L3, Analyse complexe, 2025/2026.

Propriétés de l'exponentielle complexe.

On donne ici une liste d'importantes propriétés de l'exponentielle complexe. Elles seront supposées connues dès le début du cours d'analyse complexe et pourront être utilisées dans les TDs. Ces propriétés figurent et sont démontrées dans les paragraphes “Fonction exponentielle complexe” et “Construction de la fonction exponentielle complexe” de la version longue de mon cours de L1 sur :

https://jecko.perso.math.cnrs.fr/enseignement.html .

Dans le cours d'analyse complexe, on démontrera bon nombre de ces propriétés et ce de manière plus commode que dans le cours de L1 mentionné.

Pour $z \in \mathbb{C}$, la suite complexe

$$\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

converge dans $\mathbb{C}$. On note par $\exp(z)$ sa limite, i.e.

$$\exp(z) \ := \ \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \, .$$

L'application $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}$, associe $\exp(z)$ est appelée fonction exponentielle complexe. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note aussi $e^z := \exp(z)$.

Proposition 1. *Soit $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. On a les propriétés suivantes :*

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \overline{\exp(z)} \ = \ \exp\big(\overline{z}\big)\,, \tag{1}$$

$$\forall\, (z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2\,, \quad \exp(z_1 + z_2) \ = \ \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)\,, \tag{2}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \exp(z) \ \neq \ 0 \quad \textit{et} \quad \frac{1}{\exp(z)} \ = \ \exp(-z)\,, \tag{3}$$

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall\, p \in \mathbb{Z}\,, \quad \exp(p \cdot z) \ = \ \big(\exp(z)\big)^p\,, \tag{4}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(x) \ \in \mathbb{R}^{+*}\,, \tag{5}$$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \exp(ix) \ \in \mathcal{U}\,, \tag{6}$$

$$\exp(0) \ = \ 1\,. \tag{7}$$

Le résultat suivant est essentiel pour la notion d'argument d'un nombre complexe.

Proposition 2. *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$, donnée par $\varphi(t) = \exp(it)$, est surjective.*
L'image réciproque $\varphi^{-1}(\{1\})$ du singleton $\{1\}$ par φ est donnée par $\varphi^{-1}(\{1\}) = 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
En particulier, on a

$$\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,, \quad \big(\varphi(x_1) \ = \ \varphi(x_2)\big) \iff \big(x_1 - x_2 \in 2\pi\mathbb{Z}\big)\,. \tag{8}$$

L'application φ est 2π-périodique i.e.

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad \varphi(x\,+\,2\pi) \;=\; \varphi(x)\,.$$

Enfin, on a $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\pi/2) = i$, $\varphi(\pi) = -1$ et $\varphi(3\pi/2) = -i$.

Il implique en effet la

Proposition 3. *Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, l'ensemble $\mathcal{A}_z := \{t \in \mathbb{R};\ z = |z|\exp(it)\}$ est infini et s'écrit $\mathcal{A}_z = \{t_z + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$, pour un certain $t_z \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{A}_z \cap]\theta; \theta + 2\pi]$ a exactement un élément.*

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on dit qu'un réel t vérifiant $z = |z|\exp(it)$ est un argument de z. L'ensemble $\mathcal{A}_z$, défini dans la proposition 3, est donc l'ensemble infini des arguments de z. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, l'unique élément de $\mathcal{A}_z$ qui appartient à $]\theta; \theta + 2\pi]$ est noté $\mathrm{Arg}_\theta(z)$. On remarque que l'on peut écrire $\mathcal{A}_z = \{\mathrm{Arg}_\theta(z) + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Lorsque $\theta = -\pi$, $\mathrm{Arg}_{-\pi}(z)$ est appelé argument principal de z et est aussi noté par $\mathrm{Arg}\,(z)$. On a $\mathcal{A}_z = \{\mathrm{Arg}\,(z) + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}\}$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, on définit donc une application $\mathrm{Arg}_\theta : \mathbb{C}^* \longrightarrow]\theta; \theta + 2\pi]$ qui, à tout $z \in \mathbb{C}^*$, associe $\mathrm{Arg}_\theta(z)$.

Attention : On a décidé que le nombre complexe zéro n'a pas d'argument.

D'après la proposition 1, la restriction de l'exponentielle complexe à $\mathbb{R}$, appelée exponentielle réelle, est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. En voici des propriétés:

Proposition 4. *La fonction exponentielle réelle est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, i.e. $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même, i.e. $\exp' = \exp$. Elle est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Sa bijection réciproque $\exp^{\langle -1\rangle} : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^∞, strictement croissante et on a, pour $x > 0$,*

$$\big(\exp^{\langle -1\rangle}\big)'(x) \;=\; \frac{1}{x}\,. \tag{9}$$

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{x\to-\infty} x^m \cdot \exp(x) \;=\; 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} x^{-m} \cdot \exp(x) \;=\; +\infty\,. \tag{10}$$

On rappelle que, par définition, le logarithme népérien, noté $\ln(\cdot)$, est la bijection réciproque de la fonction exponentielle réelle.

Proposition 5. *L'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective i.e. tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $\exp(c)$ pour un $c \in \mathbb{C}$.*

Enfin, on a

Proposition 6. *Soit $a \in \mathbb{C}$. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = \exp(ta)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = a\exp(ta) = af(t)$.*