivantes.*

1. *La fonction f est continue sur I.*
2. *Soit $a \in I$. La fonction f admet une dérivée à droite en a, notée $f_d'(a)$. La fonction f admet une dérivée à gauche en a, notée $f_g'(a)$.*
3. *Les fonctions $f_d' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_g' : I \longrightarrow \mathbb{R}$, définies respectivement par $x \mapsto f_d'(x)$ et $x \mapsto f_g'(x)$ sont croissantes et, pour tout $x \in I$, $f_g'(x) \leq f_d'(x)$.*

Preuve : On démontre d'abord le 2.
Soit $a \in I$. Comme I est un intervalle ouvert, $I\cap]-\infty;a[$ et $I\cap]a;+\infty[$ sont non vides (cf. remarque 1.8). Par la proposition 9.49, la fonction φ_a est croisssante. En particulier, en prenant $(a_-;a_+) \in I^2$ avec $a_- < a < a_+$, on a

$$b \;:=\; \sup_{x\in I\cap]-\infty;a[} \varphi_a(x) \;\leq\; \varphi_a(a_+) \;<\; +\infty \quad\text{et}\quad \inf_{x\in I\cap]a;+\infty[} \varphi_a(x) \;\geq\; \varphi_a(a_-) \;>\; -\infty\,. \tag{9.66}$$

De plus, la borne b minore toutes les valeurs $\varphi_a(a_+)$, pour $a_+ \in I\cap]a;+\infty[$ donc, par définition de la borne inférieure de φ_a sur cet ensemble (cf. définition 1.11),

$$\sup_{x\in I\cap]-\infty;a[} \varphi_a(x) \;=\; b \;\leq\; \inf_{x\in I\cap]a;+\infty[} \varphi_a(x)\,. \tag{9.67}$$

Par la proposition 4.39 et (9.67), les limites suivantes existent et on a

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \;=\; \sup_{x\in I\cap]-\infty;a[} \varphi_a(x) \;\leq\; \inf_{x\in I\cap]a;+\infty[} \varphi_a(x) \;=\; \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\,.$$

D'après (9.66) et la définition 6.3, la fonction f admet en a une dérivée à droite et une dérivée à gauche et on a $f_g'(a) \leq f_d'(a)$. On a montré 2 et la dernière affirmation de 3.
Soit $w < x < y < z$ dans I. Par hypothèse, on a les inégalités de (9.64) pour $(w;x;y)$ et pour $(x;y;z)$, ce qui donne

$$\frac{f(x)-f(w)}{x-w} \;\leq\; \frac{f(y)-f(w)}{y-w} \;\leq\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \tag{9.68}$$

et

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\leq\; \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \;\leq\; \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\,. \tag{9.69}$$

D'après ce qui précèdent et la proposition 4.36, on peut passer à la limite $w \to x^-$ dans l'inégalité

$$\frac{f(x)-f(w)}{x-w} \;\leq\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,,$$

déduite de (9.68), et obtenir, grâce à (9.68) et (9.69),

$$f'_g(x) \;\leq\; \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \;\leq\; \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,.$$

On peut aussi passer à la limite $y \to z^-$ dans l'inégalité de droite de (9.69) et obtenir

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \;\leq\; f'_g(z)\,.$$

D'où $f'_g(x) \leq f'_g(z)$. On a montré que f'_g est croissante.
De même, en prenant les limites $x \to w^+$ et $z \to y^+$ dans des inégalités déduites de (9.68) et (9.69), on obtient

$$f'_d(w) \;\leq\; \frac{f(y)-f(w)}{y-w} \;\leq\; f'_d(y)\,.$$

Donc $f'_d(w) \leq f'_d(y)$. On a montré que f'_d est croissante. On a terminé la preuve de 3.
Il reste à montrer 1, c'est-à-dire que f est continue. Soit $a \in I$. Pour $x \in I \setminus \{a\}$, on a

$$f(x) \;=\; f(a) \,+\, (x-a)\cdot\varphi_a(x)\,. \tag{9.70}$$

Comme f est dérivable à droite en a, $\lim\limits_{x\to a^+} \varphi_a(x) = f'_d(a) \in \mathbb{R}$ donc le membre de droite de (9.70) tend vers $f(a)+0\cdot f'_d(a) = f(a)$, quand $x \to a^+$, par la proposition 4.32 (appliquée à la restriction à droite de a des fonctions considérées). De même, comme f est dérivable à gauche en a, $\lim\limits_{x\to a^-} \varphi_a(x) = f'_g(a) \in \mathbb{R}$ donc le membre de droite de (9.70) tend vers $f(a) + 0\cdot f'_g(a) = f(a)$, quand $x \to a^-$, par la proposition 4.32 (appliquée à la restriction à gauche de a des fonctions considérées). Par la propostion 4.21, $\lim_a f$ existe et, par la proposition 4.13 et la définition 4.14, f est continue en a. Par la définition 4.14, f est continue sur I. □

Notons que ce résultat n'est plus valable si l'intervalle I n'est pas ouvert. Donnons un contre-exemple. Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x > 0$. Comme la restriction de f à $]0;+\infty[$ est nulle, la limite de f en 0 à droite existe et vaut 0. Comme cette limite est différente de $f(0) = 1$, f n'est pas continue en 0, par la propostion 4.21. Montrons maintenant que f est convexe.
Soit $0 \leq a < b$. Pour $t \in]0;1[$, on a $ta + (1-t)b > 0$ donc $f(ta+(1-t)b) = 0$. On a aussi $f(a) \geq 0$ et $f(b) = 0$ donc $f(ta+(1-t)b) = 0 \leq tf(a) = tf(a) + (1-t)f(b)$. On a montré que f est convexe par la définition 9.48.

Lorsqu'on considère des fonctions dérivables sur un intervalle, il se trouve que l'on peut caractériser la convexité. C'est l'objet de la

Proposition 9.51. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a les équivalences suivantes.*

1. *La fonction f est (strictement) convexe si et seulement si la dérivée f' est (strictement) croissante.*
2. *La fonction f est (strictement) concave si et seulement si la dérivée f' est (strictement) décroissante.*

Preuve : Montrons d'abord 1 dans le cas convexe.
$\Longrightarrow$) : On suppose f convexe. Soit $a < b$ dans I. On montre que $f'(a) \leq f'(b)$. Pour $c \in]a;b[$, on a, par (9.64) pour $(x;y;z) = (a;c;b)$,

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \;\leq\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;\leq\; \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\,.$$

Comme f est dérivable, on a, grâce aux propositions 4.21 et 4.36, en passant à la limite $c \to a$ dans l'inégalité de gauche et à la limite $c \to b$ dans l'inégalité de droite, on obtient

$$f'(a) \ \leq \ \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \ \leq \ f'(b)\,.$$

On a montré la croissance de f'.
$\Longleftarrow$) : On suppose f' croissante. Soit $a < b$ dans I. Soit $t \in]0;1[$ et $c = ta + (1-t)b$. Par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), il existe $d_- \in]a;c[$ et $d_+ \in]c;b[$ tels que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \ = \ f'(d_-) \quad \text{et} \quad \frac{f(b)-f(c)}{b-c} \ = \ f'(d_+)\,.$$

Comme f' est croissante et $d_- < d_+$, on en déduit que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \ \leq \ \frac{f(b)-f(c)}{b-c}\,.$$

Comme $c-a = (1-t)(b-a) > 0$ et $b-c = t(b-a) > 0$, on obtient par multiplication,

$$t \cdot \big(f(c) \ - \ f(a)\big) \ \leq \ (1-t) \cdot \big(f(b) \ - \ f(c)\big)$$

soit $f(c) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$. On a montré (9.63), c'est-à-dire que f est convexe. Cela termine la preuve de 1 dans le cas convexe. En reprenant cette preuve et en remplaçant de manière appropriée des inégalités larges par des inégalités strictes, on obtient la preuve de 1 dans le cas strictement convexe.
Comme $(-f)' = -f'$ (cf. proposition 6.8), on a d'après 1 dans le cas convexe : f est concave si et seulement si $-f$ est convexe si et seulement si $(-f)'$ est croissante si et seulement si f' est décroissante. Ceci donne 2 dans le cas concave. Par le même argument, en partant de 1 dans le cas strictement convexe, on obtient 2 dans le cas strictement concave. □

Remarque 9.52. *Lorsque $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, il suffit de vérifier que f'' est positive pour montrer que f est convexe. Cela résulte de la proposition 9.51 et du corollaire 6.15 (appliqué à f').*

Une autre propriété remarquable des fonctions convexes dérivables sur un intervalle est le fait qu'un point d'annulation de la dérivée est automatiquement un minimum global. C'est une réciproque de la proposition 6.11 pour ce type de fonctions.

Proposition 9.53. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$.*

1. *Si f est convexe alors x_0 un minimum global de f.*
2. *Si f est concave alors x_0 un maximum global de f.*

Les notions de maximum global et minimum global sont introduite dans la définition 6.10.

Preuve : On suppose f convexe. D'après la proposition 9.51, f' est croissante.
Premier cas : I est un voisinage de x_0. Alors f' est négative sur l'ensemble non vide $I \cap]-\infty; x_0[$ et f' est positive sur l'ensemble non vide $I \cap]x_0; +\infty[$. Par le corollaire 6.15, f est décroissante sur $I \cap]-\infty; x_0]$ et f est croissante sur $I \cap [x_0; +\infty[$. Donc $f(x_0)$ minore $f(I)$.
Deuxième cas : $x_0 = \sup I$. L'ensemble $I \cap]x_0; +\infty[$ est vide. Comme f' croît, f' est négative sur l'ensemble non vide $I \cap]-\infty; x_0[$. Par le corollaire 6.15, f est décroissante sur $I \cap]-\infty; x_0] = I$. Donc $f(x_0)$ minore $f(I)$.
Troisième cas : $x_0 = \inf I$. L'ensemble $I \cap]-\infty; x_0[$ est vide. Comme f' croît, f' est positive sur l'ensemble non vide $I \cap]x_0; +\infty[$. Par le corollaire 6.15, f est croissante sur $I \cap [x_0; +\infty[= I$. Donc $f(x_0)$ minore $f(I)$.
On a montré 1.
On suppose f concave donc, par la définition 9.48, $-f$ est convexe. Comme $(-f)'(x_0) = -f'(x_0) = 0$, $-f(x_0)$ minore $\{-f(x); x \in I\}$, par le 1. Donc $f(x_0)$ majore $\{f(x); x \in I\} = f(I)$. On a montré 2. □

Donnons une conséquence de ce résultat.

Proposition 9.54. *Soit I un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*

1. *Si f est convexe alors, pour tout $x_0 \in I$, f est au-dessus de sa tangente en x_0, i.e.*

$$\forall x \in I\,, \quad f(x) \;\geq\; f(x_0) \,+\, f'(x_0)\cdot(x - x_0)\,. \tag{9.71}$$

2. *Si f est concave alors , pour tout $x_0 \in I$, f est au-dessous de sa tangente en x_0, i.e.*

$$\forall x \in I\,, \quad f(x) \;\leq\; f(x_0) \,+\, f'(x_0)\cdot(x - x_0)\,. \tag{9.72}$$

Preuve : Soit $x_0 \in I$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$, pour $x \in I$. On a $g(x_0) = 0$. Par les propositions 6.5 et 6.8, g est dérivable et, pour $x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. En particulier, $g'(x_0) = 0$.
Si f est convexe alors f' est croissante, par la proposition 9.51. Donc g' est aussi croissante. Par cette même proposition 9.51, g est convexe. Comme $g'(x_0) = 0$, g est minimale en x_0, par la proposition 9.53. Donc, pour $x \in I$, $0 = g(x_0) \leq g(x)$, ce qui donne (9.71).
Si f est concave alors f' est décroissante, par la proposition 9.51. Donc g' est aussi décroissante. Par cette même proposition 9.51, g est concave. Comme $g'(x_0) = 0$, g est maximale en x_0, par la proposition 9.53. Donc, pour $x \in I$, $0 = g(x_0) \geq g(x)$, ce qui donne (9.72). □

Remarque 9.55. *Dans le cadre de la proposition 9.54, si l'on suppose la fonction f strictement convexe, on peut adapter la preuve précédente pour montrer que, pour $x_0 \in I$, sauf au point $(x_0; f(x_0))$, f est strictement au-dessus de sa tangente en x_0. Lorsque f est supposée strictement concave, on obtient de même que, pour $x_0 \in I$, sauf au point $(x_0; f(x_0))$, f est strictement au-dessous de sa tangente en x_0.*

Pour terminer cette partie, donnons une application de la convexité.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, on a introduit, dans la définition 8.17, la fonction bijective $P_\alpha : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ donnée par, pour $x > 0$, $P_\alpha(x) = \exp(\alpha \ln(x))$, qui se prolonge par continuité en 0 (cf. proposition 8.18). On note par $\overline{P_\alpha}$ ce prolongement.

Proposition 9.56. *Soit $(p; q) \in [1; +\infty[^2$ tel que $(1/p) + (1/q) = 1$. On a*

$$\forall (x; y) \in (\mathbb{R}^+)^2\,, \quad \frac{x}{p} \,+\, \frac{y}{q} \;\geq\; \overline{P_{1/p}}(x)\cdot\overline{P_{1/q}}(y)\,, \tag{9.73}$$

$$\forall (u; v) \in (\mathbb{R}^+)^2\,, \quad \frac{\overline{P_p}(u)}{p} \,+\, \frac{\overline{P_q}(v)}{q} \;\geq\; u\cdot v\,. \tag{9.74}$$

Remarque 9.57. *Dans le cadre de cette proposition 9.56, lorsque $p = q = 2$, (9.74) redonne l'inégalité bien connue suivante : $u^2 + v^2 \geq 2uv$, puisque c'est aussi une conséquence de l'inégalité $(u - v)^2 \geq 0$.*

Preuve de la proposition 9.56 : On montre d'abord que le logarithme népérien ln est concave. Par la proposition 8.11, ln est dérivable et sa dérivée est décroissante. Par la proposition 9.51, ln est concave.
Par la définition 9.48, on a, pour $0 < a < b$, pour $t \in]0; 1[$,

$$\ln\big(ta \,+\, (1-t)b\big) \;\geq\; t\ln(a) \,+\, (1-t)\ln b\,. \tag{9.75}$$

On remarque que l'inégalité dans (9.73) est vraie si $x = 0$ ou $y = 0$ car le membre de droite est nul et $x/p \geq 0$ et $y/q \geq 0$.
Soit $y > x > 0$. D'après (9.75) avec $t = 1/p$ (donc $1 - t = 1/q$), $a = x$ et $b = y$, on obtient

$$\ln\big(tx \,+\, (1-t)y\big) \;\geq\; t\ln(x) \,+\, (1-t)\ln y$$

et, en utilisant la croissance de l'exponentielle et $\exp \circ \ln = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{+*}}$ (cf. proposition 8.8 et définition 8.10), on obtient l'inégalité dans (9.73) lorsque $y > x > 0$. Lorsque $x > y > 0$, on obtient de même, en utilisant (9.75) avec $t = 1/q$ (donc $1 - t = 1/p$), $a = y$ et $b = x$, l'inégalité dans (9.73) lorsque $x > y > 0$. Comme la fonction $\overline{P_{1/q}}$ est continue, on peut passer à la limite $y \to x^-$ dans cette inégalité (cf. proposition 4.36)

et obtenir l'inégalité dans (9.73) lorsque $x = y > 0$. On a donc montré (9.73).
On remarque que l'inégalité dans (9.74) est vraie si $u = 0$ ou $v = 0$ car le membre de droite est nul et $\overline{P_p}(u)/p \geq 0$ et $\overline{P_q}(v)/q \geq 0$.
Soit $(u; v) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Comme $P_{1/p} \circ P_p = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{+*}} = P_{1/q} \circ P_q$ (cf. proposition 8.18), on déduit de (9.73) pour $x = P_p(u)$ et $y = P_q(v)$, l'inégalité dans (9.74) pour u et v non nuls. On a montré (9.74). □

9.7 Construction de l'exponentielle complexe.

On donne ici une construction de la fonction exponentielle basée sur la notion de suite de Cauchy (cf. définition 3.62 dans le paragraphe 3.8). On montre ensuite certaines propriétés de la fonction obtenue. On termine par la donnée d'une formule pour l'argument principal d'un nombre complexe non nul.

Pour $z \in \mathbb{C}$, on considère la suite $s = (s_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$s_N \ := \ \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \, . \tag{9.76}$$

Par la proposition 9.10, $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc s est bien définie. On va montrer que s est convergente dans $\mathbb{C}$. Pour ce faire, il suffit de montrer que s est une suite de Cauchy (cf. théorème 3.65). On rappelle que, pour $z \in \mathbb{C}$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie dans la définition 3.13.

Lemme 9.58. *Pour $z \in \mathbb{C}$, on considère la suite complexe $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_n \ := \ \frac{z^n}{n!} \, .$$

En notant par E la fonction partie entière (cf. proposition 9.8), la suite réelle $|u|$ est décroissante à partir du rang $E(|z|)$ et converge vers 0.

Preuve : Soit $p = E(|z|) \in \mathbb{Z}$. D'après la proposition 9.8, on a $p > |z| - 1$ et, comme $|z| \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$. Pour $n \in [\![p; +\infty[\![$, on a

$$|u_{n+1}| \ = \ \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \ = \ \frac{|z|^n}{n!} \cdot \frac{|z|}{(n+1)} \ = \ |u_n| \cdot \frac{|z|}{(n+1)} \ \leq \ |u_n|$$

car $n + 1 \geq p + 1 \geq |z|$. On a montré que $|u|$ est décroissante à partir du rang p.
Comme la suite $|u|$ est positive, elle est minorée par 0. Par les propositions 3.51 et 3.35, elle converge vers un réel ℓ. Comme $(|u_{n+1}|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $|u|$, elle converge aussi vers ℓ (cf. proposition 3.55). Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}| \ = \ \ |u_n| \cdot \frac{|z|}{(n+1)}$$

et comme $\lim_n 1/(n+1) = 0$, on a, par les opérations sur les limites (cf. proposition 3.46), $\ell = \ell \cdot 0 = 0$. □

On va utiliser la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$. On a vu au paragraphe 3.3.3 que la suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une extractrice donc elle diverge vers $+\infty$, par la proposition 3.54. Par inversion (cf. proposition 3.49), on en déduit que la suite $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 9.59. *Soit $z \in \mathbb{C}$. La suite s définie par* (9.76) *est de Cauchy.*
Par le théorème 3.65, elle converge donc dans $\mathbb{C}$.

Preuve : Soit $z \in \mathbb{C}$. On introduit la suite u du lemme 9.58. Comme la suite $|u|$ est convergente, d'après le lemme 9.58, elle est bornée, d'après la proposition 3.48. Soit $C_z > 0$ un majorant de $|u|$. Si l'on remplace

z par $2z$ dans la définition de u, la nouvelle suite $|u|$ est majorée par $C_{2z} > 0$.
Pour $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a, par la proposition 3.9,

$$s_{N+p} - s_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{z^n}{n!}$$

donc

$$\left|s_{N+p} - s_N\right| \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{|z|^n}{n!} = \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{(2|z|)^n}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{2^n} \cdot C_{2z} = C_{2z} \cdot \sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{2^n}\,.$$

Par la proposition 3.9, on a

$$\sum_{n=N+1}^{N+p} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{N+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^N}\,,$$

en utilisant (3.20) avec $a = (1/2) \neq 1$. Donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|s_{N+p} - s_N\right| \leq \frac{C_{2z}}{2^N}\,. \tag{9.77}$$

On remarque que (9.77) est encore vraie pour $p = 0$ et $N \in \mathbb{N}$.
On montre maintenant que s est de Cauchy en utilisant la proposition 3.63. Soit $\epsilon > 0$. Comme la suite $(2^{-N})_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $N \geq N_0$,

$$0 \leq \frac{1}{2^N} < \frac{\epsilon}{C_{2z}}\,.$$

Pour $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq N_0$ et $p \in \mathbb{N}$, on a donc, par (9.77), $|s_{N+p} - s_N| < \epsilon$. On a montré que s est une suite de Cauchy. □

On est maintenant en mesure de définir l'exponentielle complexe.

Définition 9.60. *L'application* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par, pour* $z \in \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}$$

est appelée fonction exponentielle complexe. Pour $z \in \mathbb{C}$, *on note aussi* $e^z := \exp(z)$.

Avec une telle définition, il est difficile de déterminer explicitement l'exponentielle d'un nombre complexe, même de 1 ou de 2. Il y a, cependant, un cas particulier simple, celui de 0. En effet, si $z = 0$, la suite s est constante égale à 1. Elle converge donc vers 1. Donc $\exp(0) = 1$.
On va maintenant donner des propriétés de l'exponentielle. On a besoin d'une précision. Pour $a \in \mathbb{C}$, on a défini la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence (cf. définition 3.13). Pour $a \neq 0$, on sait, par la proposition 3.14, que cette suite ne s'annule pas. On peut donc poser, pour $n \in \mathbb{N}$, $a^{-n} := 1/a^n$.

Proposition 9.61. *Soit* $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. *On a les propriétés suivantes :*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \overline{\exp(z)} = \exp\big(\overline{z}\big)\,, \tag{9.78}$$

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)\,, \tag{9.79}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) \neq 0 \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\exp(z)} = \exp(-z)\,, \tag{9.80}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \exp(p \cdot z) = \big(\exp(z)\big)^p\,, \tag{9.81}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(x) \in \mathbb{R}^{+*}\,, \tag{9.82}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(ix) \in \mathcal{U}\,. \tag{9.83}$$

Preuve : Soit $z \in \mathbb{C}$. En utilisant (3.13) puis (9.11), on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\overline{\exp(z)} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!}\right| = \left|\overline{\exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}}\right| = \left|\exp(z) - \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}\right| .$$

Par définition de $\exp(z)$, le membre de droite tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (cf. proposition 3.45) donc le membre de gauche tend aussi vers 0 ce qui donne (toujours par la proposition 3.45),

$$\overline{\exp(z)} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \exp\bigl(\overline{z}\bigr) .$$

On a montré (9.78).
On remarque que, si $x \in \mathbb{R}^+$, la suite s avec z remplacé par x est une suite réelle croissante de premier terme 1 donc, par la proposition 3.51,

$$\mathbb{R} \ni \exp(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = \sup\left\{\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \ ; \ N \in \mathbb{N}\right\} \geq 1 . \tag{9.84}$$

Soit $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$. On considère la suite $d = (d_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$d_N = \sum_{n=0}^{2N} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} - \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z_1^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z_2^n}{n!}\right) .$$

La suite

$$\left(\sum_{n=0}^{2N} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}} \quad \text{est une sous-suite de la suite} \quad \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

et cette dernière converge vers $\exp(z_1+z_2)$. Par la proposition 3.55, la première suite converge aussi vers $\exp(z_1+z_2)$. Par les opérations sur les limites (cf. proposition 3.46), d converge vers

$$\exp(z_1+z_2) - \exp(z_1)\cdot\exp(z_2) .$$

Pour montrer (9.79), il suffit de montrer que d converge aussi vers 0.
On pose, pour $(p; q) \in [\![0; 2N]\!]^2$,

$$A_{p;q} := \frac{z_1^p \cdot z_2^q}{(p!)\cdot(q!)} .$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a, d'après la proposition 3.9,

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z_1^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \frac{z_1^p \cdot z_2^q}{(p!)\cdot(q!)} = \sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} A_{p;q} .$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a, par la formule du binôme (cf. (9.35)) et la proposition 3.9,

$$\sum_{n=0}^{2N} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{2N} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} C_k^n \cdot z_1^k \cdot z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k \cdot z_2^{n-k}}{(k!)\cdot\bigl((n-k)!\bigr)} = \sum_{n=0}^{2N}\sum_{k=0}^{n} A_{k;n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} A_{k;n-k} + \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\sum_{k=0}^{n-N-1} A_{k;n-k} + \sum_{k=n-N}^{N} A_{k;n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} A_{k;n-k}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} A_{k;n-k} + \sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{k=n-N}^{N} A_{k;n-k} + \sum_{n=N+1}^{2N} \left(\sum_{k=0}^{n-N-1} A_{k;n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} A_{k;n-k}\right) .$$

Pour $(p;q) \in [\![0;N]\!]^2$, le terme $A_{p;q}$ est égal à $A_{k;n-k}$, pour $k=p$ et $q=n-k$, donc pour $0 \leq k \leq n \leq N$ si $p+q \leq N$ et pour $N+1 \leq n \leq 2N$ et $n-N \leq k \leq N$ si $p+q > N$.
Réciproquement, le terme $A_{k;n-k}$, pour $0 \leq k \leq n \leq N$, est égal au terme $A_{p;q}$ pour $p=k \in [\![0;N]\!]$ et $q=n-k \in [\![0;N]\!]$ et le terme $A_{k;n-k}$, pour $N+1 \leq n \leq 2N$ et $n-N \leq k \leq N$, est égal au terme $A_{p;q}$ pour $p=k \in [\![0;N]\!]$ et $q=n-k \in [\![0;N]\!]$.
On a donc

$$\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} A_{p;q} \;=\; \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} A_{k;n-k} \;+\; \sum_{n=N+1}^{2N}\sum_{k=n-N}^{N} A_{k;n-k}$$

et

$$d_N \;=\; \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n-N-1} A_{k;n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} A_{k;n-k}\right).$$

Par (3.14), la proposition 9.13 et le lemme 9.58, on a, pour $N \geq \max(E(|z_1|);E(|z_2|))$,

$$\begin{aligned}
|d_N| \;&\leq\; \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n-N-1} \left|A_{k;n-k}\right| + \sum_{k=N+1}^{n} \left|A_{k;n-k}\right|\right)\\
&\leq\; \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{|z_1|^k\cdot|z_2|^{n-k}}{(k!)\cdot\big((n-k)!\big)} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{|z_1|^k\cdot|z_2|^{n-k}}{(k!)\cdot\big((n-k)!\big)}\right)\\
&\leq\; \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{|z_1|^k\cdot|z_2|^{N+1}}{(k!)\cdot\big((N+1)!\big)} + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{|z_1|^{N+1}\cdot|z_2|^{n-k}}{((N+1)!)\cdot\big((n-k)!\big)}\right)\\
&\leq\; \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\frac{|z_2|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{|z_1|^k}{k!} + \frac{|z_1|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\sum_{k=N+1}^{n} \frac{|z_2|^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\
&\leq\; \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\frac{|z_2|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\sum_{k=0}^{n-N-1} \frac{|z_1|^k}{k!} + \frac{|z_1|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\sum_{\ell=0}^{n-N-1} \frac{|z_2|^{\ell}}{\ell!}\right).
\end{aligned}$$

D'après (9.84) avec $x=|z_1|$, (9.84) avec $x=|z_2|$ et (3.15), on a, pour $N \geq \max(E(|z_1|);E(|z_2|))$,

$$\begin{aligned}
|d_N| \;&\leq\; \sum_{n=N+1}^{2N}\left(\frac{|z_2|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\exp(|z_1|) \;+\; \frac{|z_1|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\exp(|z_2|)\right)\\
&\leq N\cdot\frac{|z_2|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\exp(|z_1|) \;+\; N\cdot\frac{|z_1|^{N+1}}{(N+1)!}\cdot\exp(|z_2|)\\
&\leq \frac{|z_2|^{N}}{N!}\cdot|z_2|\cdot\exp(|z_1|) \;+\; \frac{|z_1|^{N}}{N!}\cdot|z_1|\cdot\exp(|z_2|).
\end{aligned}$$

Par le lemme 9.58, les suites $(|z_2|^N/(N!))_{N\in\mathbb{N}}$ et $(|z_1|^N/(N!))_{N\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0 quand N tend vers $+\infty$.
Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.45), on déduit des inégalités précédentes que la suite d tend vers 0.
On a montré (9.79).
Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après (9.79) avec $z_1=z$ et $z_2=-z$, on a $1=\exp(0)=\exp(z+(-z))=\exp(z)\cdot\exp(-z)$. Comme ce produit est non nul, chaque facteur est non nul donc $\exp(z)\neq 0$. De plus, $\exp(-z)$ est l'inverse de $\exp(z)$.

On a montré (9.80).
Soit $z \in \mathbb{C}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (\exp(nz) = (\exp(z))^n)$.
Comme $\exp(0 \cdot z) = \exp(0) = 1 = (\exp(z))^0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a, par (9.79) et l'hypothèse de récurrence,

$$\exp\big((n+1)\cdot z\big) \;=\; \exp\big(nz + z\big) \;=\; \exp(nz)\cdot\exp(z) \;=\; \big(\exp(z)\big)^n \cdot \exp(z) \;=\; \big(\exp(z)\big)^{n+1}\,.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence (cf. théorème 1.4 avec $n_0 = 0$), $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela montre (9.81) lorsque $p \in \mathbb{N}$.
Pour $p \in \mathbb{Z}^-$, $n := |p| \in \mathbb{N}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a donc $\exp(nz) = (\exp(z))^n$. Par définition,

$$\big(\exp(z)\big)^p \;=\; \frac{1}{\big(\exp(z)\big)^n} \;=\; \frac{1}{\exp(nz)} \;=\; \exp(-nz) \;=\; \exp(pz)\,,$$

d'après $\mathcal{P}(n)$ puis (9.80).
On a montré (9.81).
Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on a, par (9.84), $\exp(x) \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $x \in \mathbb{R}^-$, $-x \in \mathbb{R}^+$ donc $\exp(-x) \in \mathbb{R}^{+*}$. Comme $\exp(x) = 1/\exp(-x)$, on a aussi $\exp(x) \in \mathbb{R}^{+*}$.
On a montré (9.82).
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après (9.78) et (9.79),

$$\big|\exp(ix)\big|^2 \;=\; \overline{\exp(ix)}\cdot\exp(ix) \;=\; \exp\big(\overline{ix}\big)\cdot\exp(ix) \;=\; \exp(-ix)\cdot\exp(ix) \;=\; \exp(0) \;=\; 1\,.$$

Donc le module de $\exp(ix)$ est $\sqrt{1} = 1$ (cf. définition 9.11), c'est-à-dire $\exp(ix) \in \mathcal{U}$.
On a montré (9.83). □

On montre maintenant une propriété de dérivabilité.

Proposition 9.62. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \exp(\alpha t)$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = \alpha\exp(\alpha t)$.*

Preuve : On montre d'abord que f est dérivable en 0.
Pour $N \in \mathbb{N}$ avec $N \geq 2$ et $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| \leq 1$, on a, par la proposition 3.9,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha h)^n}{n!} - 1 - \alpha h\right| \;&=\; \left|\sum_{n=2}^{N}\frac{(\alpha h)^n}{n!}\right| \;\leq\; \sum_{n=2}^{N}\frac{|\alpha|^n\cdot|h|^n}{n!} \;\leq\; \sum_{n=2}^{N}\frac{|\alpha|^n\cdot|h|^2}{n!}\\ &\leq h^2\cdot\sum_{n=2}^{N}\frac{|\alpha|^n}{n!} \;\leq\; h^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^n}{n!} \;=\; h^2\cdot\exp(|\alpha|)\,, \qquad (9.85)\end{aligned}$$

d'après (9.84). Comme la suite

$$\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha h)^n}{n!} - 1 - \alpha h\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

tend vers $\exp(\alpha h) - 1 - \alpha h$, quand N tend vers $+\infty$, la suite

$$\left(\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha h)^n}{n!} - 1 - \alpha h\right|\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

tend vers $|\exp(\alpha h) - 1 - \alpha h|$, par la proposition 3.45. Par passage à la limite $N \to +\infty$ dans les inégalités (9.85) (cf. proposition 3.48), on obtient

$$\big|\exp(\alpha h) - 1 - \alpha h\big| \;\leq\; h^2\cdot\exp(|\alpha|)\,.$$

Soit $\eta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\eta(0) = 0$ et, pour $h \neq 0$, $\eta(h) = (\exp(\alpha h) - 1 - \alpha h)h^{-1}$. On a donc, pour $0 < |h| \leq 1$, $|\eta(h)| \leq h\exp(|\alpha|)$. Comme $\lim\limits_{h\to 0} h\exp(|\alpha|) = 0$, on en déduit, par le théorème des gendarmes

(cf. proposition 3.45), que $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$.
De plus, comme $1 = \exp(0) = f(0)$, on a, pour $h \in \mathbb{R}$, $f(h) = f(0) + \alpha h + h\eta(h)$. Par la proposition 6.1, on a montré que f est dérivable en 0 de nombre dérivé α.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On montre que f est dérivable en t. Pour $h \in \mathbb{R}^*$, on a, d'après (9.79),

$$\begin{aligned} f(t+h) &= \exp\big(\alpha(t+h)\big) = \exp(\alpha t)\cdot\exp(\alpha h) = f(t)\cdot\exp(\alpha h) \\ &= f(t) + \alpha\cdot f(t)\cdot h + h f(t)\cdot\eta(h)\,. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$, on a $\lim_{h\to 0} f(t)\eta(h) = 0$ par la proposition 4.32, donc f est dérivable en t de nombre dérivé $\alpha f(t)$, d'après la proposition 6.1. □

Pour compléter les propriétés précédentes de l'exponentielle complexe, on fait une étude plus précise de la fonction f de la proposition 9.62 pour $\alpha = i$.

Proposition 9.63. *Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ donnée par $\varphi(t) = \exp(it)$. La fonction φ est surjective. L'ensemble $B := \{t > 0;\ \Im\varphi(t) = 0\}$ est non vide et $T := 2\inf B > 0$. L'image réciproque $\varphi^{-1}(\{1\})$ du singleton $\{1\}$ par φ est donnée par $\varphi^{-1}(\{1\}) = T\mathbb{Z} := \{T\cdot k;\ k \in \mathbb{Z}\}$. En particulier, on a*

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,,\quad \big(\varphi(x_1) = \varphi(x_2)\big) \iff \big(x_1 - x_2 \in T\mathbb{Z}\big)\,. \tag{9.86}$$

L'application φ est T-périodique i.e.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\quad \varphi(x + T) = \varphi(x)\,.$$

On a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(T/4) = i$, $\varphi(T/2) = -1$ et $\varphi(3T/4) = -i$. Enfin, φ est bijective de $]-T/2; T/2]$ sur $\mathcal{U}$.

Il se trouve que le T donné par cette proposition 9.63 est en fait égal à 2π, comme on le verra dans la proposition 9.66 ci-dessous.

Pour préparer la preuve de cette proposition 9.63, on procède d'abord par une étude des parties réelle et imaginaire de la fonction φ.

Lemme 9.64. *Les fonctions $\Re\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ et $\Im\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow [-1;1]$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Leurs dérivées sont données par $(\Re\varphi)' = -\Im\varphi$ et $(\Im\varphi)' = \Re\varphi$. De plus, $\Re\varphi$ est une fonction paire et $\Im\varphi$ est une fonction impaire. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(\Re\varphi(x))^2 + (\Im\varphi(x))^2 = 1$.*
L'ensemble $B = \{t > 0;\ \Im\varphi(t) = 0\}$ est non vide. On pose $b = \inf B$.
La fonction $\Im\varphi$ est strictement positive sur $]0; b[$. On a $\Im\varphi(0) = \Im\varphi(b) = \Im\varphi(2b) = 0$. Elle est strictement négative sur $]b; 2b[$. Elle est strictement croissante sur $[0; b/2]$ et sur $[3b/2; 2b]$, et strictement décroissante sur $[b/2; 3b/2]$.
La fonction $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $[0; b]$ et strictement croissante sur $[b; 2b]$. On a $\Re\varphi(0) = \Re\varphi(2b) = 1$ et $\Re\varphi(b) = -1$. Elle est strictement positive sur $[0; b/2[$ et sur $]3b/2; 2b]$. Elle est strictement négative sur $]b; 3b/2[$.
En particulier, on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(b/2) = i$, $\varphi(b) = -1$ et $\varphi(3b/2) = -i$.

Preuve : Tout d'abord, φ est à valeurs dans $\mathcal{U}$, d'après (9.83). Donc, par (2.7), $\Re\varphi$ et $\Im\varphi$ sont à valeurs dans $[-1;1]$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, $1 = |\varphi(x)|^2 = (\Re\varphi(x))^2 + (\Im\varphi(x))^2$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a, par (9.78),

$$\varphi(-x) = \exp(-ix) = \exp\big(\overline{ix}\big) = \overline{\exp(ix)} = \overline{\varphi(x)}$$

donc $\Re\varphi(-x) = \Re\varphi(x) =$ et $\Im\varphi(-x) = -\Im\varphi(x)$. Donc $\Re\varphi$ est paire et $\Im\varphi$ est impaire.
La fonction conjuguée de φ est la fonction $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ qui, à $t \in \mathbb{R}$, associe $\overline{\varphi(t)} = \exp(-it)$, d'après (9.78). Par la proposition 9.62, on sait que φ et $\overline{\varphi}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc aussi continues (cf. proposition 6.20). Par les propositions 6.18 et 6.20, il en est de même des parties réelle $\Re\varphi$ et imaginaire

$\Im\varphi$ de φ, puisque $\Re\varphi = (\varphi + \overline{\varphi})/2$ et $\Im\varphi = (\varphi - \overline{\varphi})/(2i)$.
De plus, toujours par la proposition 9.62, on a $\varphi' = i\varphi$, $\overline{\varphi}' = -i\overline{\varphi}$ donc, par la proposition 6.8,

$$\big(\Re\varphi\big)' \;=\; \frac{\varphi' + \overline{\varphi}'}{2} \;=\; i\cdot\frac{\varphi - \overline{\varphi}}{2} \;=\; -\,\Im\varphi \quad\text{et}\quad \big(\Im\varphi\big)' \;=\; \frac{\varphi' - \overline{\varphi}'}{2i} \;=\; i\cdot\frac{\varphi + \overline{\varphi}}{2i} \;=\; \Re\varphi\,.$$

Comme $\varphi(0) = \exp(0) = 1$, on a $\Re\varphi(0) = 1$ et $\Im\varphi(0) = 0$. Comme $\Re\varphi$ est continue, il existe un voisinage V_0 de 0 tel que $\Re\varphi > (1/2)$ sur V_0 (cf. proposition 4.36). Sur V_0, $\Im\varphi$ est strictement croissante (cf. corollaire 6.15). En particulier, $\Im\varphi > 0$ sur $V_0 \cap]0;+\infty[$.
Supposons que $\Im\varphi > 0$ sur $]0;+\infty[$. Par le corollaire 6.15, $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$. Par la proposition 4.38, $\ell = \lim\limits_{t\to+\infty} \Re\varphi$ existe dans $\mathbb{R}$.

a). Premier cas : $\ell \geq 0$. Alors $\Re\varphi > 0$ sur $]0;+\infty[$ (cf. proposition 7.4), donc $\Im\varphi$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (cf. corollaire 6.15) et donc strictement positive sur $]0;+\infty[$. Soit $t_0 > 0$. On a $\Im\varphi(t_0) > \Im\varphi(0) = 0$. Par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), on a, pour $t > t_0$, l'existence d'un $c \in]t_0;t[$ tel que $\Re\varphi(t) = \Re\varphi(t_0) - \Im\varphi(c)(t-t_0) \leq \Re\varphi(t_0) - \Im\varphi(t_0)(t-t_0)$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \Re\varphi(t_0) - \Im\varphi(t_0)(t-t_0) = -\infty$, on a, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.36), $\lim\limits_{t\to+\infty} \Re\varphi(t) = -\infty \neq \ell$. Contradiction avec l'unicité de la limite en $+\infty$ de $\Re\varphi$ (cf. proposition 4.11).

b). Second cas : $\ell < 0$. Par la proposition 4.38, $\ell = \inf(\Re\varphi_{|]0;+\infty[})$ et, comme $\Re\varphi$ est minoré par -1, $\ell \geq -1$. Comme $\ell/2 > \ell$, $\ell/2$ ne minore pas l'ensemble $\Re\varphi(]0;+\infty[)$. Il existe donc $t_1 > 0$ tel que $\Re\varphi(t_1) < (\ell/2) < 0$. Par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 6.14), on a, pour $t > t_1$, l'existence d'un $c \in]t_1;t[$ tel que $\Im\varphi(t) = \Im\varphi(t_1) + \Re\varphi(c)(t-t_1) \leq \Im\varphi(t_1) + \Re\varphi(t_1)(t-t_1)$, car $\Re\varphi$ est décroissante sur $[t_1;+\infty[$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \Im\varphi(t_1) + \Re\varphi(t_1)(t-t_1) = -\infty$, on a, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 4.36), $\lim\limits_{t\to+\infty} \Im\varphi(t) = -\infty$. Contradiction avec le fait que $\Im\varphi$ est minotée par -1 (cf. proposition 4.36).

Dans tous les cas, on a obtenu une contradiction. Il existe donc $t_1 > 0$ tel que $\Im\varphi(t_1) \leq 0$. Nécessairement, $t_1 \notin V_0$. Soit $t_0 \in V_0 \cap]0;+\infty[$. Comme $\Im\varphi(t_0) > 0$, $\Im\varphi(t_1) \leq 0$ et $\Im\varphi$ est continue, il existe, par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1), un t_2 compris entre t_0 et t_1 tel que $\Im\varphi(t_2) = 0$. Comme $t_2 > 0$, l'ensemble $B = \{t > 0;\ \Im\varphi(t) = 0\}$ est non vide et $b = \inf B$ est bien défini.
Comme $\Im\varphi > 0$ sur $V_0 \cap]0;+\infty[$, $B \cap V_0 \cap]0;+\infty[= \emptyset$. Comme V_0 est un voisinage de 0, il existe $\delta > 0$ tel que $]-\delta;\delta[\subset V_0$ donc $]0;\delta[\subset V_0 \cap]0;+\infty[$. En particulier, $B \cap]0;\delta[= \emptyset$. Donc, pour tout $t \in]0;\delta[$, t minore B. Donc $b \geq \delta > 0$.
Comme $b = \inf B$, il existe, par la proposition 3.50, une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B telle que $\lim u = b$. Comme $\Im\varphi$ est continue, on a, par la proposition 4.15, $\lim \Im\varphi(u) = \Im\varphi(b)$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$ donc $\Im\varphi(u_n) = 0$, on obtient $\Im\varphi(b) = 0$.
Si l'on avait, pour un $t \in]0;b[$, $\Im\varphi(t) \leq 0$ et on aurait, comme $\Im\varphi(\delta/2) > 0$ et $\Im\varphi$ est continue, un t_2 entre t et $\delta/2$ tel que $\Im\varphi(t_2) = 0$, par le le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 5.1). On aurait donc $t_2 \in B$ et $t_2 < b$. Contradiction avec la définition de b.
On a donc, pour tout $t \in]0;b[$, $\Im\varphi(t) > 0$. En particulier, $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $[0;b]$ (cf. corollaire 6.15). Comme $\Re\varphi(0) = 1$, $\Re\varphi(b) < 1$. Par ailleurs, comme $\varphi(b) \in \mathcal{U}$ et $\Im\varphi(b) = 0$, $\Re\varphi(b) \in \{-1;1\}$. On en déduit que $\Re\varphi(b) = -1$. D'où $\varphi(b) = -1$.
Pour $t \in]b;2b[$, $t - b \in]0;b[$ et, comme $\varphi(t) = \varphi((t-b)+b) = \varphi(t-b)\varphi(b) = -\varphi(t-b)$ (cf. (9.79)), on a donc $\Im\varphi(t) = -\Im\varphi(t-b) < 0$. Donc $\Im\varphi < 0$ sur $]b;2b[$ et, par le corollaire 6.15, $\Re\varphi$ est strictement croissante sur $[b;2b]$.
Comme $\varphi(b) = -1$ et comme $\varphi(2b) = (\varphi(b))^2$ par (9.79), on a $\varphi(2b) = 1$. En particulier, $\Re\varphi(2b) = 1$ et $\Im\varphi(2b) = 0$. Comme $\varphi(b/2)^2 = \varphi(b) = -1$, par (9.79), $\varphi(b/2)$ est solution de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ donnée par $z^2 = -1$. Donc $\varphi(b/2) \in \{-i;i\}$. Comme $\Im\varphi > 0$ sur $]0;b[$, on a nécessairement $\varphi(b/2) = i$ et, en particulier, $\Re\varphi(b/2) = 0$ et $\Im\varphi(b/2) = 1$. Comme $\varphi(3b/2) = \varphi(b/2)\varphi(b)$, par (9.79), on a $\varphi(3b/2) = -i$ et, en particulier, $\Re\varphi(3b/2) = 0$ et $\Im\varphi(3b/2) = -1$.
Comme $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $[0;b]$ et nulle en $b/2$, elle est strictement positive sur $[0;b/2[$ et strictement négative sur $]b/2;b]$. Comme $\Re\varphi$ est strictement croissante sur $[b;2b]$ et nulle en $3b/2$, elle est strictement négative sur $[b;3b/2[$ et strictement positive sur $]3b/2;2b]$.

Par le corollaire 6.15, on en déduit que $\Im\varphi$ est strictement croissante sur $[0;b/2]$ et $[3b/2;2b]$, et est strictement décroissante sur $[b/2;3b/2]$. □

Preuve de la proposition 9.63 : Par le lemme 9.64, φ est bien à valeurs dans $\mathcal{U}$, B est non vide et $T = 2b > 0$.
Encore par le lemme 9.64, comme $\varphi(b) = -1$ et comme, pour $t \in]0;2b[\setminus\{b\}$, $\Im\varphi(t) \neq 0$, on a, pour tout $t \in]0;2b[=]0;T[$, $\varphi(t) \neq 1$. Cependant $\varphi(T) = \varphi(2b) = \Re\varphi(2b) + i\Im\varphi(2b) = 1$.
Pour $x \in \mathbb{R}$, on a, par (9.79), $\varphi(x+T) = \varphi(x)\cdot\varphi(T) = \varphi(x)$. Donc φ est T-périodique.
Toujours d'après le lemme 9.64, on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(T/4) = \varphi(b/2) = i$, $\varphi(T/2) = \varphi(b) = -1$ et $\varphi(3T/4) = \varphi(3b/2) = -i$.
Pour $p \in \mathbb{Z}$, on a, d'après (9.81), $\varphi(pT) = (\varphi(T))^p = 1^p = 1$. Donc $T\mathbb{Z} \subset \varphi^{-1}(\{1\})$.
Soit $x \notin T\mathbb{Z}$. On a $x \neq 0$. Si $x > 0$, $\varphi(x) = \varphi(|x|)$, et, si $x < 0$, $\varphi(x) = \varphi(-|x|) = 1/\varphi(|x|)$, d'après (9.80).
Par la propriété d'Archimède (cf. (1.4)), l'ensemble $D := \{m \in \mathbb{N};\ m \geq (|x|/T)\}$ est non vide. Il admet donc un minimum (cf. proposition 9.4), qui est strictement positif car $0 \notin D$. Soit $n = \min(D) - 1 \in \mathbb{N}$ et $r := |x| - nT$. Comme $n \notin D$, $nT < |x|$. Comme $n+1 \in D$ et $|x| \notin T\mathbb{Z}$, $(n+1)T > |x|$. Donc $r \in]0;T[$.
De plus, $\varphi(|x|) = \varphi(nT + r) = \varphi(nT)\cdot\varphi(r) = (\varphi(T))^n \cdot \varphi(r) = \varphi(r)$, d'après (9.79) et (9.81). Comme $r \in]0;T[$, $\varphi(r) \neq 1$ donc $\varphi(|x|) \neq 1$ et $\varphi(x) \neq 1$. On a donc montré que $(\mathbb{R}\setminus T\mathbb{Z}) \subset (\mathbb{R}\setminus\varphi^{-1}(\{1\}))$ donc, par passage au complémentaire dans $\mathbb{R}$, $\varphi^{-1}(\{1\}) \subset T\mathbb{Z}$.
On a montré que $T\mathbb{Z} = \varphi^{-1}(\{1\})$.
Soit $(x_1;x_2) \in \mathbb{R}^2$. D'après (9.79) et (9.80), on a $\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1)/\varphi(x_2)$. Donc

$$\varphi(x_1) \,=\, \varphi(x_2) \quad\Longleftrightarrow\quad \varphi(x_1 - x_2) \,=\, 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 - x_2 \,\in \varphi^{-1}\big(\{1\}\big) \quad\Longleftrightarrow\quad x_1 - x_2 \,\in T\mathbb{Z}\,.$$

On a montré (9.86).
Cela montre aussi que la restriction de φ à $]-T/2;T/2] =]-b;b]$ est injective. En effet, si $(x_1,x_2) \in]-T/2;T/2]^2$ vérifie $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ alors, par (9.86), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1 - x_2 = kT$. En particulier, l'intervalle $]-1/2;1/2]$ contient l'entier $(x_1 - x_2)/T = k$. Comme cet intervalle ne contient qu'un seul entier, par la proposition 9.7, et comme il contient 0, on a forcément $k = 0$ c'est-à-dire $x_1 = x_2$.
Il reste à montrer que φ est surjective et que la restriction de φ à $]-T/2;T/2] =]-b;b]$ est surjective. On remarque que la seconde propriété implique la première.
Comme, par le lemme 9.64, $\Re\varphi$ est strictement décroissante sur $[0;b]$ et continue sur $[0;b]$, $\Re\varphi$ est bijective de $[0;b]$ sur $\Re\varphi([0;b])$, par la proposition 7.3. Par la proposition 7.4,

$$\Re\varphi\big([0;b]\big) \,=\, \big\{\Re\varphi(0);\Re\varphi(b)\big\} \,\cup\, \Big]\lim_{b}\Re\varphi\,;\,\lim_{0}\Re\varphi\Big[\,=\, [\Re\varphi(b)\,;\,\Re\varphi(0)] \,=\, [-1;1]\,.$$

Soit $z_0 \in \mathcal{U}$. Par (2.7), $\Re(z_0) \in [-1;1] = \Re\varphi([0;b])$. Il existe donc $t_0 \in [0;b]$ tel que $\Re\varphi(t_0) = \Re(z_0)$. Comme $z \in \mathcal{U}$ et $\varphi(t_0) \in \mathcal{U}$, on a $\Re(z_0)^2 + \Im(z_0)^2 = 1$ et $\Re\varphi(t_0)^2 + \Im\varphi(t_0)^2 = 1$.
Si $\Im(z_0) \geq 0$ alors, par (9.5),

$$\Im(z_0) \,=\, \sqrt{1 \,-\, \Re(z_0)^2} \,=\, \sqrt{1 \,-\, \Re\varphi(t_0)^2} \,=\, \Im\varphi(t_0)$$

car $\Im\varphi(t_0) \geq 0$. Dans ce cas, $z_0 = \varphi(t_0)$.
Si $\Im(\overline{z_0}) < 0$ alors $\Im(\overline{z_0}) > 0$ et, d'après ce qui précède, il existe $t_0 \in [0;b[$ tel que $\overline{z_0} = \varphi(t_0)$. Donc $z_0 = \overline{\varphi(t_0)} = \varphi(-t_0)$, d'après (9.78), avec $-t_0 \in]-b;0]$.
On a montré que $z_0 \in \varphi(]-b;b])$. Comme ceci est valable pour tout $z_0 \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \varphi(]-b;b])$. Comme $\varphi(]-b;b]) \subset \varphi(\mathbb{R})$ et comme φ est à valeurs dans $\mathcal{U}$, on a $\varphi(]-b;b]) \subset \varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U}$. On a donc $\varphi(]-b;b]) = \varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{U}$ et, par la proposition 9.2, la restriction de φ à $]-b;b] =]-T/2;T/2]$ est surjective. □

Pour identifier le T de la proposition 9.63 à 2π, on a besoin de définir la longueur du cercle $\mathcal{U}$. Pour ce faire, on introduit la notion de ligne brisée portée par $\mathcal{U}$.

Définition 9.65. *Soit T le réel strictement positif introduit dans la proposition 9.63.*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle subdivision de $]-T/2;T/2]$ de taille n toute application strictement croissante $\sigma : [\![1;n]\!] \longrightarrow]-T/2;T/2]$. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble de telles subdivisions de taille n et

$$\mathcal{S} \,=\, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_n$$

l'ensemble de toutes les subdivisions de $]-T/2;T/2]$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $\sigma \in \mathcal{S}_n$, *on appelle ligne brisée portée par* $\mathcal{U}$ *à* n *morceaux de subdivision* σ *la famille* $b = (\exp(i\sigma_j))_{j\in[\![1;n]\!]}$ *de points de* $\mathcal{U}$. *Pour une telle famille* b, *en posant* $\sigma_{n+1} := \sigma_1 + T$, *le morceau d'incide* j, *avec* $j \in [\![1;n]\!]$, *de* b *est le segment complexe reliant* $\exp(i\sigma_j)$ *à* $\exp(i\sigma_{j+1})$. *La longueur de ce segment est*

$$\left|e^{i\sigma_{j+1}} - e^{i\sigma_j}\right| \geq 0\,.$$

La longueur d'une ligne brisée portée par $\mathcal{U}$ *à* n *morceaux de subdivision* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *est, par définition, la somme des longueurs de ces morceaux c'est-à-dire*

$$L(\sigma) := \sum_{j=1}^{n} \left|e^{i\sigma_{j+1}} - e^{i\sigma_j}\right| \geq 0\,.$$

On définit la longueur L *de* $\mathcal{U}$ *par* $L := \sup\{L(\sigma);\, \sigma \in \mathcal{S}\} \in (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$.

Proposition 9.66. *Le réel* T, *introduit dans la proposition 9.63, est égal à la longueur* L *de* $\mathcal{U}$.

D'après la définition usuelle du nombre π, 2π est égal au périmètre du cercle de centre 0 et de rayon 1, c'est-à-dire à la longueur de $\mathcal{U}$. On a donc montré que $T = 2\pi$.
Pour préparer la preuve de la proposition 9.66, on établit le résultat suivant.

Lemme 9.67. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a* $|e^{it} - 1| \leq |t|$.

Preuve : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = (t^2/2) + \cos(t)$. Comme cos et la fonction polynômiale $t \mapsto t^2/2$ sont de classe C^1 (cf. lemme 9.64 et proposition 6.22), f est de classe C^1, par la proposition 6.20. De plus, pour $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = t - \sin(t)$. Comme sin et la fonction polynômiale $t \mapsto t$ sont de classe C^1 (cf. lemme 9.64 et proposition 6.22), f' est dérivable et, pour $t \in \mathbb{R}$, $f''(t) = 1 - \cos(t) \geq 0$, d'après le lemme 9.64 et la proposition 6.22. Par le corollaire 6.15, f' est donc croissante. Comme $f'(0) = 0$, f' est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$. De nouveau par le corollaire 6.15, f est donc décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$. f est donc minorée par $f(0) = 1$.
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a, par (9.78) et la définition de cosinus,

$$\left|e^{it} - 1\right|^2 = \left(e^{it} - 1\right) \cdot \left(e^{-it} - 1\right) = 2 - 2\cos(t)$$

donc

$$t^2 - \left|e^{it} - 1\right|^2 = t^2 + 2\cos(t) - 2 = 2f(t) - 2 \geq 0\,,$$

puisque f est minorée par 1. Comme $|t|$ et $|e^{it} - 1|$ sont positifs, on a, par la définition 9.11,

$$|t| = \sqrt{t^2} \geq \sqrt{\left|e^{it} - 1\right|^2} = \left|e^{it} - 1\right|\,,$$

ce qui donne le résultat cherché. □

Preuve de la proposition 9.66 : Soit $A := \{L(\sigma);\, \sigma \in \mathcal{S}\}$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Par (9.79) et (9.80), on a

$$L(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} \left|e^{i\sigma_j}\right| \cdot \left|e^{i(\sigma_{j+1}-\sigma_j)} - 1\right| = \sum_{j=1}^{n} \left|e^{i(\sigma_{j+1}-\sigma_j)} - 1\right|\,. \tag{9.87}$$

D'après (3.14) et le lemme 9.67, on déduit de (9.87) que

$$L(\sigma) \leq \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{j+1} - \sigma_j| = \sum_{j=1}^{n} (\sigma_{j+1} - \sigma_j)\,.$$

Or, d'après la proposition 3.9, on a

$$\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{j+1}-\sigma_j) \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_{j+1}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\right) \;=\; \left(\sum_{k=2}^{n+1}\sigma_k\right) - \left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\right)$$

$$= \sigma_{n+1} + \left(\sum_{k=2}^{n}\sigma_k\right) - \left(\sum_{j=2}^{n}\sigma_j\right) - \sigma_1 \;=\; \sigma_{n+1} - \sigma_1 \;=\; T\,.$$

D'où $L(\sigma)\leq T$. Ceci étant vrai pour tout $\sigma\in\mathcal{S}$, T majore A donc $\sup A\leq T$. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on considère la subdivision $\sigma^{(p)}:[\![1;p]\!]\longrightarrow]-T/2;T/2]$ de $]-T/2;T/2]$ de taille p définie par, pour $j\in[\![1;p]\!]$,

$$\sigma_j^{(p)} \;=\; -\frac{T}{2}+\frac{T}{p}\cdot j$$

On considère la suite $u=(L(\sigma^{(p)}))_{p\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A. Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on a, d'après (9.87),

$$u_p \;=\; \sum_{j=1}^{p}\left|e^{i\left(\sigma_{j+1}^{(p)}-\sigma_j^{(p)}\right)}-1\right| \;=\; \sum_{j=1}^{p}\left|e^{i\frac{T}{p}}-1\right| \;=\; p\cdot\left|e^{i\frac{T}{p}}-1\right|$$

d'après (3.15). Par la proposition 9.62, la fonction $\varphi:\mathbb{R}\ni t\mapsto\exp(it)$ est dérivable en 0 de nombre dérivé $i\varphi(0)=i$ donc

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{it}-1}{t} \;=\; i\,.$$

Comme $\lim\limits_{p\to+\infty} T/p=0$, on a, par la proposition 4.15,

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{e^{i\frac{T}{p}}-1}{T/p} \;=\; i$$

donc, par la proposition 3.46,

$$\lim_{p\to+\infty} p\cdot\left(e^{i\frac{T}{p}}-1\right) \;=\; iT\,.$$

D'où, en utilisant (3.35), on obtient

$$\lim_{p\to+\infty} u_p \;=\; \left|iT\right| \;=\; T\,.$$

Par la proposition 3.50, le majorant T de A est en fait la borne supérieure de A. Par la définition 9.65, on a donc $L=T$. □

Table des matières

1 Préliminaires et notations. 4

1.1 Ensembles et applications. . . . 4

1.2 Intervalles, bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$. . . . 7

2 Voisinages dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. 10

2.1 Voisinages d'un point dans $\mathbb{C}$. . . . 10

2.2 Voisinages d'un point dans $\mathbb{R}$. . . . 12

2.3 Voisinages, dans $\mathbb{R}$, de $+\infty$ et de $-\infty$. . . . 14

2.4 Propriétés des voisinages. . . . 15

3 Suites réelles et complexes. 17

3.1 Définitions et premiers exemples. . . . 17

3.2 Suites récurrentes. . . . 18

3.2.1 Suites récurrentes associées à une fonction. . . . 18

3.2.2 Sommes et séries. . . . 19

3.2.3 Produits, puissances, factorielles. . . . 25

3.3 Propriétés des suites. . . . 26

3.3.1 Propriétés générales. . . . 27

3.3.2 Propriétés propres aux suites réelles. . . . 28

3.3.3 Sous-suites. . . . 32

3.4 Limite d'une suite infinie. . . . 33

3.4.1 Définition générale de limite d'une suite infinie. . . . 34

3.4.2 Limite finie. . . . 36

3.4.3 Notions de limite infinie propres aux suites réelles. . . . 37

3.5 Propriétés générales de la limite d'une suite. . . . 38

3.6 Propriétés de limite propres aux suites réelles. . . . 42

3.7 Limite d'une suite et sous-suites. . . . 50

3.8 Suites de Cauchy. 53

4 Limites des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. 56

4.1 Propriétés des fonctions. 56

4.1.1 Propriétés générales des fonctions. 56

4.1.2 Propriétés propres aux fonctions réelles. 58

4.2 Limites et continuité de fonction. 59

4.2.1 Définition générale. 59

4.2.2 Limite en un point. 63

4.2.3 Prolongement par continuité. 68

4.2.4 Limite à l'infini. 69

4.3 Opérations sur les limites de fonctions. 72

4.3.1 Composition. 72

4.3.2 Propriétés générales des limites de fonction. 73

4.3.3 Propriétés propres aux limites de fonctions réelles. 76

4.4 Limite de suite et limite à l'infini de fonction. 84

5 Continuité sur un intervalle de fonctions réelles. 85

5.1 Théorème des valeurs intermédiaires. 85

5.2 Bornitude sur un segment. 87

5.3 Continuité uniforme. 88

6 Dérivabilité. 90

6.1 Nombres dérivés, dérivée. 90

6.2 Fonctions réelles dérivables et théorème des accroissements finis. 95

6.3 Classes de fonctions. 98

6.3.1 Classes C^0 et C^1. 99

6.3.2 Classes C^N, pour N entier naturel ou infini. 100

7 Fonctions réciproques. 107

7.1 Bijections. . . . 107

7.2 Fonctions continues strictement monotones. . . . 108

7.3 Fonctions dérivables strictement monotones. . . . 110

8 Fonctions usuelles et fonctions plates. 112

8.1 Fonction exponentielle complexe. . . . 112

8.2 Fonction exponentielle réelle et logarithmes. . . . 114

8.3 Fonctions puissances. . . . 116

8.4 Fonctions circulaires. . . . 120

8.5 Fonctions hyperboliques. . . . 126

8.6 Fonctions plates. . . . 131

9 Compléments. 135

9.1 Ensembles, applications, bijections. . . . 135

9.1.1 Injection, surjection, bijection. . . . 135

9.1.2 Propriétés de $\mathbb{Z}$ et fonction partie entière. . . . 139

9.1.3 Fonctions racine carrée et module. . . . 142

9.2 Variantes du théorème de récurrence. . . . 146

9.2.1 Variantes classiques. . . . 146

9.2.2 Une difficulté liée aux relations de récurrence. . . . 148

9.2.3 Construction par récurrence d'une suite. . . . 149

9.2.4 Construction par récurrence éventuellement finie d'une suite. . . . 155

9.3 Formule du binôme de Newton et identité remarquable. . . . 157

9.4 Développement chiffré relativement à une base. . . . 158

9.5 Suites réelles récurrentes définies par une fonction. . . . 173

9.5.1 Fonctions contractantes et théorème du point fixe. . . . 173

9.5.2 Étude de suites récurrentes réelles. . . . 175

9.5.3 Autour de l'existence de suites récurrentes réelles. . . . 177

9.6 Convexité. . . . 179

9.7 Construction de l'exponentielle complexe. 186