DEUG Sciences mentions MASS et MIAS
U.E. 5
MA4 - Méthodologie des mathématiques :
Les outils de l'analyse.

Thierry Jecko.

Septembre 2003.

Chapitre 0

Introduction.

L'objet de cette introduction vise à donner une présentation générale de cette nouvelle version du cours de MA4 “Les outils de l'analyse” (la version précédente avait été réalisée par Michel Coste) et à le situer par rapport aux autres cours de mathématiques du DEUG première année. En particulier, les prérequis nécessaires en provenance du MA1 et du MA2 sont indiqués ici. Ensuite, on introduit les grandes lignes de ce cours avant d'en donner un plan détaillé. On termine cette introduction sur la description de la structure et du programme de l'examen, sur des conseils pratiques pour comprendre et appliquer ce cours et sur des notations et conventions utilisées dans ce cours.

Par rapport à la version précédente, on a voulu ici faire un cours plus détaillé avec une rédaction plus précise. Beaucoup d'étudiants se plaignaient des zones d'ombre de la version précédente. Comme, d'autre part, on souhaite enseigner un minimum de rigueur et comme ce travail n'a pas été vraiment commencé au lycée, il est important que le cours donne le bon exemple même si, de ce fait, il est beaucoup plus volumineux. Il est à noter que le programme de la version précédente a été réduit mais les compléments insérés dans la présente version permettent de le restituer.

Même si des notions de continuité ou de dérivation des fonctions d'une variable réelle existaient auparavant, ce n'est que vers le milieu du XIXième siècle (il y a environ cent cinquante ans) que l'on a commencé à bien comprendre ces notions. Ce cours a pour but de les introduire rigoureusement et d'en dégager des applications. Il se situe dans le prolongement du MA2 dont il va utiliser la méthodologie, permet de fonder rigoureusement un bon nombre de résultats du MA1 et sert de base à des cours de DEUG deuxième année. La compréhension de ce cours est **fortement** conseillé à tout étudiant de licence de mathématiques. Puisque l'histoire montre que ces notions sont difficiles à saisir, il n'est pas étonnant que ce cours le soit. Cependant, avec une bonne connaissance du MA2, on doit pouvoir en comprendre une bonne partie (au prix peut-être d'un travail de fourmi).

Les étudiants attirés par les sciences expérimentales pourraient considérer que ces notions difficiles de mathématiques ne sont pas vitales pour eux. Certes, c'est probablement vrai mais, en les négligeant, ils renoncent à un entraînement de qualité de gymnastique intellectuelle, de rigueur scientifique et d'appréhension de la complexité, entraînement qui ne peut être que bénéfique à tout scientifique.

Comme les mathématiques sont une espèce de jeu de construction, on ne peut pas se permettre de négliger les bases si l'on veut monter dans les étages. C'est pourquoi l'oubli de connaissances accumulées avant le bac et dans les modules MA1 et MA2 ne peut être que nuisible à la compréhension de ce cours. Plus précisément, on aura surtout besoin des prérequis suivants.

Prérequis de MA1 : On suppose connue la notion de fonctions polynômes (opérations, degré, division euclidienne, etc ...). La résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre du MA1 est considérée comme connue et concrètement maîtrisée. On suppose connues les fonctions usuelles intervenant dans le MA1. Cependant, les propriétés de ces fonctions sont reprises dans la partie 2.4 et le paragraphe 3.1.3 du présent cours.

Prérequis de MA2 : On suppose connues la notion de démonstration et les méthodes pratiques de démonstration (preuve par l'absurde, par contraposition, etc ...). On utilisera souvent le calcul ensembliste (intersection, réunion, bornes supérieure et inférieure, etc ...). On suppose connu et compris le calcul propositionnel (proposition, négation, implication, équivalence, théorème de récurrence, etc ...) et les quantificateurs ("pour tout", "il existe"). On suppose connue la notion de fonction (domaine de définition, injectivité, surjectivité, restriction, etc ...). La partie du cours de MA2 sur les suites réelles est importante pour comprendre le présent cours. On utilise les notions de sous-suite (ou suite extraite), de suite bornée, monotone, et les résultats les concernant, en particulier ceux sur les limites de suites (passage à la limite dans des inégalités, théorème des gendarmes, etc ...) ainsi que le théorème de Bolzano-Weierstrass suivant : de toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

Venons-en maintenant à l'organisation de ce cours. De manière quasi systématique, les notions et les résultats de ce cours sont placés dans des environnements textuels spéciaux, écrits en italique, portant en gras les noms de "Définition, Proposition, Corollaire, Théorème" tandis que les preuves (ou démonstrations) sont encadrées par le mot en gras "Démonstration" et par le symbole $\square$. Le reste est du commentaire dont la fonction est d'essayer d'expliquer intuitivement les notions et les résultats.
Comme leur noms l'indiquent, les deux premiers chapitres traitent des notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction. Le dernier chapitre contient des applications de ces propriétés. À plusieurs occasions, on a introduit des compléments dans ce cours. Ils servent à illustrer certains points du cours ou bien à en approfondir d'autres. Certains peuvent s'avérer utiles pour un étudiant de DEUG deuxième année ou de licence de mathématiques (ce cours est donc à conserver). Voyons maintenant le contenu des chapitres en détail.

Chapitre 1 : Dans la partie 1.1, on introduit la notion de limite finie d'une fonction en un point et la notion de continuité qui en découle. Il y a continuité en un point si la valeur de la fonction en ce point est aussi la limite de la fonction en ce point. Ensuite, on introduit les notions de limite "infinie" et de limite à "l'infini". Un lien entre les limites de fonction et les limites de suite, vues en MA2, est ensuite établi. Puis, à l'image de l'étude des limites de suite du MA2, on dégage des résultats sur les limites de fonction en relation avec les inégalités et avec les opérations usuelles.

La partie 1.2 est consacrée à l'introduction de la notion de propriété locale et à deux exemples de telles propriétés. En gros, on dit que, près d'un point, une fonction est négligeable devant (respectivement dominée par) une autre si le rapport de la première sur la seconde tend vers 0 en ce point (respectivement est borné près de ce point). Cette notion de négligeabilité près d'un point sera utilisée de manière essentielle dans l'étude des développements limités (cf. partie 3.1). Dans un complément, on utilise la notion de domination locale précédente pour décrire la complexité d'un algorithme. Dans un autre complément, on introduit la notion d'équivalence locale de fonctions et on lui applique la théorie des relations d'équivalence vue en MA2.
La partie 1.3 traite des fonctions continues sur un intervalle. On y montre qu'une fonction continue sur un intervalle fermé est forcément bornée et que ces bornes supérieure et inférieure sont des valeurs de la fonction. On montre aussi qu'une fonction continue sur un intervalle a une image "sans trou". Des applications de ces résultats sont présentées. Pour les fonctions strictement monotones continues, on établit que ce sont des bijections (sur des ensembles convenables) et la continuité de la bijection réciproque. Dans un complément, on introduit la notion de continuité uniforme et on donne une esquisse de la construction de "l'intégrale de Riemann".

Chapitre 2 : Dans la partie 2.1, on introduit la notion de dérivabilité en un point qui dit, en gros, que l'on peut construire la tangente à la courbe au point considéré. La pente de la tangente est le nombre dérivé. On montre que la dérivabilité en un point implique la continuité en ce point. Pour les fonctions dérivables, on construit la fonction dérivée, qui à tout point associe le nombre dérivé correspondant. Lorsque c'est possible, on itère la "dérivation" précédente. Comme la dérivabilité en un point repose sur l'existence d'une certaine limite en ce point, les propriétés des limites en relation avec les opérations usuelles donnent des propriétés de dérivabilité et de "dérivation" en relation avec ces mêmes opérations usuelles.
Dans la partie 2.2, on montre d'abord que la pente, si elle existe, doit être nulle en un extremum local d'une fonction et que, si une fonction est continue sur un intervalle, dérivable "à l'intérieur", et prend la même valeur "au début" et "à la fin", alors elle doit avoir une pente nulle quelque part "à l'intérieur" (théorème de Rolle). Comme conséquence, on obtient le théorème des accroissements finis, qui dit que les variations d'une fonction dérivable sont gouvernées par sa dérivée, et la règle de L'Hospital (cf. MA1). Un complément montre comment le théorème de Rolle permet d'évaluer une erreur d'interpolation.
Dans la partie 2.3, on s'intéresse, pour $k \in \mathbb{N}$, aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, c'est-à-dire aux fonctions k fois dérivables dont la dérivée k-ième est continue. On montre que la classe $\mathcal{C}^k$ est essentiellement "stable" par les opérations usuelles. On établit pour de telles fonctions les formules de Taylor avec reste de Lagrange et de Taylor avec reste de Young. Ces formules comparent la fonction considérée avec "son polynôme de Taylor".
Dans la partie 2.4, on reprend l'étude des fonctions usuelles vues dans le MA1. En admettant l'existence du logarithme néperien (existence que l'on peut déduire de la notion d'intégrale de Riemann, cf. paragraphe 1.3.3), on en déduit des propriétés élémentaires. En particulier, on en déduit l'existence de la fonction réciproque, la fonction exponentielle, ainsi que des propriétés élémentaires de cette dernière. À partir de l'exponentielle, on construit les fonctions hyperboliques ch, sh et th ainsi que les fonctions réciproques

correspondantes. La construction des fonctions circulaires sinus, cosinus et tangente est faite à partir de propriétés admises sur le cercle unité de $\mathbb{C}$ (ces propriétés sont implicitement admises dans le MA1). On montre les propriétés élémentaires bien connues de ces fonctions et on étudie les fonctions réciproques correspondantes.

Chapitre 3 : Dans la partie 3.1, on introduit la notion de développement limité en un point. En gros, une fonction admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en un point, si “près de ce point”, elle est “proche” d'un polynôme de degré n. En cas d'existence, on montre qu'un tel développement limité est unique. On montre aussi que le fait d'avoir un développement limité en un point se transmet bien par les opérations usuelles sur les fonctions. Comme application, des développements limités des fonctions usuelles (cf. partie 2.4) sont donnés. Les utilisations des développements limités pour étudier des limites et pour déterminer des signes sont illustrées.
Dans la partie 3.2, on s'intéresse au prolongement par continuité en un point de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, pour $k \in \mathbb{N}$. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel prolongement soit encore de classe $\mathcal{C}^k$ est que les dérivées successives jusqu'à l'ordre k aient une limite finie au point considéré. Concernant les équations différentielles linéaires, un autre problème de prolongement est soulevé : si une équation différentielle linéaire est bien définie sur un intervalle ouvert I et si, pour un $a \in I$, on peut la résoudre par la méthode du MA1 sur les intervalles $]-\infty; a[\cap I$ et $]a; +\infty[\cap I$, on se demande s'il est possible de “recoller” en a les solutions de part et d'autre de a en une solution de l'équation sur I tout entier. Cette question est traitée sur des exemples.
Dans la partie 3.3, on introduit la notion de convexité. En gros, une fonction est convexe sur un intervalle si la partie au-dessus de son graphe est “convexe au sens intuitif”. Cette propriété est caractérisée en termes de pentes de “cordes”. Lorsque la fonction considérée est dérivable, on montre que la convexité est équivalente à la croissance de la dérivée. Dans ce dernier cas, on montre qu'une telle fonction est toujours “au-dessus” de ses tangentes. Un exemple est donné pour montrer comment une propriété de convexité peut engendrer des inégalités utiles et inattendues. Dans un complément, on établit qu'une fonction convexe sur un intervalle est **forcément** continue sur l'intervalle et qu'en tout point, elle admet une “dérivée à gauche” et une “dérivée à droite”.
Dans la partie 3.4, on introduit la notion de suite donnée par une “relation de récurrence” faisant intervenir une fonction. Le fait qu'une telle suite soit “bien définie” n'est pas toujours assuré et on le montre essentiellement par récurrence. Lorsqu'une telle suite est construite à partir d'une fonction continue, on montre que l'éventuelle limite de la suite est à chercher parmi les “points fixes” de la fonction. Sous des conditions supplémentaires sur la fonction définissant la suite récurrente, on établit un théorème de convergence. Les suites récurrentes étant utiles pour approcher des nombres irrationnels, on essaye de cerner leur “vitesse de convergence”. La formule de Taylor-Lagrange (cf. paragraphe 2.3.2) s'avère utile pour traiter cette question. On présente ensuite la méthode de Newton qui fournit une méthode d'approximation “rapide” par une suite récurrente. En complément, on étudie le cas particulier des suites récurrentes “homographiques”.
Dans la partie 3.5, qui est un complément, on survole quelques méthodes anciennes pour approximer π, la longueur de demi-cercle unité.

Structure de l'examen : Le partiel et l'examen comprennent des questions de cours (notées sur environ sept points sur vingt) et des exercices. Comme question de cours, il peut être demandé d'énoncer un théorème ou une définition du cours, de démontrer un résultat du cours. Sauf avis explicite contraire, chaque question d'exercice exige une démonstration comme réponse.

Programme de l'examen : Le programme de l'examen de MA4 contient (au plus) les paragraphes et les parties du cours qui ne sont pas des compléments, c'est-à-dire **tous** les numéros **sauf** 1.2.3, 1.2.4, 1.3.3, 2.2.4, 3.3.2, 3.4.4 et 3.5. Seules les notions et les résultats de ces parties sont au programme, pas les commentaires ni les résultats d'exercices. Seuls les résultats au programme pourront être utilisés sans redémonstration (sauf mention explicite contraire).
La partie 2.4 et le paragraphe 3.1.3 contiennent plus ou moins des propriétés vues en MA1. Ils sont donc exclus du programme des questions de cours. Les résultats contenus dans la partie 2.4 et le paragraphe 3.1.3 sont considérés comme connus donc pourront être utilisés sans redémonstration. Cela signifie aussi qu'ils pourront être indispensables à la résolution d'une question de l'examen (on pourrait par exemple avoir absolumment besoin du développement limité en 0 à l'ordre n de la fonction exponentielle pour pouvoir répondre à une telle question).
De même, les propriétés du MA2 qu'on utilise dans le cours de MA4 (les propriétés sur les suites par exemple) sont également supposées connues et exclues du programme des questions de cours.

Quelques conseils : Même si l'on est peu intéressé par les mathématiques et si l'on veut seulement avoir l'examen, il n'est pas inutile de tenir compte des conseils suivants.
Au vu de la description de l'examen, il est indispensable d'apprendre à faire des démonstrations (avec toutes les exigences que cela comporte, cf. MA2). On a vu dans le MA2 des indications pour en faire mais **rien ne remplace l'expérience personnelle !** Il faut donc apprendre à résoudre **tout seul** des exercices. Cela se passe toujours comme cela : on analyse le résultat à démontrer et on comprend pourquoi il est vrai (tout ceci est au brouillon), puis on élabore une démonstration (éventuellement au brouillon puis au propre). Le plus souvent, le cours s'avère indispensable dans la démarche précédente, pour la phase de recherche comme pour celle de rédaction de la démonstration.
Pour bien utiliser cette boîte à outils qu'est le cours, il faut connaître les outils et avoir compris à quoi ils servent. C'est ce qu'on fait pour comprendre le cours. Les exercices présents dans le cours servent justement à tester si l'on a bien compris tel ou tel outil. Pour la plupart, ils sont résolus en appliquant directement un outil que l'on a introduit juste avant dans le cours.
Enfin le cours fournit aussi des exemples de démonstration (qui sont au programme des questions de cours). Il est très utile de les analyser en détail (en commençant par les plus courtes). Cela peut s'avérer être un travail de fourmi mais cela "paye". À ce sujet, la partie 2.4 est particulièrement intéressante puisque l'on y montre en détail comment on applique le cours à l'étude de fonctions connues.
Les exercices des TD sont en général plus difficiles que ceux présents dans le cours mais, avec une assez bonne connaissance du cours, on doit être en mesure d'en traiter beaucoup, au moins partiellement. En tout cas, il est indispensable de s'entraîner dessus car ils sont similaires à ceux des examens.

Au recueil d'exercices ont été ajoutées des annales, afin que l'on puisse se faire une idée de l'examen, et des exercices corrigés, afin de disposer d'exemples de rédaction de solution.

Notations et conventions : Au niveau du calcul logique, on utilise les signes $\Longrightarrow$ (resp. $\Longleftrightarrow$) pour désigner une implication (resp. une équivalence). On rappelle que, pour une proposition P, "si P" signifie "si P est vraie". On utilise aussi "$a := b$" ou "$b =: a$" pour dire que a est défini par b.
Concernant les ensembles, on note par $\cap$ (resp. $\cup$) l'opération d'intersection (resp. de réunion). On note l'ensemble vide par $\emptyset$. Si E, F sont des parties d'un ensemble G, alors $E \setminus F := E \cap F^c$, où F^c désigne le complémentaire de F dans G. En particulier, $E^* := E \setminus \{0\}$. On note par $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, les ensembles de nombres naturels, entiers, rationnels, réels et complexes respectivement. On note par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients réels (cf. MA1).
Concernant les fonctions (ou applications), écrire "$f : E \longrightarrow F$" signifie que E et F sont non vides et qu'on se donne une application f de E dans F (l'opération $x \mapsto f(x)$ est sous-entendue). Il en est de même des variantes suivantes : "$f : E \longrightarrow F, x \mapsto f(x)$", "$E \ni x \mapsto f(x) \in F$" et "$E \ni x \mapsto f(x)$". Si $f : E \longrightarrow F$ et si G est un ensemble tel que $E \cap G \neq \emptyset$, on note par $f_{|G}$ la restriction de f à G (définie sur $E \cap G$). L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E;F)$. En particulier, l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N};\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites réelles. Si $f : E \longrightarrow F$, A est une partie de E, B est une partie de F, on note par $f(A)$ l'image (directe) de A par f, par $f^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par f. La composition de $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$, c'est-à-dire l'application $E \ni x \mapsto g(f(x)) \in G$, sera notée $g \circ f$. Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, on note par f^{-1} la bijection réciproque.
Dans $\mathbb{R}$, on utilise les crochets [et] pour décrire les intervalles de $\mathbb{R}$. On pose $\mathbb{R}^+ := [0;+\infty[$ et $\mathbb{R}^- :=]-\infty;0]$ et si $E \subset \mathbb{R}$, $E^\pm := E \cap \mathbb{R}^\pm$. Lorsqu'elles existent, les bornes inférieure et supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ sont notées par $\inf A$ et $\sup A$ respectivement. À ce sujet, on suivra la convention suivante : on décide qu'un ensemble A non majoré (respectivement non minoré), dont la borne supérieure (respectivement inférieure) n'existe pas selon la définition du MA2, admet $+\infty$ (respectivement $-\infty$), lu "plus l'infini" (respectivement "moins l'infini"), comme borne supérieure (respectivement inférieure). On dit aussi que $+\infty$ (respectivement $-\infty$) majore (respectivement minore) tout réel. On étend aux fonctions les notions de bornes supérieure et inférieure en décidant que la borne supérieure (respectivement inférieure) d'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est celle de l'image $f(D)$, de D par f. On note $\sup f = \sup_{x\in D} f(x) := \sup f(D)$ (resp. $\inf f = \inf_{x\in D} f(x) := \inf f(D)$). Par commodité, on introduit la notation $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty;+\infty\}$.
Dans $\mathbb{N}$, on utilise les crochets $[\![$ et $]\!]$ pour décrire les intervalles. On pose $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On note par $n!$ factorielle n.

Chapitre 1

Fonctions Continues.

Notre intuition du continu peut nous inciter à dire qu'une fonction est continue si l'on peut tracer son graphe sans lever le stylo. Même si cette "définition" est assez bonne pour sentir la notion, on a besoin d'une définition rigoureuse pour faire une étude sérieuse de la continuité. Celle-ci va se déduire de la définition plus générale de limite de fonction. On complêtera ces notions par celles de négligeabilité d'une fonction devant une autre et de domination d'une fonction par une autre. On verra ensuite qu'une fonction continue sur un intervalle doit respecter certaines contraintes.

1.1 Limites de fonctions, continuité.

Lorsque l'on regarde les valeurs d'une fonction, on observe souvent que celles-ci se "concentre" près d'une certaine valeur lorsque la variable "s'approche" d'une certaine quantité. Il est intéressant de donner un sens précis à ce phénomène. C'est ce que l'on va faire dans cette partie.

1.1.1 Limite finie en un point.

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et a, ℓ des nombres réels. On veut définir de manière précise ce que veut dire l'expression "f a une limite en a et c'est ℓ". Selon l'intuition qu'on en a, il n'est pas pertinent de considérer des a qui ne "touchent" pas le domaine de définition de la fonction. Par exemple, on ne voit pas ce que cela signifierait de chercher la limite en -1 de la fonction $0 \leq x \mapsto \sqrt{x}$. Pour clarifier ceci, on introduit la

Définition 1.1. *Soit E une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que a* est accessible par *E si*

$$\forall \delta > 0 \,, \qquad E \cap]a - \delta; a + \delta[\neq \emptyset \,.$$

Si E est l'ensemble vide alors, d'après la définition 1.1, aucun $a \in \mathbb{R}$ n'est accessible par E. Donc, si l'on suppose qu'un $a \in \mathbb{R}$ est accessible par un ensemble E, alors on suppose

automatiquement que E est non vide.
Notons qu'un point $a \in E \subset \mathbb{R}$ est toujours accessible par E puisque, pour chaque $\delta > 0$, $a \in]a-\delta; a+\delta[$. Cependant, un point a accessible par E n'est pas forcément dans E. En effet, si $E =]b; +\infty[$, b est accessible par E mais hors de E. Si I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, on peut caractériser l'accessibilité comme le montre la

Proposition 1.2. *$a \in \mathbb{R}$ est accessible par un intervalle non vide I si et seulement si la proposition $(a \in I$ ou $a = \sup I$ ou $a = \inf I)$ est vraie.*

Démonstration : Prenons $a \in \mathbb{R}$ accessible par un intervalle I. Supposons que $a = \sup I$ et $a = \inf I$ sont fausses et montrons que $a \in I$ est vraie. Supposons que, pour tout $b \in I$, on ait $b > a$. Alors a minore I. Comme $a \neq \inf I$, on a $a < \inf I$. Pour $\delta = (\inf I) - a > 0$, $I \cap]a-\delta; a+\delta[$ est vide, ce qui contredit l'hypothèse. Donc il existe $a_- \in I$ tel que $a_- \leq a$. Par un raisonnement analogue, on montre qu'il existe $a_+ \in I$ tel que $a_+ \geq a$. Comme $(a_-, a_+) \in I^2$ et I est un intervalle, $a \in I$.
Montrons la réciproque. Si $a \in I$, on a déjà signalé que a est accessible par I. Traitons le cas où $a = \sup I$ (le cas $a = \inf I$ est similaire). Soit $\delta > 0$. Comme $a - \delta$ ne peut être un majorant de I, il existe $b \in I \cap]a-\delta; +\infty[$. Comme a majore I, on a $b \in I \cap]a-\delta; a]$ et $I \cap]a-\delta; a+\delta[$ est non vide. Donc a est accessible par I. □

Il est naturel, pour la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ considérée, de chercher une limite près d'un point a qui est accessible par le domaine de définition D de f.

Définition 1.3. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ accessible par D et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ℓ* est limite de f en a *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall x \in D, \quad \big(|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big).$$

Pour analyser cette définition, introduisons la proposition $B(\gamma, c, y)$, dépendant des paramètres $(c, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma > 0$, définie par $(|y - c| < \gamma)$ et notons par $P(f, \ell, \epsilon, \delta, x)$ l'implication intervenant dans la définition 1.3, c'est-à-dire donnée par

$$\Big(B(\delta, a, x) \implies B\big(\epsilon, \ell, f(x)\big)\Big). \tag{1.1}$$

Soit $P(f, \ell, \epsilon, \delta)$ la proposition définie par $(\forall x \in D, P(f, \ell, \epsilon, \delta, x))$, $P(f, \ell, \epsilon)$ définie par $(\exists \delta > 0; P(f, \ell, \epsilon, \delta))$ et enfin $P(f, \ell)$ définie par $(\forall \epsilon > 0, P(f, \ell, \epsilon))$, qui est la proposition intervenant dans la définition 1.3.
Que se passerait-il si l'on appliquait cette définition à un réel a non accessible par D ? En niant la proposition dans la définition 1.1, il existerait un $\delta_0 > 0$ tel que, $D \cap]a - \delta_0; a + \delta_0[= \emptyset$. Dans ce cas, pour chaque $\epsilon > 0$ et $\delta = \delta_0$, la proposition $P(f, \ell, \epsilon, \delta)$ est vraie, pour n'importe quel ℓ ! !, car, pour chaque $x \in D$, $B(a, \delta, x)$ est toujours fausse donc l'implication $P(f, \ell, \epsilon, \delta, x)$ est toujours vraie. Donc, lorsque a n'est pas accessible par D, tout nombre réel pourrait être limite ce qui confirme bien l'intuition que cela n'a pas de sens de parler de limite en un tel point.
En revanche, pour a accessible par D, il y a au plus **une** limite en vertu de la

Proposition 1.4. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ accessible par D. Si f admet une limite en a alors celle-ci est unique : si $\ell \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$ sont des limites de f en a alors $\ell = m$.*

Démonstration : Supposons $\ell \neq m$, et posons $\epsilon = |\ell - m|/2 > 0$. En utilisant le fait que $P(f, \ell, \epsilon)$ est vraie, on trouve un $\delta_1 > 0$ tel que $P(f, \ell, \epsilon, \delta_1)$ soit vraie. De même on trouve $\delta_2 > 0$ tel que $P(f, m, \epsilon, \delta_2)$ soit vraie. Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. D'après l'accessibilité de a par D, il existe $x_0 \in D$ tel que $|x_0 - a| < \delta$. Pour un tel x_0, on a, d'après $P(f, \ell, \epsilon, \delta_1)$, $|\ell - f(x_0)| < \epsilon$ et, d'après $P(f, m, \epsilon, \delta_2)$, $|f(x_0) - m| < \epsilon$. Par l'inégalité triangulaire, on en déduit $|\ell - m| \leq |\ell - f(x_0)| + |f(x_0) - m| < 2\epsilon = |\ell - m|$. On est arrivé à une absurdité, donc $\ell = m$. $\square$

Notation : si ℓ est limite de f en a, c'est donc **la** limite de f en a que l'on note $\lim_{x\to a} f(x)$ ou $\lim_a f$. Dans ce cas, on dit aussi que ℓ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a.

Donnons tout de suite trois exemples simples. Étant donné $c \in \mathbb{R}$, on considère les fonctions $f_0 : x \mapsto c$, $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto |x|$, toutes définies sur $\mathbb{R}$. Soit a un réel quelconque. Il est bien sûr accessible par $\mathbb{R}$. Les fonctions f_0, f_1 et f_2 admettent une limite en a, à savoir c, a et $|a|$, respectivement.

Exercice 1.1. : Vérifier le résultat annoncé.

Il faut bien se rendre compte qu'une limite peut ne pas exister. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x > 0$, associe 1 et, à $x < 0$, associe -1 et étudions la limite de cette fonction en 0. On vérifie d'abord que 0 est bien accessible par $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Il s'agit donc de montrer que la proposition dans la définition 1.1 est vraie. Soit $\delta > 0$. Comme $\delta/2 \in]-\delta, \delta[$ et $\delta/2 \neq 0$, on a bien $]-\delta, \delta[\cap \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \emptyset$. On a montré que 0 est accessible par $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. On peut donc étudier la limite de cette fonction en 0 et il se trouve qu'elle n'existe pas comme on va le montrer maintenant.
Supposons que $\ell \in \mathbb{R}$ est limite de f en 0. Si $\ell \neq 1$, on considère $\epsilon_0 = |\ell - 1| > 0$. Puisque ℓ est limite de f en 0, il existe $\delta_0 > 0$ tel que $P(f, \ell, \epsilon_0, \delta_0)$ soit vraie. Comme $\delta_0/2 \in]-\delta_0; \delta_0[\cap \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a $|f(\delta_0/2) - \ell| < \epsilon_0$. Mais, comme $\delta_0/2 \in]0; +\infty[$, $|f(\delta_0/2) - \ell| = |1 - \ell| = \epsilon_0$, contradiction. Donc $\ell = 1$. On considère $\epsilon_1 = 1 > 0$. Puisque 1 est limite de f en 0, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $P(f, 1, \epsilon_1, \delta_1)$ soit vraie. Comme $-\delta_1/2 \in]-\delta_1; \delta_1[\cap \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a $|f(-\delta_1/2) - 1| < 1$. Mais, comme $-\delta_1/2 \in]-\infty; 0[$, $|f(-\delta_1/2) - 1| = 2 > 1$, contradiction. Par conséquent, la limite en 0 de f n'existe pas.
C'est pourquoi **on ne s'autorisera à écrire** " $\lim_a f = ...$" **qu'après avoir démontré l'existence de cette limite**.

Pour mieux comprendre le sens de la définition 1.3, donnons des formulations équivalentes de propositions intervenant dans cette définition.

Proposition 1.5. *On se place dans le cadre de la définition 1.3.*

1. *Soit $\epsilon, \delta > 0$.*

$$\big(\forall x \in D, P(f, \ell, \epsilon, \delta, x)\big) \iff \Big(f\big(]a - \delta; a + \delta[\cap D\big) \subset]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[\Big),$$
$$\iff \Big(]a - \delta; a + \delta[\cap D \subset f^{-1}\big(]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[\big)\Big).$$

2. *Soit* $(c, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$. *On a* $B(\gamma_1, c, y) \Longrightarrow B(\gamma_2, c, y)$.
3. *Soit* $\epsilon > 0$ *et* $\delta_2 > \delta_1 > 0$. *On a* $P(f, \ell, \epsilon, \delta_2) \Longrightarrow P(f, \ell, \epsilon, \delta_1)$.
4. *Soit* $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$. *On a* $P(f, \ell, \epsilon_1) \Longrightarrow P(f, \ell, \epsilon_2)$.
5. *Soit* $\epsilon_0, \delta_0 > 0$. *On a* $P(f, \ell) \Longleftrightarrow (\forall \epsilon \in]0; \epsilon_0], \exists \delta \in]0; \delta_0]; P(f, \ell, \epsilon, \delta))$.

Démonstration : Il suffit d'utiliser les techniques du MA2. Montrons la première équivalence du 1. Le reste est laissé en exercice (cf. exercice 1.2).
Prenons $P(f, \ell, \epsilon, \delta)$ pour hypothèse et montrons que $f(]a-\delta; a+\delta[\cap D) \subset]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$. Soit $y \in f(]a - \delta; a + \delta[\cap D)$. Par définition, il existe $x_0 \in]a - \delta; a + \delta[\cap D$ tel que $y = f(x_0)$. D'après l'hypothèse $P(f, \ell, \epsilon, \delta, x_0)$ et le fait que $B(\delta, a, x_0)$ est vraie, $B(\epsilon, \ell, f(x_0))$ est aussi vraie, ce qui signifie que $y = f(x_0) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$. Comme y est arbitraire dans $f(]a - \delta; a + \delta[\cap D)$, on a montré $f(]a - \delta; a + \delta[\cap D) \subset]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$.
Montrons maintenant la réciproque. L'hypothèse est donc $f(]a-\delta; a+\delta[\cap D) \subset]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$ et on montre $P(f, \ell, \epsilon, \delta)$. Soit $x \in D$, on montre $P(f, \ell, \epsilon, \delta, x)$. Comme cette dernière est une implication, on suppose $B(\delta, a, x)$ vraie et on montre que $B(\epsilon, \ell, f(x))$ est aussi vraie. On a $x \in]a - \delta; a + \delta[\cap D$ donc, par l'hypothèse, $f(x) \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$, ce qui veut dire que $B(\epsilon, \ell, f(x))$ est vraie. □

Exercice 1.2. : En utilisant le MA2, terminer la preuve de la proposition 1.5.

Dans cette proposition 1.5, le premier point permet essentiellement de traduire l'implication de la définition 1.3 en terme d'image de parties par la fonction. Le point 2 signifie que l'éventuelle vérité de $B(\gamma, c, y)$ perdure lorsqu'on **augmente** γ. Le point 3 signifie que l'éventuelle vérité de $P(f, \ell, \epsilon, \delta)$ perdure lorsqu'on **diminue** δ. Le point 4 signifie que l'éventuelle vérité de $P(f, \ell, \epsilon)$ perdure lorsqu'on **augmente** ϵ. On voit d'après le point 5 que ce qui est important dans la définition 1.3, c'est ce qui se passe lorsque ϵ et δ sont petits. Ce n'est pas étonnant. La petitesse de ϵ renvoit à notre intuition de "concentration ou d'accumulation près de ℓ" tandis que celle de δ signale que l'on est proche de a, que l'on regarde une propriété locale au voisinage de a.
Que se passe-t-il lorsque a appartient à D ? On sait que a est bien accessible par D. On peut donc considérer la limite en a. On a alors la

Proposition 1.6. *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $a \in D$. *Si* f *admet une limite en* a, *c'est* $f(a)$.

Démonstration : Supposons que la limite $\ell := \lim_a f \neq f(a)$. Soit $\epsilon = |f(a) - \ell| > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $P(f, \ell, \epsilon, \delta)$ soit vraie. Comme $a \in]a-\delta; a+\delta[\cap D$, $B(\delta, a, a)$ est vraie et donc $B(\epsilon, \ell, f(a))$ aussi, ce qui s'écrit : $|f(a) - \ell| < \epsilon$, contradiction. □

Jusqu'à présent, on a tout lieu d'être satisfait de la définition des limites que l'on a choisie, puisqu'elle respecte assez bien notre intuition. Il y a cependant une situation désagréable. Reprenons l'exemple de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x > 0$, associe 1 et, à $x < 0$, associe -1. On a vu qu'elle n'a pas de limite en 0. Sa restriction à $]0; +\infty[$ étant constante, on peut vérifier qu'elle a 1 pour limite en 0 (notons que 0 est accessible par $]0; +\infty[$). Donc, "en oubliant" la restriction sur $]-\infty; 0[$, cette fonction n'est pas si sauvage. Pire, si l'on considère la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $f_1(0) = 0$, qui est donc vraiment simple, on s'aperçoit, d'après la proposition 1.6, que la limite en 0 n'existe pas. Pour rendre compte de cette situation, on veut introduire les notions de limite quand x tend vers a et x différent de a, de limite à droite et de limite à gauche. Pour ce faire, il faut prendre quelques précautions. Imaginons que l'on dise que ℓ est la limite de f quand x tend vers a et x différent de a, pour un a accessible par D, si la proposition $P(f,\ell)$ de la définition 1.3, avec "$|x-a|<\delta$" remplacé par "$0<|x-a|<\delta$" (ce qui élimine bien le cas $x=a$), est vraie. Alors, si $D=]-\infty;a-1]\cup\{a\}\cup[a+1;+\infty[$ par exemple, tout réel ℓ est une telle limite, ce que l'on veut éviter. Pour ce type de limite, on exige que a soit accessible par $D\setminus\{a\}$. Cela nous conduit à la

Définition 1.7. *Soit $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$.*

1. *Soit a accessible par $D\setminus\{a\}$. On dit que $\ell\in\mathbb{R}$ est* limite de $f(x)$ quand x tend vers a en étant différent de a *si*

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D\quad \big(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\epsilon\big)\,.$$

2. *Soit a accessible par $D\cap]a;+\infty[$. On dit que $\ell\in\mathbb{R}$ est* limite à droite de f en a *si*

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D\quad \big(a<x<a+\delta\Rightarrow|f(x)-\ell|<\epsilon\big)\,.$$

3. *Soit a accessible par $D\cap]-\infty;a[$. On dit que $\ell\in\mathbb{R}$ est* limite à gauche de f en a *si*

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in D\quad \big(a-\delta<x<a\Rightarrow|f(x)-\ell|<\epsilon\big)\,.$$

Dans le cadre de cette définition 1.7, on note $\lim_{x\to a,\,x\neq a}f(x)$ pour la limite de $f(x)$ quand x tend vers a en restant différent de a, $\lim_{x\to a,\,x>a}f(x)$ ou $\lim_{x\to a^+}f(x)$ pour la limite à droite de f en a, $\lim_{x\to a,\,x<a}f(x)$ ou $\lim_{x\to a^-}f(x)$ pour la limite à gauche de f en a. Ici a^+ et a^- **ne sont pas des nombres réels, ce sont simplement des éléments de notation**.
Un des aspects géniaux de la définition 1.3, c'est qu'elle contient ces "nouvelles" limites, comme on va le voir dans la

Proposition 1.8. *Soit $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$.*

1. *Soit a accessible par D. $\lim_a f$ existe si et seulement s'il existe $\delta>0$ tel que $\lim_a f_{|]a-\delta;a+\delta[}$ existe. Dans ce cas, les deux limites sont égales.*
2. *Soit a accessible par $D\setminus\{a\}$. $\lim_{x\to a,x\neq a}f(x)$ existe si et seulement si $\lim_a f_{|\mathbb{R}\setminus\{a\}}$ existe. Dans ce cas, les deux limites sont égales.*
3. *Soit a accessible par $D\cap]a;+\infty[$. $\lim_{a^+}f$ existe si et seulement si $\lim_a f_{|]a;+\infty[}$ existe. Dans ce cas, les deux limites sont égales.*
4. *Soit $a\in D$ et accessible par $D\setminus\{a\}$. $\lim_a f$ existe si et seulement si $\lim_{x\to a,x\neq a}f(x)$ existe et vaut $f(a)$.*
5. *Soit a accessible par $D\setminus\{a\}$. $\lim_{x\to a,x\neq a}f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x\to a,x>a}f(x)$ et $\lim_{x\to a,x<a}f(x)$ existent et sont égales. Dans ce cas, les trois limites coïncident.*

Démonstration : Dans chaque question, il suffit de montrer l'équivalence de deux propositions. On traite la première équivalence, les autres peuvent être traitées de manière analogue et sont à démontrer dans l'exercice 1.3.
Si $\ell := \lim_a f$ existe. Soit $\delta = 1$. La fonction $f_{|]a-1;a+1[}$ est par définition la fonction $g :]a-1; a+1[\cap D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in]a-1; a+1[\cap D$, associe $f(x)$. Montrons que g admet ℓ pour limite en a. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse sur f, il existe $\eta > 0$ tel que $P(f, \ell, \epsilon, \eta)$ soit vraie. On a, pour $x \in]a-1; a+1[\cap D \cap]a-\eta; a+\eta[$, $g(x) = f(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$, donc $P(g, \ell, \epsilon, \eta)$ est vraie.
Réciproquement, supposons que, pour un certain $\delta > 0$, la fonction $g := f_{|]a-\delta;a+\delta[}$ admette ℓ pour limite. Montrons que ℓ est aussi la limite de f en a. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse sur g, il existe $\eta > 0$ tel que $P(g, \ell, \epsilon, \eta)$ soit vraie. Soit $\delta' = \min(\delta, \eta)$. On a, pour $x \in]a-\delta'; a+\delta'[\cap D$, $f(x) = g(x) \in]\ell-\epsilon; \ell+\epsilon[$, donc $P(f, \ell, \epsilon, \delta')$ est vraie. □

Exercice 1.3. : En utilisant le MA2, terminer la preuve de la proposition 1.8.

D'après les points 2 et 3 de cette proposition 1.8, on voit que les trois nouvelles limites que l'on a introduites sont en fait des limites, au sens de la définition 1.3, de certaines restrictions de la fonction. Par conséquent, ces nouvelles limites sont uniques lorsqu'elles existent. Les points 4 et 5 de cette proposition 1.8 sont très utiles pour étudier des limites concrètes. Le premier point de cette proposition 1.8 met en lumière le caractère local de la notion de limite. D'après ce point, l'existence de la limite de f en a ne dépend que des valeurs de f "près de a". Une autre conséquence importante se présente dans le cas où $D =]a; a+1[$ (par exemple). En effet, dans ce cas, l'existence de $\lim_a f$ équivaut à celle de $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$, qui équivaut à celle de $\lim_{a^+} f$. Et, en cas d'existence, les trois limites sont égales. En particulier, pour $c \in \mathbb{R}$, si l'on considère la fonction $g :]a; a+1[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui est constante égale à c alors cette fonction est la restriction de $\mathbb{R} \ni x \mapsto c$ qui, en tout point, admet pour limite c. Par conséquent, la limite de g en a existe et vaut c. Au passage, le même argument avec a remplacé par $a+1$ montre que la limite de g en $a+1$ existe et vaut c aussi.

Dans beaucoup d'ouvrages, la définition de limite en a et la notation $\lim_{x\to a} f(x)$ correspondent à ce que nous désignons ici par $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$. Il faut prendre garde à ceci et vérifier la définition de limite dans les ouvrages que l'on consulte : la différence de définition peut donner des résultats de formulations différentes. Il n'y a vraiment conflit que dans le cas où f est défini en a, où $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$ existe et est différent de $f(a)$.

1.1.2 Fonction continue.

L'un des objectifs de ce cours est de comprendre la notion de fonction continue. C'est ici qu'on va la définir précisément.

Définition 1.9. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in D$. On dit que f* est continue en *a si $\lim_a f$ existe. Rappelons que, dans ce cas, cette limite est forcément $f(a)$ (cf. proposition 1.6).*

On remarque que, lorsque f est continue en a, les valeurs de f "près de a" se "rapprochent" de celle en a, ce qui correspond à l'intuition. Qu'en est-il de celle que l'on avait au début de ce chapitre lorsqu'on disait qu'une fonction est continue si l'on peut tracer son graphe sans lever le stylo ? Comme on l'a dit précédemment, ceci est trop vague mais signifie en gros qu'une fonction continue n'a pas de "saut" dans son graphe. Essayons de donner un sens précis à la situation contraire : lorsque la fonction présente un saut en un point. On décide de traduire "$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ fait un saut en $a \in D$" de la façon suivante. Il existe $s > 0$ (taille minimale du saut) tel que, aussi près que l'on veut de a, on peut trouver un x tel que f fasse un saut de s au moins entre les valeurs en x et en a. De manière plus précise, il existe $s > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe un $x \in D \cap]a-\delta; a+\delta[$ tel que $|f(x) - f(a)| \geq s$. En formule

$$\exists s > 0 \; ; \forall \delta > 0 \, , \exists x \in D \cap]a-\delta; a+\delta[\; ; \; |f(x) - f(a)| \geq s \, .$$

En remplaçant s par ϵ, on reconnaît bien la négation de la continuité en a.

Passons à la continuité sur une partie. On a la

Définition 1.10. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Si E est une partie non vide de D, on dit que f* est continue sur *E si elle l'est en tout point de E. Lorsque f est continue sur D, on dit simplement que f* est continue.

On introduit aussi la notion suivante.

Définition 1.11. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \notin D$ mais tel que a soit accessible par D. On suppose de plus que $\ell := \lim_a f$ existe. Le* prolongement par continuité de f en a *est, par définition, la* **nouvelle fonction** *$\bar{f} : D \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $\bar{f}(a) = \ell$ et $\bar{f}(x) = f(x)$, si $x \in D$.*

Ce prolongement par continuité est automatiquement continu en a. Donnons un exemple. Soit $f :]a; a+1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$, pour $x \in]a; a+1]$. Comme f est constante, elle admet 1 pour limite en a. Le prolongement par continuité de f en a est l'application $\bar{f} : [a; a+1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est constante égale à 1.
Souvent, par abus, on note par une même lettre la fonction f et son prolongement par continuité. Par exemple, si f est définie par $f(x) = (\sin x)/x$ pour $x \neq 0$ et si l'on sait qu'elle tend vers 1 en 0 (comme $\sin 0 = 0$, cela vient du fait que sinus est dérivable en 0 de nombre dérivé $\cos 0 = 1$, cf. paragraphe 2.4.3), alors elle se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

1.1.3 Limites infinies, limites à l'infini.

Jusqu'à présent, on s'est intéressé à des limites finies (dans $\mathbb{R}$) en des points finis (dans $\mathbb{R}$). Il est cependant utile dans la pratique de considérer des limites à l'infini et aussi des limites infinies. On se propose d'étendre les définitions précédentes. Il nous faut donc un procédé pour exprimer "x proche de $+\infty$". Tandis que "x proche de $b \in \mathbb{R}$" se traduisait par "$|x - b| < \delta$, pour un $\delta > 0$ petit", la condition "$x > M$, pour un $M > 0$ grand", traduira "x proche de $+\infty$".
Pour les limites à l'infini, on commence par adapter la notion d'accessibilité introduite dans la définition 1.1.

Définition 1.12. *Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On dit que*
$+\infty$ est accessible par E *si*

$$\forall M \in \mathbb{R}; \quad E \cap]M; +\infty[\neq \emptyset\,,$$

$-\infty$ *est accessible par E si*

$$\forall M \in \mathbb{R}; \quad E \cap]-\infty; M[\neq \emptyset\,.$$

Donnons une proposition équivalente à celle, noté P_+, qui définit "$+\infty$ est accessible par E". Soit $M_0 \in \mathbb{R}$ quelconque. On a $P_+ \iff (\forall M > M_0, E\cap]M; +\infty[\neq \emptyset)$ (à vérifier). En particulier, on peut prendre $M_0 = 0$, ce qui est souvent commode. On dispose d'une autre caractérisation donnée par la

Proposition 1.13. $+\infty$ *(respectivement $-\infty$) est accessible par E si et seulement si $+\infty = \sup E$ (respectivement $-\infty = \inf E$). On rappelle que, par convention, $+\infty = \sup E$ signifie que E est non majoré et que, par convention, $-\infty = \inf E$ signifie que E est non minoré.*
En particulier, les intervalles par lesquels $+\infty$ (respectivement $-\infty$) est accessible sont $\mathbb{R}$ et les $]a; +\infty[$ et $[a; +\infty[$ (respectivement les $]-\infty; a]$ et $]-\infty; a[$), pour a décrivant $\mathbb{R}$.

Démonstration : On traite le cas de $+\infty$ seulement (le cas de $-\infty$ est similaire). Dire que E est non majoré signifie que, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il est existe un élément de E dans $]M; +\infty[$, ce qui est équivalent à la définition de "$+\infty$ est accessible par E". □

Juste après la définition 1.3, on a introduit des propositions permettant de l'analyser. Ici, on se propose d'en conserver la structure tout en remplaçant la proposition $B(\gamma, c, y)$, pour $(c, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\gamma > 0$, par la proposition $B(M, y, +\infty)$, dépendant de $(M, y) \in \mathbb{R}^2$, définie par $(y > M)$ ou par la proposition $B(M, y, -\infty)$, dépendant de $(M, y) \in \mathbb{R}^2$, définie par $(y < M)$, selon les cas. En particulier, on étend au cas présents (i.e. $\ell = \pm\infty$) la définition de la proposition $P(f, \ell, \epsilon, \delta, x)$ donnée en (1.1). On rappelle que l'on a posé $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On a alors la

Définition 1.14. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. On définit $\ell = \lim_a f$ lorsque un élément du couple (a, ℓ) est infini. Pour les limites à droite, à gauche, pour $x \neq a$ (lorsque $a \in \mathbb{R}$), remplacer D par $D\cap]a; +\infty[$, $D\cap]-\infty; a[$ et $D \setminus \{a\}$ respectivement.*

– *Si $a \in \mathbb{R}$ est accessible par D et $\ell = +\infty$:*

$$\forall M > 0;\, \exists \delta > 0;\, \forall x \in D, \quad \big(|x - a| < \delta \implies f(x) > M\big)\,.$$

– *Si $a \in \mathbb{R}$ est accessible par D et $\ell = -\infty$:*

$$\forall M > 0;\, \exists \delta > 0;\, \forall x \in D, \quad \big(|x - a| < \delta \implies f(x) < -M\big)\,.$$

– *Si $a = +\infty$ est accessible par D et $\ell \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \epsilon > 0;\, \exists A > 0;\, \forall x \in D, \quad \big(x > A \implies |f(x) - \ell| < \epsilon\big)\,.$$

– *Si $a = -\infty$ est accessible par D et $\ell \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \epsilon > 0;\ \exists A > 0;\ \forall x \in D, \quad \big(x < -A \implies |f(x) - \ell| < \epsilon\big)\,.$$

– *Si $a = +\infty$ est accessible par D et $\ell = +\infty$:*

$$\forall M > 0;\ \exists A > 0;\ \forall x \in D, \quad \big(x > A \implies f(x) > M\big)\,.$$

– *Si $a = -\infty$ est accessible par D et $\ell = +\infty$:*

$$\forall M > 0;\ \exists A > 0;\ \forall x \in D, \quad \big(x < -A \implies f(x) > M\big)\,.$$

– *Si $a = +\infty$ est accessible par D et $\ell = -\infty$:*

$$\forall M > 0;\ \exists A > 0;\ \forall x \in D, \quad \big(x > A \implies f(x) < -M\big)\,.$$

– *Si $a = -\infty$ est accessible par D et $\ell = -\infty$:*

$$\forall M > 0;\ \exists A > 0;\ \forall x \in D, \quad \big(x < -A \implies f(x) < -M\big)\,.$$

Donnons quelques exemples simples. On a

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty\,,\quad \lim_{x\to+\infty} 1/x = 0\,,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 1/x = +\infty\,,\quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 1/x = -\infty\,. \tag{1.2}$$

Soit $M > 0$. En prenant $A = M$, on a, pour $x \in]A; +\infty[$, $x > M$, ce qui justifie la première limite. Pour la seconde, considérons $\epsilon > 0$. Soit $A = 1/\epsilon > 0$. Pour $x \in]A; +\infty[$, $0 < 1/x < 1/A = \epsilon$, ce qui justifie la deuxième limite. Pour la dernière, considérons $M > 0$. Soit $\delta = 1/M > 0$. Pour $x \in]0; \delta[$, $1/x > 1/\delta = M$, ce qui justifie la troisième limite. Un argument similaire permet de justifier la dernière limite.

Comme pour les limites finies en des points réels, on a la

Proposition 1.15. *On se place dans le cadre de la définition 1.14.*

1. *Chaque limite définie dans la définition 1.14, si elle existe, est unique. Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ sont notées $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ respectivement.*
2. *Étant donnés $\epsilon_0 > 0$, $\delta_0 > 0$, $M_0 > 0$ et $A_0 > 0$, les définitions de la définition 1.14 sont inchangées si l'on remplace $(\forall M > 0)$ par $(\forall M > M_0)$, $(\forall \epsilon > 0)$ par $(\forall \epsilon \in]0; \epsilon_0])$, $(\exists A > 0)$ par $(\exists A > A_0\ )$ et $(\exists \delta > 0)$ par $(\exists \delta \in]0; \delta_0])$.*
3. *Les résultats de la proposition 1.8 sont valables pour des limites infinies en $a \in \mathbb{R}$.*
4. *On suppose que $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) est accessible par D. Alors $\lim_a f$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour $I :=]A; +\infty[$ (resp. $I :=]-\infty; A[$), $\lim_a f_{|I}$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Dans ce cas, les deux limites sont égales.*
5. *Si $a \in D$ alors ni $+\infty$ ni $-\infty$ est limite de f en a (si elle existe c'est $f(a)$).*

Démonstration : Pour le premier point, il suffit d'adapter la preuve de la proposition 1.4. Pour le second, on adapte les arguments de la preuve de la proposition 1.5. Quant aux points 3 et 4, une facile adaptation des arguments utilisés dans la preuve de la proposition 1.8 donne le résultat. Enfin, on adapte la preuve de la proposition 1.6 pour obtenir le dernier point. Les détails sont laissés en exercice. $\square$.

En particulier, comme $\lim_{x\to 0, x>0} 1/x = +\infty$ et $\lim_{x\to 0, x<0} 1/x = -\infty$ sont différentes, $\lim_{x\to 0, x\neq 0} 1/x$ n'existe pas, d'après le point 3 de la proposition 1.15.

Pour terminer ce paragraphe, on va démontrer quelques résultats très utiles pour l'étude des limites. Le premier pourrait s'appeler théorème des gendarmes.

Proposition 1.16. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ accessible par D.*

1. *Pour $a \in \mathbb{R}$, s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et une fonction $u : D\cap]a-h; a+h[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ tels que $\lim_a u = 0$ et, pour tout $x \in D\cap]a-h; a+h[$, $|f(x)-\ell| \leq u(x)$, alors $\lim_a f = \ell$.*
2. *Pour $a = +\infty$, s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$, $M > 0$ et une fonction $u : D\cap]M; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ tels que $\lim_a u = 0$ et, pour tout $x \in D\cap]M; +\infty[$, $|f(x)-\ell| \leq u(x)$, alors $\lim_a f = \ell$.*
3. *Pour $a \in \mathbb{R}$, s'il existe $h > 0$ et une fonction $u : D\cap]a-h; a+h[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim_a u = +\infty$ et, pour tout $x \in D\cap]a-h; a+h[$, $f(x) \geq u(x)$, alors $\lim_a f = +\infty$.*
4. *Pour $a = -\infty$, s'il existe $M > 0$ et une fonction $u : D\cap]-\infty; -M[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim_a u = +\infty$ et, pour tout $x \in D\cap]-\infty; -M[$, $f(x) \geq u(x)$, alors $\lim_a f = +\infty$.*

Démonstration : On ne considère que les cas où $a \in \mathbb{R}$ (les autres cas sont similaires). Pour 1, soit $\epsilon > 0$. Puisque $\lim_a u = 0$, il existe un $\delta \in]0; h]$ (cf. proposition 1.5) tel que $P(u, 0, \epsilon, \delta)$ soit vraie. D'après l'autre hypothèse, on voit qu'alors $P(f, l, \epsilon, \delta)$ est vraie. Pour 3, soit $M > 0$. D'après $\lim_a u = +\infty$, il existe un $\delta \in]0; h]$ (cf. proposition 1.15) tel que $u(D\cap]a-\delta; a+\delta[) \subset]M; +\infty[$. D'après l'autre hypothèse, on voit que $f(D\cap]a-\delta; a+\delta[) \subset]M; +\infty[$. $\square$.

Bien entendu, il y a d'autres cas de figure similaires dans lesquels ce raisonnement s'applique. On pourra utiliser ces résultats sans redémonstration (sauf avis contraire explicite). Par exemple, on a l'

Exercice 1.4. : Dans les conditions de la proposition 1.16 pour $a = -\infty$, montrer que, s'il existe $M > 0$ et une fonction $u : D\cap]-\infty; -M[\longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $\lim_a u = -\infty$ et, pour tout $x \in D\cap]-\infty; -M[$, $f(x) \leq u(x)$, alors $\lim_a f = -\infty$.

Voici un résultat qui ressemble fortement aux résultats du MA2 sur les suites monotones.

Proposition 1.17. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit $b = \sup D \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ (resp. $a = \inf D \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$) la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de D avec la convention que $b = +\infty$ (resp. $a = -\infty$) et $D \setminus \{b\} = D$ (resp. $D \setminus \{a\} = D$), si D n'est pas majoré (resp. minoré).*

1. *b (resp. a) est accessible par D.*
2. *Si b est accessible par $D\setminus\{b\}$ alors $\lim_{b^-} f$ existe et c'est $\sup_{x\in D\setminus\{b\}} f$, c'est-à-dire la borne supérieure de $f(D\setminus\{b\})$ (avec la même convention). En particulier, si $b \notin D$ alors $\lim_b f$ existe et vaut $\sup f$, la borne supérieure de $f(D)$.*

3. *Si a est accessible par* $D\setminus\{a\}$ *alors* $\lim_{a^+} f$ *existe et c'est* $\inf_{x\in D\setminus\{a\}} f$, *c'est-à-dire la borne inférieure de* $f(D\setminus\{a\})$ *(avec la même convention). En particulier, si* $a \notin D$ *alors* $\lim_a f$ *existe et vaut* $\inf f$, *la borne inférieure de* $f(D)$.

Démonstration : On ne démontre que les propriétés relatives à b, celles relatives à a se prouve de manière similaire.
Montrons d'abord que b est accessible par D. Comme b est la borne supérieure de D, pour tout $M < b$ (pour tout M, si $b = +\infty$), on peut trouver $x \in D$ tel que $M < x$. Donc b est accessible par D. En particulier, si $b \notin D$ alors b est accessible par $D \setminus \{b\}$ et les limites $\lim_{b^-} f$ et $\lim_b f$ sont de même nature et égales en cas d'existence.
On suppose maintenant que b est accessible par $D\setminus\{b\}$ et on montre $\lim_{b^-} f = \sup_{x\in D\setminus\{b\}} f$ (ce qui terminera la preuve de 1).
Premier cas : f est majorée. Soit $M \in \mathbb{R}$ la borne supérieure de $f(D\setminus\{b\})$. Prenons $\epsilon > 0$. Comme $M-\epsilon$ ne majore pas $f(D\setminus\{b\})$ par définition de M, il existe $c \in D\setminus\{b\}$ tel que $f(c) > M-\epsilon$. Comme f est croissante, on en déduit que, pour $x \in (D\setminus\{b\})\cap]c;+\infty[$, $f(x) > M-\epsilon$, soit $|f(x)-M| < \epsilon$ puisque $f(x) \leq M$, par définition de M. On a donc $M = \lim_{b^-} f$.
Second cas : f n'est pas majorée. Prenons $M > 0$. Il ne majore pas $f(D\setminus\{b\})$ donc il existe $c \in D\setminus\{b\}$ tel que $f(c) > M$. Par croissance, on en déduit de même que, pour $x \in (D\setminus\{b\})\cap]c;+\infty[$, $f(x) > M$. On a montré que $\lim_{b^-} f = +\infty$, qui, dans le cas présent, est bien $\sup_{x\in D\setminus\{b\}} f$, par convention. □

Pour mieux comprendre ce résultat, prenons pour D un intervalle I et une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Soit $b = \sup I$, la borne supérieure de I. b est accessible par $I\setminus\{b\}$ car I est un intervalle. Le résultat affirme que la limite à gauche en b existe et vaut la borne supérieure de $f(I\setminus\{b\})$. Deux cas se présentent. Si $b \notin I$ (c'est le cas si $b = +\infty$) alors $\lim_{b^-} f$ et $\lim_b f$ sont de même nature et $f(I\setminus\{b\}) = f(I)$, donc $\lim_b f = \sup f$. En particulier, on retrouve $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ (cf. (1.2)). Si $b \in I$, le résultat ne concerne en fait que $f_{|I\setminus\{b\}}$. Comme application, on a le cas où $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec f croissante ($a < b$ dans $\mathbb{R}$). La limite en b^- existe toujours et est majorée par $f(b)$. On peut très bien avoir $\lim_{b^-} f < f(b)$ comme dans l'exemple $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $f(1) = 2$ et $f(x) = x$ si $x \in [0;1[$.
Bien sûr, on a un résultat analogue pour les fonctions décroissantes que l'on pourra utiliser sans redémonstration (sauf avis contraire explicite).

Exercice 1.5. : Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction décroissante. Soit b défini comme dans la proposition 1.17. Montrer que, si b est accessible par $D\setminus\{b\}$, alors $\lim_{b^-} f$ existe et vaut $\inf_{x\in D\setminus\{b\}} f$, la borne inférieure de $f(D\setminus\{b\})$.

1.1.4 Lien avec les limites de suites.

Dans ce paragraphe, on va tout d'abord constater que la notion de limite de suite vue dans le MA2 correspond à une des limites de fonction vue précédemment. Ensuite on donnera une caractérisation de l'existence d'une limite de fonction en termes de suites.

Par définition, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ est l'application $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $n \in \mathbb{N}$, associe u_n. Dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ signifie que

$$\forall\epsilon > 0;\ \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon\big)\ ,$$

ce qui est exactement dire que la fonction u admet ℓ comme limite en $+\infty$ (conformément à la définition 1.14), étant donné que $+\infty$ est accessible par $\mathbb{N}$ (cf. définition 1.12). On constate la même coïncidence pour les limites infinies en $+\infty$. Notons que le même raisonnement s'applique si u est définie sur une partie D de $\mathbb{N}$, par laquelle $+\infty$ est accessible. Par exemple, $D = \{2n; n \in \mathbb{N}\}$, $D = \rrbracket 167; \infty\llbracket$ et $D = \{2n; n \in \rrbracket 167; \infty\llbracket\}$. Bref, les limites de suites sont des limites en $+\infty$ de fonctions qui sont définies sur une partie de $\mathbb{N}$, par laquelle $+\infty$ est accessible.

Passons à la caractérisation annoncée (cf. théorème 1.19). Montrons d'abord la

Proposition 1.18. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et D une partie de $\mathbb{R}$. a est accessible par D si et seulement si il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}; D)$ telle que $\lim u_n = a$.*

Démonstration : Si $a = +\infty$ est accessible par D alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe, d'après la définition 1.12, un réel $u_n \in D\cap]n; +\infty[$. Comme $u_n > n$, pour tout n, $\lim u_n = +\infty$, par le théorème des gendarmes pour les suites. Réciproquement, pour chaque $M > 0$, l'hypothèse $\lim u_n = +\infty$ signifie qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \implies u_n > M$ donc $u_N \in D\cap]M; +\infty[$ et $+\infty$ est accessible par D. On procède de manière analogue pour $a = -\infty$.
Il reste à traiter le cas $a \in \mathbb{R}$. Si a est accessible par D alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe, d'après la définition 1.1, un réel $u_n \in D\cap]a - 1/(n + 1); a + 1/(n + 1)[$. Comme $|u_n - a| \leq 1/(n+1)$, $\lim u_n = a$, par le théorème des gendarmes pour les suites. Réciproquement, pour chaque $\delta > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Longrightarrow |u_n - a| < \delta$ donc $u_N \in D\cap]a - \delta; a + \delta[$ et a est accessible par D. □

Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, accessible par D, on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui tend vers a. On imagine que $\lim_a f$ et $\lim_{+\infty}(f \circ u)$ doivent être reliées. Le théorème suivant exprime ce lien entre limite de fonction et limite de suite.

Théorème 1.19. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ accessible par D. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\ell = \lim_a f$.*
2. *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}; D)$ telle que $\lim u_n = a$, on a $\lim f(u_n) = \ell$.*

Démonstration : On ne traite que le cas $(a, \ell) \in \mathbb{R}^2$ (les autres cas sont similaires). Supposons que 1 soit vérifié. Soit $(u_n)_n \in \mathcal{F}(\mathbb{N}; D)$ telle que $\lim u_n = a$. Prenons $\epsilon > 0$. D'après 1, il existe $\delta > 0$ tel que $P(f, \ell, \epsilon, \delta)$ soit vraie. Or, comme $\lim u_n = a$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $|u_n - a| < \delta$. D'après $P(f, \ell, \epsilon, \delta)$, on a donc, pour tout $n \geq N$, $|f(u_n) - \ell| < \epsilon$. On a bien montré que $\lim f(u_n) = \ell$.
Réciproquement, supposons que 2 soit vérifié. Si 1 n'était pas vérifié, il existerait $\epsilon > 0$, tel que $P(f, \ell, \epsilon)$ soit fausse. Donc, pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $x \in D$ tel que

$|x-a| < \delta$ et $|f(x)-\ell| \geq \epsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on aurait, en prenant $\delta = 2^{-n}$, un $x_n \in D \cap]a-2^{-n}; a+2^{-n}[$ vérifiant $|f(x_n)-\ell| \geq \epsilon$ $(\star)$. Comme $\lim 2^{-n} = 0$, on voit que $\lim x_n$ existe et vaut a (par le théorème des gendarmes pour les limites de suite). Par 2, on a donc $\lim f(x_n) = \ell$. Donc, pour le ϵ considéré, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $|f(x_N)-\ell| < \epsilon$ ce qui contredit la propriété $(\star)$ pour $n = N$. On a donc montré 1 par l'absurde. □

Bien entendu, on peut aussi caractériser des limites à droite (par exemple) comme on demande de le faire dans l'

Exercice 1.6. : On suppose que D contient un intervalle de la forme $]a, a+h[$. Caractériser en termes de suites la propriété $\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$.

Il est important de noter qu'on a une **équivalence** dans le théorème 1.19. Un cas d'application très important est celui où l'on veut montrer qu'une limite de fonction n'existe pas. Étudions par exemple la limite de $\sin x$ en $+\infty$. On suppose que cette limite existe et vaut $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Comme les suites $u_n = n\pi$ et $v_n = \pi/2 + n\pi$ tendent vers $+\infty$, on a, par le théorème 1.19, $\lim \sin u_n = \ell = \lim \sin v_n$. Or, comme $\sin u_n = 0$ et $\sin v_n = 1$, pour tout n, on a donc $0 = \ell = 1$, contradiction. La limite en $+\infty$ de sinus n'existe donc pas. De la même manière, traiter l'

Exercice 1.7. : Soit $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, la fonction caractéristique de $\mathbb{Z}$ qui, à $x \in \mathbb{Z}$, associe 1 et, à $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, associe 0. Montrer qu'elle n'a pas de limite en $+\infty$.

Un autre cas d'application du théorème 1.19, pour des limites de suite cette fois, est illustré par l'

Exercice 1.8. : En admettant que $\lim_{x \to 0, x \neq 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ce qui sera établi au paragraphe 2.4.3), étudier $\lim_{n \to \infty} 2^n \sin(\pi/2^n)$.

On verra une autre application du théorème 1.19, lorsqu'on étudiera les suites récurrentes dans la partie 3.4.

1.1.5 Limites et inégalités.

Il est souvent très utile de connaître les liens entre inégalités et passage à la limite. C'est ce que l'on va étudier dans ce paragraphe.

Une inégalité stricte vraie à la limite en $a \in \mathbb{R}$ reste vraie sur un intervalle ouvert contenant a. De manière précise et plus générale :

Proposition 1.20. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ accessible par D. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et est strictement supérieure au réel M (et par convention c'est le cas si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$) alors il existe un intervalle I,*
- *du type $]a-h; a+h[$, pour un $h > 0$, si $a \in \mathbb{R}$,*
- *du type $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$), pour $A \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$),*

tel que, pour tout $x \in D \cap I$, $f(x) > M$. On a donc

$$\lim_{x \to a} f(x) > M \quad \Longrightarrow \quad \Big(\forall x \in D\,, \quad \big(x \in I \Rightarrow f(x) > M\big)\Big)\,.$$

Démonstration : On traite le cas $(a, \lim_a f) \in \mathbb{R}^2$ (les autres cas sont similaires). Soit $\ell = \lim_{x\to a} f(x) > M$. En prenant $\epsilon = \ell - M > 0$, on en déduit l'existence d'un réel $h > 0$ tel que, pour tout $x \in D\cap]a-h; a+h[$, on ait $|f(x) - \ell| < \ell - M$. Donc, pour $x \in D\cap]a-h; a+h[$, $f(x) > \ell - (\ell - M) = M$. □

Une inégalité large vraie quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$ est vraie à la limite en a. De manière précise et plus générale :

Proposition 1.21. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ accessible par D, tels que $\ell := \lim_{x\to a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$.*

1. *S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}; D)$ telle que $\lim u_n = a$ et s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $f(u_n) \geq M$, alors $\ell \geq M$.*
2. *S'il existe un intervalle I*
   – *du type $]a-h; a+h[$, pour un $h > 0$, si $a \in \mathbb{R}$,*
   – *du type $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$), pour $A \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$),*
   tel que, pour tout $x \in D \cap I$, $f(x) \geq M$, alors $\ell \geq M$.

Démonstration : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite satisfaisant l'hypothèse du point 1. Comme $\ell = \lim_{x\to a} f(x)$ existe, on a par le théorème 1.19, $\lim f(u_n) = \ell$. Or, par hypothèse, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par M à partir d'un certain rang. D'après le passage à la limite de suite dans les inégalités (vu dans le MA2), on en déduit que $\ell = \lim f(u_n) \geq M$.
Sous l'hypothèse du point 2, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}; D)$ une suite qui tend vers a. À partir d'un certain rang on doit avoir $u_n \in I$. Donc cette suite satisfait l'hypothèse du point 1. Par l'argument précédent, on en déduit encore $\ell \geq M$. □

Bien entendu, on a un résultat analogue en reversant les inégalités (avec $f(u_n) \leq M$ et $\ell \leq M$). Il y a cependant un **piège** qu'il faut éviter. Si l'on a une inégalité stricte dans l'hypothèse, on n'a pas forcément une inégalité stricte dans la conclusion.
Contre-exemple : soit $f :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in]0; 1]$, associe x. On a, pour tout $x \in]0; 1]$, $f(x) > 0$ mais l'inégalité $\lim_0 f > 0$ est fausse puisque $\lim_0 f = 0$. En revanche, l'inégalité large dans la conclusion, à savoir $\lim_0 f \geq 0$, découle de la proposition 1.21.

Une application intéressante de la proposition 1.20 est le corollaire suivant qui permet d'identifier la borne supérieure d'une fonction. On utilise encore la convention que la borne supérieure d'une fonction non majorée est $+\infty$ et que $+\infty$ majore tout nombre réel. Bien entendu, on a un résultat similaire pour les bornes inférieures.

Corollaire 1.22. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ un majorant de f.*

1. *S'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(\mathbb{N}; D)$ tels que $\lim f(u_n) = M$, alors $M = \sup f$.*
2. *S'il existe $a \in \overline{\mathbb{R}}$ accessible par D tel que $M = \lim_a f$ alors $M = \sup f$.*

Démonstration : Sous la deuxième hypothèse, on peut trouver $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de D de limite a, car a est accessible par D (cf. proposition 1.18). D'après le théorème 1.19, $\lim f(u_n) = \lim_a f = M$ et la première hypothèse est alors satisfaite. Donc 2 sera une conséquence de 1.
On montre 1. On suppose la première hypothèse remplie. Si $M = +\infty$ alors, comme $\lim f(u_n) = M$, pour tout $A > 0$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(u_n) > A$. f n'est donc pas majorée d'où $\sup f = +\infty = M$.
Passons au cas où $M \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que M est le plus petit majorant de f. Pour cela, on montre que tout nombre strictement inférieur à M n'est pas un majorant. Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim f(u_n) = M > M - \epsilon$, on peut appliquer la proposition 1.20 à la fonction $f \circ u$ (où $u : n \mapsto u_n$), qui est définie sur $\mathbb{N}$, au point $a = +\infty$. On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $f(u_n) > M - \epsilon$. Donc $M - \epsilon$ ne majore pas f et M est le plus petit majorant de f. □

Exercice 1.9. : Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de la fonction $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x > 0$ associe $1/x$.

1.1.6 Opérations sur les limites.

L'objectif de ce paragraphe est de voir comment les limites sont affectées par les opérations courantes sur les fonctions : la somme, le produit, le passage à l'inverse et la composition. Comme pour les limites de suites (étudiées en MA2), les choses se passent plutôt bien à part pour certains cas indéterminés.
On présente tout d'abord quelques conventions pour pouvoir exprimer les résultats. On précise également les cas indéterminés. Ensuite, on regroupe tous les résultats dans la proposition 1.23, que l'on démontrera ensuite.

On va voir que si f et g ont des limites finies ℓ et m en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la somme tend vers $\ell + m$. Si ℓ et m sont $+\infty$, le résultat est encore vrai si l'on décide d'interpréter $(+\infty) + (+\infty)$ comme étant $+\infty$. C'est ce genre de **convention** que l'on veut mettre en place afin de pouvoir exprimer plus commodément les résultats. **Il ne sera pas autorisé** d'utiliser ces conventions, sauf pour lire les résultats de la proposition 1.23.
Précisément, si $(\ell, m) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ sont des limites, on décide que $\ell + m$ est égale à la somme usuelle $\ell + m$ si $(\ell, m) \in \mathbb{R}^2$, que $\ell + (\pm\infty) = \pm\infty$ si $\ell \in \mathbb{R}$, que $(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty)$ et que cela est indéterminé (n'a pas de sens) dans les autres cas $((\mp\infty) + (\pm\infty))$. Avant de passer au produit, on définit des signes et un produit de signes. Si $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, on dit que son signe $sgn(\ell)$ est $+$ si $l = +\infty$ ou $l \in \mathbb{R}^{+*}$ et qu'il vaut $-$ sinon. On décide que $+ \cdot + = - \cdot - = +$ et $+ \cdot - = - \cdot + = -$. Pour les limites, on décide que $\ell \cdot m$ est le produit usuel si $(\ell, m) \in \mathbb{R}^2$, que $\ell \cdot (\pm\infty) = (sgn(\ell) \cdot \pm)\infty$ si $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, et que les autres cas sont indéterminés $(0 \cdot (\pm\infty)$ et $(\pm\infty) \cdot 0)$. Enfin, on décide que l'inverse de la limite ℓ est $1/\ell$ si $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, que c'est 0 si $\ell \in \{-\infty; +\infty\}$ et que c'est indéterminé dans le dernier cas : $l = 0$.

Proposition 1.23. *Soit* $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. *Les fonctions $f+g$, λf, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, fg sont bien définies sur $D := D_1 \cap D_2$. On suppose que a est accessible par D, que* $\lim_a f$ *et* $\lim_a g$ *existent dans* $\overline{\mathbb{R}}$*. Alors, à l'exception des cas indéterminés (voir ci-dessus),* $\lim_a(f+g)$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *et vaut* $\lim_a f + \lim_a g$ *(avec la convention ci-dessus),* $\lim_a(fg)$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *et vaut* $\lim_a f \cdot \lim_a g$ *(avec la convention ci-dessus). En particulier, si g est la fonction constante égale à $\lambda \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ alors* $\lim_a(\lambda f)$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *et vaut* $\lambda \cdot \lim_a f$ *(avec la convention ci-dessus). Si g est nulle ($\lambda = 0$), fg l'est aussi et* $\lim_a(fg) = 0$.
2. *On suppose que a est accessible par D_1 et que* $\lim_a f$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$*. Alors il existe un intervalle I*
   – *du type $]a-h; a+h[$, pour un $h > 0$, si $a \in \mathbb{R}$,*
   – *du type $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$), pour $A \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$),*
   tel que $1/f$ soit définie sur $D_1 \cap I$, $\lim_a(1/f)$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *et vaut* $1/(\lim_a f)$ *(avec la convention ci-dessus).*
3. *On suppose que $f(D_1) \subset D_2$, que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ accessible par D_1, que* $b := \lim_a f$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, que b est accessible par D_2 et que* $\lim_b g$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$*. Alors la fonction $g \circ f$ est bien définie sur D_1,* $\lim_a(g \circ f)$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *et vaut* $\lim_b g$.

Avant de démontrer cette proposition 1.23, donnons-en quatres conséquences importantes.

Dans les conventions, on a décidé à juste titre que "1/0" est indéterminé. En effet, on a $\lim_0 x = 0$ mais $\lim_0(1/x)$ n'existe pas puisque les limites à gauche et à droite existent mais sont différentes : $-\infty$ et $+\infty$ (cf. (1.2)). Cependant, si l'on considère la fonction $g :]0; \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x > 0$ associe x alors on a bien "$\lim_0 g = 1/(\lim_0 g)$" si l'on convient que, dans ce cas, que "$1/0 = +\infty$". Ce cas est-il absent de la proposition 1.23 ? Dans le point 2, oui mais pas dans le point 3 comme le montre le

Corollaire 1.24. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ accessible par D. On suppose que* $\lim_a f$ *existe et vaut 0, et qu'il existe un intervalle I*
– *du type $]a-h; a+h[$, pour un $h > 0$, si $a \in \mathbb{R}$,*
– *du type $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$), pour $A \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$),*
tel que, pour tout $x \in D \cap I$, $f(x) > 0$. Alors $\lim_a(1/f)$ *existe et vaut $+\infty$.*

Démonstration : Soit $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $y > 0$ associe $1/y$. D'après (1.2), $+\infty$ est la limite de g en 0. Comme $f_{|D \cap I}$ tend vers 0 en a (cf. propositions 1.8 et 1.15), on peut appliquer le point 3 de la proposition 1.23 à la fonction $g \circ (f_{|D \cap I})$. On en déduit (toujours grâce aux propositions 1.8 et 1.15) que $\lim_a(1/f)$ existe et vaut $\lim_0 g$. □

Exercice 1.10. : Étudier $\lim_{x \to 0} e^{1/x}(1 + e^{3/x})^{-1}$. On a intérêt à considérer séparément ce qui se passe pour $x > 0$ et pour $x < 0$.

Comme deuxième application de la proposition 1.23, on montre le corollaire suivant, qui indique essentiellement que la continuité se transmet par les opérations usuelles.

Corollaire 1.25. *Continuité.*

1. *Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Alors les fonctions $f + g$, λf, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et $f \times g$ sont continues sur D. Si, de plus, f ne s'annule pas sur D, alors $1/f$ est définie et continue sur D.*
2. *Soit $f : D_1 \longrightarrow D_2$ et $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. Alors $g \circ f$ est définie et continue sur D_1.*

Démonstration : Compte tenu de la définition de la continuité (cf. définitions 1.9 et 1.10), il suffit d'appliquer la proposition 1.23. □

La troisième conséquence importante de la proposition 1.23 est donné par le

Corollaire 1.26. *Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$. Toute fraction rationnelle (qui est un quotient de polynômes) est continue sur son domaine de définition.*

Démonstration : On a montré que les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x$ sont continues (cf. exercice 1.1, définitions 1.9 et 1.10). En raisonnant par récurrence et en utilisant le résultat sur les produits dans le corollaire 1.25, on vérifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto x^n$ est continue. En utilisant encore ce corollaire, on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la continuité de λf_n. Comme tout polynôme est une somme finie de $\lambda_n f_n$, pour des $\lambda_n \in \mathbb{R}$, on a, par récurrence (sur le nombre de termes dans la somme), la continuité du polynôme. Une fraction rationnelle est un quotient de polynômes P/Q qui est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}; Q(x) = 0\}$. Comme les polynômes P et Q sont continus sur D et que Q ne s'y annule pas, alors, toujours par le 1 du corollaire 1.25 pour les produits et les inverses cette fois, la fraction rationnelle est continue sur D. □

Comme dernière conséquence de la proposition 1.23, on établit le corollaire 1.27 suivant, qui confirme quelque chose qui, intuitivement, paraît évident. Lorsque l'on étudie la limite en $a \in \mathbb{R}$ de f, cela doit être équivalent à étudier la limite en 0 de la fonction $h \mapsto f(a+h)$. Pour un tel $a \in \mathbb{R}$, soit $\tau_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tau_a(x) = x+a$. C'est la translation de réel a. τ_a est bijective et $(\tau_a)^{-1} = \tau_{-a}$, puisque $(y = \tau_a(x)) \Longleftrightarrow (y = x+a) \Longleftrightarrow (y-a = x) \Longleftrightarrow (\tau_{-a}(y) = x)$. De plus, τ_a est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le corollaire 1.26. Soit $D \subset \mathbb{R}$ tel que a soit accessible par D et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On peut construire l'application $g : \tau_{-a}(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $h \in \tau_{-a}(D)$ associe $f(\tau_a(h)) = f(a + h)$. De plus, comme $0 = \tau_{-a}(a)$ et τ_{-a} est continue, 0 est accessible par $\tau_{-a}(D)$.

Corollaire 1.27. *Dans les conditions précédentes, $\lim_a f$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\lim_0 g$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$. Et, en cas d'existence, ces limites sont égales.*

Démonstration : Dans le sens "$\Longrightarrow$", on utilise le fait que $g = f \circ \tau_a$, la continuité de τ_a en 0 et la proposition 1.23. Pour la réciproque, on utilise le fait que $f = g \circ \tau_{-a}$, la continuité de τ_{-a} en a et la proposition 1.23. □

Démonstration de la proposition 1.23 : Montrons tout d'abord le point 1 lorsque a est réel. Pour la somme, on traite les deux cas suivants : $\ell = \lim_a f$ et $m = \lim_a g$ sont réels; $\ell = \lim_a f \in \mathbb{R}$ et $\lim_a g = +\infty$.
Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $P(f, \ell, \epsilon/2, \delta_1)$ soit vraie et il existe

$\delta_2 > 0$ tel que $P(g, m, \epsilon/2, \delta_2)$ soit vraie. Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pour $x \in D$ vérifiant $|x - a| < \delta$, on a donc $|f(x) + g(x) - \ell - m| \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. On a montré que $\lim_a (f + g) = \ell + m$.

Dans l'autre cas, soit $M > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $P(f, \ell, 1, \delta_1)$ soit vraie et il existe $\delta_2 > 0$ tel que $P(g, +\infty, M + |\ell| + 1, \delta_2)$ soit vraie. Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pour $x \in D$ vérifiant $|x - a| < \delta$, on a donc $f(x) + g(x) = f(x) - \ell + \ell + g(x) \geq -1 - |\ell| + (M + |\ell| + 1) = M$. On a montré que $\lim_a (f + g) = +\infty$.

Passons au produit dans les cas : $\ell = \lim_a f$ et $m = \lim_a g$ sont réels ; $\ell = \lim_a f \in \mathbb{R}^{-*}$ et $\lim_a g = +\infty$.

Dans le premier cas, on pose : $M = 1 + |l| + |m| \geq 1 > 0$. Soit $\epsilon \in]0; 1]$. Par hypothèse, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $P(f, \ell, \epsilon/(2M), \delta_1)$ soit vraie et il existe $\delta_2 > 0$ tel que $P(g, m, \epsilon/(2M), \delta_2)$ soit vraie. En particulier, pour $x \in D$ tel que $|x - a| < \delta_2$, $|g(x)| \leq |g(x) - m| + |m| < \epsilon/(2M) + |m| \leq |m| + 1$. Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pour $x \in D$ vérifiant $|x - a| < \delta$, on a donc

$$\begin{aligned}
\big|f(x) \cdot g(x) \;-\; \ell \cdot m\big| \;&=\; \Big|\big(f(x) - \ell\big) \cdot g(x) \;+\; \ell \cdot \big(g(x) - m\big)\Big| \\
&\leq\; \big|f(x) - \ell\big| \cdot |g(x)| \;+\; |\ell| \cdot \big|g(x) - m\big| \\
&<\; \big(\epsilon/(2M)\big) \cdot \big(|m| + 1\big) \;+\; |\ell| \cdot \big(\epsilon/(2M)\big) \\
&\leq\; \big(\epsilon/(2M)\big) \cdot M \;+\; M \cdot \big(\epsilon/(2M)\big) \;=\; \epsilon\,.
\end{aligned}$$

On a montré que $\lim_a (fg) = \ell \cdot m$.

Dans l'autre cas, il s'agit de montrer que le produit tend vers $-\infty$. Soit $M > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $P(f, \ell, |\ell|/2, \delta_1)$ soit vraie. En particulier, pour $x \in D$ vérifiant $|x - a| < \delta_1$, $|f(x) - \ell| < |\ell|/2$ soit $\ell/2 < f(x) - \ell < -\ell/2$ donc $f(x) \in]3\ell/2; \ell/2[$. Par hypothèse, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $P(g, +\infty, 2M/|\ell|, \delta_2)$ soit vraie. Soit $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Pour $x \in D$ vérifiant $|x - a| < \delta$, on a $g(x) > 2M/|\ell| > 0$ donc $-f(x)g(x) > (|\ell|/2) \cdot (2M/|\ell|) = M$ et $f(x)g(x) < -M$.

Passons maintenant au point 2. On traite le cas $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}^{+*}$. La proposition 1.20 montre qu'il existe $h > 0$ tel que, pour tout $x \in]a - h, a + h[\cap D$, on a $f(x) > 0$. Donc $1/f(x)$ est défini sur $]a - h, a + h[\cap D$. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta_1 \in]0; h]$ tel que $P(f, \ell, |\ell|/2, \delta_1)$ soit vraie. Pour $x \in D$ vérifiant $|x - a| < \delta_1$, on a donc $|\ell| \leq |f(x)| + |\ell - f(x)| < |f(x)| + |\ell|/2$ soit $|f(x)| > |\ell|/2$. Toujours par la même hypothèse, il existe $\delta_2 \in]0; \delta_1]$ tel que $P(f, \ell, \epsilon \cdot \ell^2/2, \delta_2)$ soit vraie. Pour $x \in D$ vérifiant $|x - a| < \delta_2$,

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{\ell}\right| \;=\; \frac{|f(x) - \ell|}{|\ell| \cdot |f(x)|} \;<\; \frac{\epsilon \cdot \ell^2/2}{|\ell| \cdot |\ell|/2} \;=\; \epsilon\,.$$

On a montré que $\lim_a 1/f = 1/\ell$.

Il reste à montrer le point 3. On considère le cas où a, b et $m = \lim_b g$ sont réels. Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\delta_2 > 0$ tel que $P(g, m, \epsilon, \delta_2)$ soit vraie. Par l'autre hypothèse, il existe $\delta_1 > 0$ tel que $P(f, b, \delta_2, \delta_1)$ soit vraie. Pour $x \in D_1$ vérifiant $|x - a| < \delta_1$, on a donc, d'après $P(f, b, \delta_2, \delta_1)$, $f(x) \in]b - \delta_2; b + \delta_2[$. D'après $P(g, m, \epsilon, \delta_2)$, on en déduit que $|g(f(x)) - m| < \epsilon$. On a montré que $\lim_a g \circ f = m$. □

Exercice 1.11. : Compléter la preuve de la proposition 1.23. On traitera en particulier le cas où $a = +\infty$.

1.2 Comparaison locale des fonctions.

Très souvent en sciences expérimentales, il est utile de pouvoir éliminer d'un calcul une quantité "négligeable". Cela permet souvent de pouvoir effectuer un calcul approché réaliste alors que, peut-être, on ne sait pas effectuer le calcul exact ou qu'il est vraiment trop lourd. Considérons par exemple la fonction $\sqrt{1+x}$. On verra que $1 + x/2$ est une "bonne approximation" lorsque "x est petit". Pour donner un sens précis à tout cela, on a besoin de préciser les expressions entre guillemets. C'est ce que l'on fait en définissant la notion de propriété locale. Ensuite, on l'utilise pour comparer des fonctions "quand x tend vers a", pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Cela nous conduit aux notions de "petit o" et de "grand o". On verra dans le chapitre 3.1 un prolongement de la notion de "petit o" qu'est la notion de développement limité au voisinage de a.
Deux compléments sont ensuite abordés. Le premier concerne l'utilisation de "grand o" pour évaluer la complexité d'un algorithme. Le second se penche sur la notion de fonctions équivalentes "quand x tend vers a", pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Cette notion peut être utile pour étudier rapidement certaines limites mais présente des inconvénients.

1.2.1 Propriétés locales.

Il s'agit ici de définir le fait qu'une propriété soit vraie "quand x tend vers a", pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Tout d'abord, on rappelle la notion d'accessibilité par un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (synthèse des définitions 1.1 et 1.12).

Définition 1.28. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et E une partie de $\mathbb{R}$. On dit que a est* accessible par E *si,*
– *lorsque $a \in \mathbb{R}$, $(\forall h > 0;]a-h; a+h[\cap E \neq \emptyset)$,*
– *lorsque $a = +\infty$, $(\forall A \in \mathbb{R};]A; +\infty[\cap E \neq \emptyset)$,*
– *lorsque $a = -\infty$, $(\forall A \in \mathbb{R};]-\infty; A[\cap E \neq \emptyset)$.*

Ensuite, on veut définir le fait qu'une fonction est définie près de a et qu'une propriété est vraie près de a. On a la

Définition 1.29. *Soit E une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'une proposition $P(x)$, dépendant du paramètre réel $x \in E$,* est vraie près (au voisinage) de *$a \in \overline{\mathbb{R}}$, si a est accessible par E et s'il existe un intervalle I :*
– *du type $]a-h; a+h[$, pour un $h > 0$, si $a \in \mathbb{R}$,*
– *du type $]A; +\infty[$ (resp. $]-\infty; A[$), pour $A \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$ (resp. $a = -\infty$),*
tel que $(\forall x \in I \cap E, P(x))$ soit vraie.
On dit qu'une proposition $P(x)$, dépendant du paramètre réel $x \in E$, est vraie près de $a \in \mathbb{R}$ sauf en a (au voisinage extérieur de a) *si a est accessible par $E \setminus \{a\}$ et s'il existe $h > 0$, tel que $(\forall x \in]a-h; a+h[\cap E \setminus \{a\}, P(x))$ soit vraie.*
En particulier, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction, on dit qu'elle est définie près (au voisinage) de *$a \in \overline{\mathbb{R}}$ si la proposition $P(x)$ définie par ($f(x)$ est définie), dépendant du paramètre $x \in D$, est vraie près de a.*

Par exemple, la fonction $f :]13; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui à $x > 13$ associe $1/x$, est définie au voisinage de $+\infty$. D'autre part, nous pouvons réexprimer la proposition 1.20 en disant que, si $\lim_a f$ existe et est strictement supérieure à M alors $(f(x) > M)$ est vraie au voisinage de a. Notons de plus que la notion de proposition vraie au voisinage extérieur de a n'a d'intérêt que si $a \in E$. En effet, si $a \notin E$, elle est équivalente à la notion de proposition vraie au voisinage de a (à vérifier).

1.2.2 Fonction négligeable devant (resp. dominée par) une autre.

On s'intéresse à deux exemples de propriété locale qui conduisent aux notions de "petit o" et de "grand o".

Définition 1.30. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *On dit que $f(x)$* est négligeable devant *$g(x)$* quand *x* tend vers *a (près de a, au voisinage de a) s'il existe une fonction ϵ, définie près de a, telle que $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ et que $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ au voisinage de a. Dans ce cas, on note $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to a$ (on lit "f(x) est un petit o de g(x)"). Si g ne s'annule pas au voisinage extérieur de a, ceci équivaut à $\lim_{x\to a}(f(x)/g(x)) = 0$.*
2. *On dit que $f(x)$* est dominée par *$g(x)$* quand *x* tend vers *a (près de a, au voisinage de a) s'il existe $K \in \mathbb{R}^+$, tel que $|f(x)| \leq K|g(x)|$, près de a. Dans ce cas, on note $f(x) = O(g(x))$ quand $x \to a$ (on lit "f(x) est un grand o de g(x)").*

La notation $f(x) = o(g(x))$ est un **abus de notation** car, si l'on a aussi $h(x) = o(g(x))$, ce n'est pas pour cela que $f(x) = h(x)$. Mais elle est employée couramment. Comme cette notation risque d'induire en erreur, on a intérêt en cas de doute à revenir à l'écriture $f(x) = g(x)\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$. La notation $f(x) = O(g(x))$ est aussi un abus, pour la même raison. Ces notations o et O sont appelées notations de Landau, du nom du mathématicien allemand Edmund Landau (1877–1938).

Donnons quelques exemples. Quand $x \to 0$, on a $x^m = o(x^n)$ si et seulement si $m > n$. Quand $x \to +\infty$, on a $x^m = o(x^n)$ si et seulement si $m < n$. Quand $x \to +\infty$, on a $\ln(x) = o(x^\alpha)$ pour tout $\alpha > 0$. Tandis que $x\sin(x) = O(x)$ quand $x \to +\infty$, $x\sin(x)$ n'est pas un $o(x)$ quand $x \to +\infty$, puisque $\lim_{x\to+\infty} \sin x$ n'existe pas (cf. paragraphe 1.1.4). Vérifier ces résultats. Donnons quelques propriétés utiles.

Proposition 1.31. *Au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$:*

1. *Si $f(x) = o(g(x))$, alors $f(x) = O(g(x))$.*
2. *Si $f(x) = o(g(x))$ et $g(x) = O(h(x))$, alors $f(x) = o(h(x))$.*
3. *Si $f_1(x) = o(g(x))$ et $f_2(x) = o(g(x))$, alors $(f_1 + f_2)(x) = o(g(x))$.*
4. *Si $f_1(x) = o(g_1(x))$ et $f_2(x) = O(g_2(x))$, alors $(f_1 f_2)(x) = o(g_1 g_2)(x)$.*

Démonstration : Exercice. □

Une erreur à ne pas faire : si $f(x) = o(g_1(x))$ et $f(x) = o(g_2(x))$ quand $x \to a$, on ne peut pas en déduire que $f(x) = o((g_1 + g_2)(x))$ quand $x \to a$. Contre-exemple : $f(x) = x^3$, $g_1(x) = x^2 + x^3$, $g_2(x) = -x^2$, quand $x \to 0$.

Puisqu'une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$, les outils de comparaison précédents, au voisinage de $+\infty$, s'utilisent aussi pour les suites. Par exemple, on dira qu'une suite $(u_n)_n$ est négligeable devant une suite $(v_n)_n$, on note $u_n = o(v_n)$, s'il existe une suite $(w_n)_n$ tendant vers 0 et un entier N tels que, pour tout $n \geq N$, $u_n = v_n w_n$.

Les comparaisons de suites viennent souvent de comparaisons de fonctions quand $x \to +\infty$. Par exemple si (u_n) et (v_n) sont définies respectivement par $u_n = f(n)$ et $v_n = g(n)$, et $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de $+\infty$, alors $u_n = o(v_n)$.

Exercice 1.12. : Comparer les suites $(n \ln n)$ et (n^2)

La situation sera différente pour les suites récurrentes (cf. partie 3.4).

1.2.3 Complément : complexité d'algorithme.

Dans ce paragraphe, on illustre sur un exemple l'utilisation des O pour décrire la complexité d'un algorithme.

Considérons par exemple le problème du tri : ranger par ordre croissant une liste de n nombres. Combien faut-il faire de comparaisons entre nombres ? Ceci dépend de l'algorithme de tri utilisé.
L'algorithme récursif : si on a trié i nombres, on compare le $i+1$-ème à ceux déjà triés pour le ranger à la bonne place. On peut avoir à faire (dans le plus mauvais cas) $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = (n-1)n/2$ comparaisons, ce qui fait $O(n^2)$ comparaisons.
L'algorithme de "tri-fusion" : on fusionne deux listes déjà triées en comparant les premiers éléments des deux listes, prenant le plus petit et recommençant ; on fait ainsi des listes triées de 2, puis de 4, puis de 8.... Le nombre de comparaisons à faire pour fusionner deux listes triées de 2^{i-1} nombres est au plus $2^i - 1$. Si $2^{k-1} < n \leq 2^k$, il y a 2^{k-i} listes de 2^i nombres ou moins. Le nombre de comparaisons à faire pour trier n nombres par l'algorithme de tri-fusion est donc majoré par

$$1 \cdot 2^{k-1} + 3 \cdot 2^{k-2} + \cdots + (2^i - 1)2^{k-i} + \cdots + (2^k - 1) \cdots 1 \leq k\, 2^k \leq (1 + \log_2 n)\, 2n \ .$$

Ceci fait $O(n \ln n)$ comparaisons (à vérifier), et c'est négligeable devant n^2.

1.2.4 Complément : fonctions équivalentes.

On introduit ici la notion d'équivalence de fonction. On constate qu'il s'agit d'une relation d'équivalence, ce qui permet d'appliquer les résultats du MA2 sur le sujet.

Définition 1.32. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$, soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On dit que $f(x)$* est équivalent à *$g(x)$* quand *x* tend vers *a s'il existe une fonction h définie*

près de a telle que $(f(x) = g(x)h(x))$ soit vraie près de a et telle que $\lim_{x\to a} h(x) = 1$. *Dans ce cas, on note $f(x) \sim_{x\to a} g(x)$ ou $f \sim_a g$ ou "$f \sim g$ au voisinage de a" ou encore "$f \sim g$ quand x tend vers a".*
Si g ne s'annule pas au voisinage extérieur de a, alors $f \sim_a g$ équivaut à $\lim\limits_{x\to a, x\neq a} (f(x)/g(x))$ *existe et vaut* 1.

Voici quelques exemples d'équivalents classiques *quand x tend vers* 0. On peut vérifier toutes ces équivalences par la règle de l'Hospital (qu'on verra au chapitre 2, cf. proposition 2.20).

$$\begin{array}{ccc} e^x - 1 \sim x & \ln(1+x) \sim x & ((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x \\ \sin x \sim x & \tan x \sim x & (\cos x - 1) \sim -x^2/2 \\ \operatorname{sh} x \sim x & \operatorname{th} x \sim x & (\operatorname{ch} x - 1) \sim x^2/2 \end{array}$$

Exercice 1.13. : Montrer que les équivalences $e^x - 1 \sim x$, $\sin x \sim x$ et $\operatorname{sh} x \sim x$ sont fausses près de $+\infty$.

Il est donc indispensable de préciser au voisinage de quoi un équivalent est considéré.
Voici quelques propriétés de l'équivalence.

Proposition 1.33. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *L'équivalence de fonctions au voisinage de a est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions définies près de a : pour toutes fonctions f, g et h, définies près de a, on a*
   - *$f(x) \sim_a f(x)$ (réflexivité),*
   - *$(f(x) \sim_a g(x)) \Longrightarrow (g(x) \sim_a f(x))$ (symétrie),*
   - *$(f(x) \sim_a g(x)$ et $g(x) \sim_a h(x)) \Longrightarrow (f(x) \sim_a h(x))$ (transitivité).*
2. *Si $f_1(x) \sim_a g_1(x)$ et $f_2(x) \sim_a g_2(x)$, alors $(f_1 f_2)(x) \sim_a (g_1 g_2)(x)$.*
3. *Si $f_1(x) \sim_a g_1(x)$ et $f_2(x) \sim_a g_2(x)$, et si g_2 ne s'annule pas au voisinage extérieur de a, alors f_2 ne s'annule pas au voisinage extérieur de a et $(f_1/f_2)(x) \sim_a (g_1/g_2)(x)$.*
4. *$f(x) \sim_a g(x)$ si et seulement si $f(x) - g(x) = o(g(x))$ au voisinage de a.*
5. *Si $f(x) \sim_a g(x)$, alors $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de a.*
6. *Si $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de a et $g(x) \sim_a h(x)$, alors $f(x) = O(h(x))$ au voisinage de a.*

Démonstration : Ces résultats découlent des opérations sur les limites vues dans la proposition 1.23. On détaille les arguments pour la symétrie du 1 et pour le 2.
Si $f \sim_a g$ alors il existe une fonction h, définie près de a et vérifiant $\lim_a h = 1$, telle que, au voisinage de a, on ait $f = gh$. Par la proposition 1.23, la fonction $1/h$ est bien définie près de a et tend vers 1 en a. Comme $g = f \times (1/h)$ est vraie près de a, on a $g \sim_a f$.
Pour le 2, on a l'existence de deux fonctions h_1 et h_2 définies près de a, tendant vers 1 en a, telles que $f_1 = g_1 h_1$ et $f_2 = g_2 h_2$, près de a. Donc $f_1 f_2 = (g_1 g_2) \times (h_1 h_2)$ près de a avec $\lim_a h_1 h_2 = 1$, d'après la proposition 1.23. □

Exercice 1.14. : Vérifier les autres propriétés de la proposition 1.33.

Il faut se méfier des sommes : si on a $f_1(x) \sim_a g_1(x)$ et $f_2(x) \sim_a g_2(x)$, on n'a pas forcément $(f_1 + f_2)(x) \sim_a (g_1 + g_2)(x)$. Par exemple on a $\sin x \sim_0 x$ et $\tan x \sim_0 x$, mais on n'a pas $\tan x - \sin x \sim_0 0$! Pour vérifier cela, il suffit de remarquer que la fonction $\tan x - \sin x$ n'est pas nulle près de 0 et d'utiliser le résultat suivant :

Exercice 1.15. : Montrer que, si $f \sim_a 0$ (où 0 désigne la fonction nulle), alors f est nulle près de a.

On ne peut pas non plus composer sans précaution des équivalents. Par exemple, on a $x \sim_{+\infty} x + 1$, mais e^x n'est pas équivalent à e^{x+1} quand x tend vers $+\infty$ puisque $\lim_{+\infty} e^{x+1}/e^x = e \neq 1$!
L'usage d'équivalents près de a permet d'étudier certaines limites en a. Par exemple $x^2((1 + x)^3 - 1) \sim_0 x^2 \times 3x = 3x^3$ et $\sin x(1 - \cos x) \sim_0 x \times x^2/2 = x^3/2$ donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\big((1 + x)^3 - 1\big)}{\sin x(1 - \cos x)} = 6 .$$

Au vu de l'étude des relations d'équivalence vue en MA2, on va faire quelques remarques au sujet de la proposition 1.33. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Désignons par $\mathcal{E}(a)$ l'ensemble des fonctions définies près de a. L'équivalence près de a, notée $\sim_a$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{E}(a)$, d'après la proposition 1.33. Notons par $\mathcal{E}_a$ le quotient de $\mathcal{E}(a)$ par cette relation $\sim_a$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation. On va montrer que l'on peut munir ce quotient d'une multiplication interne (notée $\otimes_a$). Étant donnés F, G, deux éléments de $\mathcal{E}_a$, on choisit un représentant f_1 dans F et un représentant g_1 dans G. Ce sont des fonctions définies près de a. On peut donc les multiplier pour obtenir $f_1 g_1$, une autre fonction définie près de a. Soit $F \otimes_a G$ la classe d'équivalence de $f_1 g_1$.
Choisissons un autre élément f_2 dans F et un autre élément g_2 dans G. Si, d'aventure, $f_2 g_2$ n'était pas équivalent à $f_1 g_1$ (pour l'équivalence près de a), c'est-à-dire si les classes de $f_1 g_1$ et $f_2 g_2$ étaient différentes, on ne saurait pas ce qu'est le $F \otimes_a G$ que l'on a défini (c'est la classe de $f_1 g_1$ ou celle de $f_2 g_2$?). Heureusement, on va vérifier que ceci ne se produit pas, et donc que la définition choisie a bien un sens. Pour cela, il suffit de vérifier que $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$. Or, comme on a pris f_1 et f_2 dans F, on a $f_1 \sim_a f_2$, et, comme on a pris g_1 et g_2 dans G, on a $g_1 \sim_a g_2$. Par le point 2 de la proposition 1.33, on obtient $f_1 g_1 \sim_a f_2 g_2$.
On a donc construit une loi de composition interne $\otimes_a$ sur $\mathcal{E}_a$. Voyons maintenant quelques propriétés supplémentaires de cette loi.
Tout d'abord, on peut vérifier que cette loi est commutative et associative (cela vient de la commutativité et de l'associativité du produit dans $\mathbb{R}$). On note par $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1, définie sur $\mathbb{R}$. Elle est définie près de a. Notons par 1_a sa classe d'équivalence pour $\sim_a$. Montrons que 1_a est l'élément neutre de $\otimes_a$. Soit $F \in \mathcal{E}_a$, on montre que $F \otimes 1_a = F$. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ un élément de F. Par définition, $F \otimes 1_a$ est la classe d'équivalence de la fonction définie près de a : $f\mathbb{1} : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Mais cette fonction, c'est f donc sa classe est F et on a bien $F \otimes 1_a = F$. On peut se demander si tout élément $\mathcal{E}_a$ a un symétrique (inverse) pour cette loi. Ce n'est pas vrai puisque la classe de la fonction nulle n'a pas d'inverse.

Cependant, on peut reprendre la démarche précédente en travaillant avec l'ensemble $\mathcal{I}(a)$ des fonctions $f \in \mathcal{E}(a)$ telle que $1/f \in \mathcal{E}(a)$. On peut restreindre la relation $\sim_a$ à $\mathcal{I}(a)$. C'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{I}(a)$. Notons par $\mathcal{I}_a$ l'ensemble quotient correspondant. Comme précédemment, on peut construire sur $\mathcal{I}_a$ un produit noté $\otimes_a$. C'est une loi de composition interne sur $\mathcal{I}_a$ (noter que le produit usuel de deux fonctions de $\mathcal{I}(a)$ est encore dans $\mathcal{I}(a)$) qui est commutative et associative. Elle admet comme élément neutre la classe d'équivalence de la fonction $\mathbb{1}$. Cette fois, tout élément de $\mathcal{I}_a$ admet un inverse (à vérifier). Donc $(\mathcal{I}_a, \otimes_a)$ est un groupe abélien.

1.3 Continuité sur un intervalle.

Bien que la continuité sur un intervalle soit la “réunion” de propriétés locales (continuité en chaque point de l'intervalle), elle engendre des propriétés globales, à l'échelle de l'intervalle, comme on va le voir dans cette partie.

1.3.1 Bornes et valeurs intermédiaires.

Dans ce paragraphe, on va voir que l'image d'une fonction continue sur un intervalle ne peut pas être n'importe quoi. Ce doit être un intervalle et, dans certains cas, on peut préciser de quel type.

On commence par montrer qu'une fonction continue sur un segment ne peut pas “exploser”. C'est l'objet du

Théorème 1.34. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \le b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le* **segment** *$[a; b]$. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes sur $[a; b]$: l'image $f([a; b])$ est bornée et il existe $(c, d) \in [a; b]^2$ tel que*

$$f(c) \;=\; \sup f \;:=\; \sup f\big([a;b]\big) \qquad et \qquad f(d) \;=\; \inf f \;:=\; \inf f\big([a;b]\big)\,.$$

Démonstration : On va montrer que f est majorée sur $[a; b]$, et atteint sa borne supérieure. L'autre moitié se ferait de la même façon.
Supposons que f ne soit pas majorée sur $[a; b]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n ne majore pas $f([a; b])$. On peut donc trouver un $u_n \in [a; b]$ tel que $f(u_n) > n$. On construit ainsi une suite $(u_n)_n$ d'éléments de $[a, b]$, qui est donc bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass (vu en MA2 et rappelé dans le chapitre 0), on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite convergente $(v_n)_n = (u_{\phi(n)})_n$ (pour une certaine injection croissante ϕ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). Si $\ell = \lim v_n$, alors ℓ est dans $[a, b]$ (par passage à la limite de suite dans les inégalités $a \le v_n \le b$). Par continuité de f, on doit avoir $\lim f(v_n) = f(\ell)$ (cf. théorème 1.19). Mais, comme $f(v_n) = f(u_{\phi(n)}) > \phi(n) \ge n$ (car ϕ est croissante), la suite $(f(v_n))_n$ tend vers $+\infty$. On aboutit donc à une contradiction. L'hypothèse initiale est donc fausse ce qui montre que f est majorée.
Puisque f est majorée sur $[a; b]$, l'image $f([a; b])$ l'est aussi donc admet une borne supérieure

$M \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M - 2^{-n}$ ne majore pas $f([a;b])$ donc on peut choisir $s_n \in [a;b]$ tel que $f(s_n) > M - 2^{-n}$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut, comme précédemment, extraire de la suite (s_n) une suite $(t_n)_n = (s_{\psi(n)})_n$ (où ψ est une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) qui converge vers une limite $c \in [a;b]$. Comme $\psi(n) \geq n$, on a $M - 2^{-\psi(n)} \geq M - 2^{-n}$ donc $f(t_n) = f(s_{\psi(n)}) > M - 2^{-n}$. Comme, d'autre part, $f(t_n) \leq M$ pour tout n (par définition de M), on en déduit, par le théorème des gendarmes pour les suites, que $\lim f(t_n)$ existe et vaut M. Par continuité de f (cf. théorème 1.19), on en conclut que $f(c) = M$. □

Le résultat précédent est faux si l'on remplace le segment $[a;b]$ par un intervalle semi-ouvert ou non borné. Par exemple, la fonction $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ est continue mais n'est pas majorée. Il en est de même de la fonction $g :]0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1/x$.
On va voir maintenant que, pour une fonction continue sur un intervalle, son image "n'a pas de trou". On peut le dire autrement : si une fonction continue sur un intervalle prend les valeurs v_1 et v_2, elle prend aussi toute valeur intermédiaire, c'est-à-dire toute valeur comprise entre v_1 et v_2.

Théorème 1.35 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a \leq b$ et ℓ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = \ell$.*

Démonstration : Notons tout d'abord que l'on suppose implicitement I non vide puisque l'on parle de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On peut donc prendre $(a,b) \in I^2$. On va faire la démonstration dans le cas $f(a) \geq \ell \geq f(b)$ (l'autre cas est similaire). Pour ce faire, on va utiliser un procédé de dichotomie.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : il existe $(a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que

$$a = a_0 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_0 = b,\ b_n - a_n \leq (b-a)\, 2^{-n} \ \text{ et }\ \ell \in [f(b_n); f(a_n)]. \quad (1.3)$$

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $(a_0, \cdots, a_n, b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant (1.3). Si $f((a_n + b_n)/2) \geq \ell$, on pose $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = b_n$. Sinon (c'est-à-dire si $f((a_n + b_n)/2) < \ell$), on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$. Dans les deux cas, on a $f(a_{n+1}) \geq \ell \geq f(b_{n+1})$ et $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. On a donc bien $(a_0, \cdots, a_n, a_{n+1}, b_0, \cdots, b_n, b_{n+1}) \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$ vérifiant (1.3), pour n remplacé par $n+1$. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On a donc l'existence de deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ d'éléments de $[a;b]$ satisfaisant (1.3), pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ces deux suites sont adjacentes car $\lim 2^{-n} = 0$. Elles convergent donc vers une limite commune c. Comme, pour tout n, $a \leq a_n \leq b$, on a, par passage à la limite de suite dans les inégalités, $c \in [a;b]$. Comme f est continue en c, on a, par le théorème 1.19, $\lim f(a_n) = f(c) = \lim f(b_n)$. En passant à la limite de suite dans les inégalités $f(b_n) \leq \ell \leq f(a_n)$, pour tout n, on obtient $\ell = f(c)$. □

Si f est définie et continue sur $[a;b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés, alors le théorème des valeurs intermédiaires dit que l'équation $f(x) = 0$ a une solution c dans $[a;b]$. Le procédé de dichotomie de la démonstration peut servir à la recherche d'une

valeur approchée d'une telle solution c. Comme les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ "ne convergent pas très vite" vers c (voir paragraphe 3.4.3), on utilise cette méthode pour avoir une approximation grossière de la solution puis on rafine l'approximation avec une méthode plus performante (comme la méthode de Newton du paragraphe 3.4.3).
Comme autre application, signalons la

Proposition 1.36. *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a une racine réelle.*

Démonstration : Tout d'abord remarquons que la proposition à démontrer est équivalente à la proposition suivante : (Tout polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair a une racine réelle).
En effet, si la première proposition est vraie, la seconde l'est aussi car un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair est bien sûr un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair. Pour la réciproque, supposons la deuxième proposition vraie et montrons que la première est alors vraie. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2d+1}x^{2d+1}$ une fonction polynôme de degré impair $2d+1$ (donc $a_{2d+1} \neq 0$). On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a_{2d+1}Q(x)$, où $Q(x)$ est le polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair $2d+1$ donné par $Q(x) = (a_0/a_{2d+1}) + (a_1/a_{2d+1})x + \cdots + 1 \cdot x^{2d+1}$. Par le deuxième proposition, Q s'annule en un certain $x_0 \in \mathbb{R}$. Comme $P(x_0) = a_{2d+1}Q(x_0) = 0$, P a bien une racine réelle à savoir x_0, ce qui montre que la première proposition est vraie.
Il nous reste à montrer la deuxième proposition. Soit $d \in \mathbb{N}$ et $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2d}x^{2d} + x^{2d+1}$ un polynôme unitaire de degré impair $2d+1$. En écrivant, pour $|x| \geq 1$,

$$P(x) \ = \ x^{2d+1} \cdot \left(a_0x^{-2d-1} + a_1x^{-2d} + \cdots + a_{2d}x^{-1} + 1\right),$$

en utilisant le fait que $\lim_{x\to+\infty}(1/x) = 0 = \lim_{x\to-\infty}(1/x)$ et en appliquant la proposition 1.23 sur les opérations sur les limites, on trouve que $\lim_{x\to-\infty} P(x)$ existe et vaut $-\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} P(x)$ existe et vaut $+\infty$. Donc il existe $A > 0$ tel que $(x > A \Longrightarrow P(x) > 0)$. On a donc $P(A+1) > 0$. De même, il existe $B > 0$ tel que $(x < -B \Longrightarrow P(x) < 0)$. On a donc $P(-B-1) < 0$. La fonction P est continue sur l'intervalle $[-B-1; A+1]$ et prend des valeurs de signes contraires aux extrémités. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x_0 (dans $[-B-1; A+1]$) tel que $P(x_0) = 0$. □

L'exercice suivant permet de donner explicitement en fonction des coefficents du polynôme P de degré impair un M tel qu'on soit sûr de trouver une racine de P sur $[-M, M]$. On peut alors démarrer une dichotomie comme dans la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires pour approcher une racine de P.

Exercice 1.16. : Soit $d \in \mathbb{N}$ et $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{2d}x^{2d} + x^{2d+1}$. On pose $M = 1 + |a_0| + \cdots + |a_{2n}|$. Montrer que, si $\alpha \in \{-M; M\}$, alors on a

$$\left|\frac{a_0}{\alpha^{2d+1}} + \frac{a_1}{\alpha^{2d}} + \cdots + \frac{a_{2d}}{\alpha}\right| \ < \ 1$$

(on pourra majorer $|a_k|$ par $|\alpha| - 1$, pour tout $k \in [\![0; 2d]\!]$). En déduire que

$$P(\alpha) \ = \ \alpha^{2d+1}\left(\frac{a_0}{\alpha^{2d+1}} + \cdots + \frac{a_{2d}}{\alpha} + 1\right)$$

est du signe de α. Montrer que P a une racine entre $-M$ et M.

Voici une autre application du théorème des valeurs intermédiaires.

Proposition 1.37. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leq b$ *et* $f : [a;b] \longrightarrow [a;b]$ *une fonction continue. Alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = c$.

Démonstration : On considère la fonction g définie sur $[a;b]$ par $g(x) = x - f(x)$. Elle est continue, comme différence de fonctions continues sur $[a;b]$, et on a $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe c dans $[a;b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = c$. □

Le théorème 1.34 sur les bornes et le théorème 1.35 des valeurs intermédiaires peuvent être regroupés en un seul énoncé.

Théorème 1.38. *L'image d'un segment par une fonction continue est un segment. Précisément, si* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a \leq b$ *et* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue, alors* $f([a;b])$ *est le segment* $[m, M]$*, où*

$$M \ = \ \sup f \ := \ \sup f([a;b]) \qquad et \qquad m \ = \ \inf f \ := \ \inf f([a;b]) \, .$$

Démonstration : Le théorème 1.34 nous dit que f est bornée, donc que ses bornes supérieure M et inférieure m existent dans $\mathbb{R}$. On a donc $f([a;b]) \subset [m, M]$. De plus, ce même théorème affirme que m et M sont des valeurs de la fonction soit $m \in f([a;b])$ et $M \in f([a;b])$. Soit $\ell \in [m, M]$. Le théorème 1.35 affirme que, comme ℓ est compris entre deux valeurs de f : m et M, c'est elle-même une valeur. Il existe donc $c \in [a;b]$ tel que $\ell = f(c)$. On a donc $\ell \in f([a;b])$ et $[m, M] \subset f([a;b])$. Conclusion : $[m, M] = f([a;b])$. □

On vient de voir que l'image d'un segment par une fonction continue (sur ce segment) est un segment. Que peut-on dire de l'image par une fonction continue d'un autre type d'intervalle ? C'est un intervalle, comme l'affirme la

Proposition 1.39. *Soit* I *un intervalle* $\mathbb{R}$ *et* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue. Alors* $f(I)$ *est un intervalle.*

Démonstration : Soit M (resp. m) la borne supérieure (resp. inférieure) de $f(I)$, avec la convention $M = +\infty$ (resp. $m = -\infty$) si $f(I)$ est non majoré (resp. non minoré). Soit $\ell \in]m; M[$ (donc ℓ est un réel). Dans tous les cas, ℓ n'est ni un majorant ni un minorant de $f(I)$. Donc, on peut trouver $(a,b) \in I^2$ tels que $f(a) < \ell < f(b)$. Par exemple, $b < a$ (l'autre cas se traite de manière analogue). D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la restriction de f à l'intervalle $[b;a]$, ℓ est dans $f([b;a])$ donc dans $f(I)$. Ainsi $f(I)$ contient $]m, M[$. On a alors quatre cas : $f(I) =]m, M[$ ou $f(I) =]m; M]$ (lorsque $M \in \mathbb{R}$ est une valeur de f et m n'en est pas) ou $f(I) = [m; M[$ ou $f(I) = [m; M]$. □

Par contre, on ne peut en général rien dire de la forme de $f(I)$ (c'est-à-dire que tous les cas possibles se produisent). On utilisera les résultats précédents au paragraphe 2.4, consacré aux fonctions usuelles (vues en MA1).

Exercice 1.17. : Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui à $x \in]0; 1]$ associe $1/x$, à $x \in]1; 2]$ associe x et à $x > 2$ associe 2. Vérifier qu'elle est continue. Déterminer $f(]0; 1])$, $f(]0; 2])$, $f(]4; 5[)$ et $f(]1; 3[)$.

Exercice 1.18. : Déterminer les images par la fonction sinus des trois intervalles ouverts $]0, \pi[$, $]-\pi/2, \pi/2[$ et $]0, 2\pi[$.

Exercice 1.19. : Soit $f : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\ell := \lim_{+\infty} f$ existe dans $\mathbb{R}$ et $f(0) > \ell$. Montrer que f est bornée. Montrer que $\sup f$ est atteint c'est-à-dire qu'il existe $a \in [0; +\infty[$ tel que $f(a) = \sup f$. Vérifier que la fonction $f(x) = 1/(1+x)$ vérifie les hypothèses précédentes et que sa borne inférieure n'est pas atteinte.

1.3.2 Fonctions monotones.

Ce paragraphe est consacré à l'interaction entre continuité et monotonie sur un intervalle. Pour une fonction monotone sur un intervalle, il existe une condition suffisante étonnante pour avoir la continuité de cette fonction.

Proposition 1.40. *Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone sur I. Si $f(I)$ est un intervalle alors f est continue sur I.*

Démonstration : On fait le raisonnement dans le cas où f est croissante sur I (l'autre cas est analogue). Si $f(I)$ est réduit à un point, f est constante donc continue sur I. On se place donc dans le cas où $f(I)$ est un intervalle non réduit à un point. Soit $a \in I$, on montre que f est continue en a. Soit $\epsilon > 0$. Deux cas se présentent.
- Si $f(a)$ est à l'intérieur de l'intervalle $f(I)$ (ce n'est pas une des bornes), on peut trouver $(\ell, m) \in f(I)^2$ tels que $f(a) - \epsilon < \ell < f(a) < m < f(a) + \epsilon$. Il existe $(b, c) \in I^2$ tel que $f(b) = \ell$ et $f(c) = m$. Puisque f est croissante, on a nécessairement $b < a < c$. Posons $\delta = \min(a - b, c - a)$. Pour $x \in I \cap]a - \delta; a + \delta[$, on a $b < x < c$ donc $\ell \leq f(x) \leq m$, d'où $|f(a) - f(x)| < \epsilon$.
- Si $f(a)$ est une borne de $f(I)$, la borne supérieure par exemple, alors on peut trouver $\ell \in f(I)$ et $b \in I$ tels que $\ell = f(b)$ et $f(a) - \epsilon < \ell < f(a)$. Comme f est croissante, $b < a$. Soit $\delta = a - b > 0$. Pour $x \in I \cap]a - \delta; a + \delta[$, on a $x > b$ donc $f(x) \geq f(b) = \ell > f(a) - \epsilon$. Comme $f(a)$ est la borne supérieure de $f(I)$, on a aussi $f(x) \leq f(a)$ donc $|f(a) - f(x)| < \epsilon$.

Dans les deux cas, on a bien montré que f est continue en a. □

L'hypothèse de monotonie est vitale dans cette proposition 1.40, comme le montre l'

Exercice 1.20. : Donnez un exemple de fonction f définie sur $[-1, 1]$, telle que $f([-1, 1]) = [-1, 1]$, mais qui n'est pas continue sur $[-1, 1]$.

On peut même faire plus fort (c'est plus difficile). Considérons la fonction $g : [-1, 1] :\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sin(1/x)$ pour $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et par $g(0) = 0$. Il se trouve que g est continue sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$, mais pas continue en 0. De plus, si I est un intervalle non vide inclu dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que 0 soit accessible par I (alors $0 = \inf I$ ou $0 = \sup I$, d'après la proposition 1.2), alors $g(I) = [-1, 1]$ (voir l'exercice 1.21 ci-dessous). On a donc une fonction dont l'image de n'importe quel intervalle I, par lequel 0 est accessible, est un intervalle sans, pour autant, que cette fonction soit continue sur I.

Exercice 1.21. : On suppose connues les propriétés de la fonction sinus rappelées dans la partie 2.4. Montrer que la fonction g précédente est continue sur $[-1,1]\setminus\{0\}$. Montrer que $\lim_0 g$ n'existe pas (on pourra utiliser le théorème 1.19). Soit $a>0$ et $I=]0;a]$ (0 est accessible par I, par la proposition 1.2). Montrer que $g(I)=[-1,1]$.

Passons maintenant au résultat principal de cette partie.

Théorème 1.41. *Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement monotone. Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$ et la bijection réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ est continue et strictement monotone, de même sens de variation que f.*

Démonstration : On fait le raisonnement dans le cas où f est strictement croissante. Si y appartient à $f(I)$ alors, par définition de $f(I)$, il existe x dans I tel que $f(x)=y$. L'application f est donc surjective de I sur $f(I)$. Si $f(x)=f(x')$ pour $(x,x')\in I^2$ alors $x<x'$ est impossible car, sinon, on aurait $f(x)<f(x')$ par stricte croissance de f, et $x>x'$ est impossible car, sinon, on aurait $f(x)>f(x')$ par stricte croissance de f. Donc $x=x'$ et f est injective. f est donc une bijection de I sur $f(I)$. De plus, comme I est un intervalle et f est continue, $f(I)$ est aussi un intervalle par la proposition 1.39.
Soit $(y,y')\in(f(I))^2$ tel que $y<y'$. Il existe un unique $(x,x')\in I^2$ tel que $f(x)=y$ et $f(x')=y'$. Si $x\geq x'$, on aurait, par la croissance de f, $y=f(x)\geq f(x')=y'$ et une contradiction. Donc $x<x'$ soit $f^{-1}(y)<f^{-1}(y')$. f^{-1} est donc strictement croissante. Comme, par définition, l'image de l'intervalle $f(I)$ par f^{-1} est I, un intervalle, on en déduit, par la proposition 1.40, que f^{-1} est continue. □

Le graphe de la fonction f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la diagonale. Plusieurs applications de ce théorème ont été vues dans le MA1 (voir aussi la partie 2.4).

f	f^{-1}
$\ln x$ sur $]0,+\infty[$	e^x sur $\mathbb{R}$
(pour $\alpha\neq 0$) x^α sur $]0,+\infty[$	$x^{1/\alpha}$ sur $]0,+\infty[$
$\sin x$ sur $[-\pi/2,\pi/2]$	$\arcsin x$ sur $[-1,1]$
...	...

1.3.3 Complément : continuité uniforme.

Dans cette partie, on se propose d'introduire une notion importante, la continuité uniforme, qui est proche de celle de continuité (elles coïncident pour les fonctions définies sur des segments, comme on le verra ci-dessous). L'importance de la continuité uniforme réside dans le fait qu'elle permet de construire une intégrale (un outil pour mesurer des aires), celle de Riemann. On esquissera ici cette construction qui sera vue en DEUG 2.

Avant de définir la continuité uniforme, faisons un petit jeu : chercher l'erreur ? On sait que la fonction $f :]0;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$, qui à $x>0$ associe $1/x$, est continue sur $]0;+\infty[$. Donc, pour chaque $a\in]0;+\infty[$, elle est continue au point a. Ceci veut dire en particulier que, pour $\epsilon = 1$, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]0; +\infty[\cap]a-\delta; a+\delta[$, on ait $|f(x) - f(a)| < 1$. En prenant $x = a + \delta/2 > 0$, on a donc

$$1 \ > \ \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\delta/2}\right| \ = \ \frac{\delta}{a(2a+\delta)} \ . \tag{1.4}$$

Quand a tend vers 0, par valeurs positives, la dernière fraction tend vers $+\infty$ tout en étant majorée par 1 ! ? Où est la faute ?

Dans le raisonnement précédent, on a fait comme si δ ne dépendait pas de a lorsqu'on a affirmé, à l'aide de la proposition 1.23, que la fraction de droite dans (1.4) tend vers $+\infty$, quand a tend vers 0. Ce raisonnement est donc incorrect. Si l'on suppose que δ est indépendant de a alors le raisonnement est correct et comme on aboutit à une contradiction, on en déduit que l'hypothèse est fausse c'est-à-dire que δ dépend de a.

Dire qu'une fonction est uniformément continue signifie essentiellement que "le δ peut être choisi indépendant du a". Le raisonnement précédent montre donc la fonction f n'est pas uniformément continue. Précisément, on a la

Définition 1.42. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'elle est* uniformément continue (sur D) *si*

$$\forall \epsilon > 0\,;\ \exists \delta > 0\ ,\ \forall (x, x') \in D^2\ ,\ \big(|x - x'| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon\big)\ . \tag{1.5}$$

Il se trouve que cette notion est plus forte que la continuité sur D (on exige plus de la fonction que pour avoir la continuité sur D) comme l'établit la

Proposition 1.43. *Si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur D alors elle est continue sur D.*

Démonstration : Soit $a \in D$. On montre que f est continue en a. Pour cela, on montre que la proposition $P(f, f(a))$ (introduite après la définition 1.3) est vraie. On prend $\epsilon > 0$ et on montre que $P(f, f(a), \epsilon)$ est vraie. Pour cet ϵ, (1.5) fournit un $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, x') \in D^2\ ,\ \big(|x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \epsilon\big)\ .$$

Ceci montre que, pour $x \in D \cap]a - \delta; a + \delta[$, on a $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, puisque $|x - a| < \delta$. Donc, pour tout $x \in D$, $P(f, f(a), \epsilon, \delta, x)$ est vraie et aussi $P(f, f(a), \epsilon)$. $\square$

On remarque qu'en fait, la proposition (1.5) implique $P(f, f(a))$, pour tout $a \in D$. La proposition $P(f, f(a), \epsilon)$ fournit un δ vérifiant une certaine propriété. Lorsque l'on peut prendre un même δ pour tous les a de D, donc "prendre une valeur uniforme de δ lorsque a décrit D", alors la fonction est uniformément continue.

Pour les fonctions définies sur un segment, il se trouve que la réciproque de la proposition 1.43 est vraie. C'est le théorème de Heine suivant. Ainsi, pour ces fonctions-là, les notions de continuité et de continuité uniforme sont équivalentes.

Théorème 1.44. (Heine) *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si f est continue alors elle est uniformément continue.*

Démonstration : On procède par l'absurde. On suppose donc que f n'est pas uniformément continue. La négation

$$\exists \epsilon > 0\,;\,\forall \delta > 0\,,\,\exists (x,x') \in [a;b]^2\,;\,\big(|x-x'| < \delta \text{ et } |f(x)-f(x')| \geq \epsilon\big) \tag{1.6}$$

de la proposition (1.5) est donc vraie. Soit $\epsilon_0 > 0$ un tel ϵ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $\delta = 2^{-n}$, (1.6) nous permet de choisir $(u_n, v_n) \in [a;b]^2$ tel que $|u_n - v_n| < \delta$ et $|f(u_n) - f(v_n)| \geq \epsilon_0$. On a ainsi construit deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ d'éléments de $[a;b]$, donc bornées. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de $(u_n)_n$ une sous-suite $(u_{\phi(n)})_n$ convergente (avec $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une injection croissante). Soit c sa limite. On a $c \in [a;b]$, par passage à la limite dans les inégalités $a \leq u_{\phi(n)} \leq b$, pour tout n.
Comme, pour tout n, $\phi(n) \geq n$, on a $0 \leq 2^{-\phi(n)} \leq 2^{-n}$ et $\lim 2^{-\phi(n)} = 0$, par le théorème des gendarmes. Par ce même théorème, on déduit du fait que, pour tout n, $u_{\phi(n)} - 2^{-\phi(n)} < v_{\phi(n)} < u_{\phi(n)} + 2^{-\phi(n)}$, $(v_{\phi(n)})_n$ converge vers c. Comme f est continue au point c, on en déduit que $(f(u_{\phi(n)}) - f(v_{\phi(n)}))_n$ converge vers $f(c) - f(c) = 0$ (cf. théorème 1.19). Comme la fonction valeur absolue est continue, on en déduit (cf. théorème 1.19), que $(|f(u_{\phi(n)}) - f(v_{\phi(n)})|)_n$ converge vers 0 ce qui est contradictoire avec le fait que, pour tout n, $|f(u_{\phi(n)}) - f(v_{\phi(n)})| \geq \epsilon_0 > 0$. □

Voyons maintenant une esquisse de la construction de l'intégrale de Riemann. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, on se propose de construire une intégrale (ou mesure d'aire algébrique) pour des fonctions définies sur $[a;b]$. L'idée est de construire une intégrale pour des fonctions simples (des fonctions "constantes par morceaux") puis de montrer que l'on peut "approcher uniformément" des fonctions plus générales par ces fonctions simples et, enfin, de définir l'intégrale de la fonction générale comme la limite des intégrales des fonctions simples approchantes.

Pour préciser nos fonctions simples, on introduit la

Définition 1.45. *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on appelle* subdivision de longueur n *de l'intervalle $[a;b]$, toute famille $(c_i)_{i\in[0;n]}$ de $n+1$ éléments de $[a;b]$ tels que $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{n-1} < c_n = b$.*
On dit qu'une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier *s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une subdivision $(c_i)_{i\in[0;n]}$ de longueur n de $[a;b]$ telle que, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, la restriction de f à $]c_i; c_{i+1}[$ soit une constante (notée f_i).*
On dit qu'une subdivision $(c_i)_{i\in[0;n]}$ de longueur n de $[a;b]$ est adaptée à *une fonction en escalier $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si, pour tout $i \in [\![0; n-1]\!]$, la restriction de f à $]c_i; c_{i+1}[$ est une constante.*

Pour toute fonction en escalier $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et toute subdivision $(c_i)_{i\in[0;n]}$ adaptée à f, on pose, en utilisant les notations de la définition 1.45,

$$I\big(f, (c_i)_{i\in[0;n]}\big) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} f_i\,(c_{i+1} - c_i)\,. \tag{1.7}$$

C'est l'aire (algébrique) sous la courbe de f. Pour pouvoir prendre cette expression comme définition de l'intégrale de f, il faut s'assurer que si $(c'_i)_{i\in[0;n']}$ est une autre subdivision, de longueur n' de $[a;b]$, adaptée à f alors on a $I(f,(c_i)_i) = I(f,(c'_i)_i)$. Il se trouve que c'est le cas (on l'admet). On prend donc le nombre réel (1.7) comme définition de l'intégrale sur $[a;b]$ de la fonction en escalier f. On l'a note $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$ pour insister sur le fait que x est la variable de f. On a les propriétés suivantes :

Proposition 1.46. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$. *Soit* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions en escalier.*

1. *Pour tout* $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, *la fonction* $\alpha f + \beta g$ *est en escalier et on a* $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha(\int_a^b f) + \beta(\int_a^b g)$.
2. *Si* f *est positive :* $\forall x \in [a;b], f(x) \geq 0$ *alors* $\int_a^b f$ *est positif. Si, de plus, il existe* J, *un sous-intervalle de* $[a;b]$, *non réduit à un point, tel que, pour tout* $x \in J$, $f(x) > 0$, *alors* $\int_a^b f$ *est strictement positif.*
3. *Pour tout* $c \in]a;b[$, *on a la "relation de Chasles"*
$$\int_a^b f \ = \ \int_a^c f_{|[a;c]} + \int_c^b f_{|[c;b]} \, .$$
4. *Majoration par l'aire d'un rectangle :*
$$\left| \int_a^b f \right| \ \leq \ \int_a^b |f| \ \leq \ (b-a) \sup_{x \in [a;b]} |f(x)| \, .$$

Démonstration : Admise. □

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, soit $h : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. On pose

$$\begin{aligned} I_+(h) \ &:= \ \inf \left\{ \int_a^b f; f \text{ en escalier } f \geq h \right\} \, , \\ I_-(h) \ &:= \ \sup \left\{ \int_a^b f; f \text{ en escalier } f \leq h \right\} \, , \end{aligned}$$

respectivement intégrale supérieure et intégrale inférieure de h. Précisons que $f \geq h$ signifie : pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \geq h(x)$. Comme h est majorée et minorée on a

$$(\inf h)\, \mathbb{1}_{[a;b]} \ \leq \ h \leq (\sup h)\, \mathbb{1}_{[a;b]} \, ,$$

où $\mathbb{1}_{[a;b]}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $[a;b]$. Donc les ensembles définissant $I_+(h)$ et $I_-(h)$ sont non vides, ce qui assure l'existence de $I_+(h)$ et $I_-(h)$. De plus, par la proposition 1.46, on a $I_+(h) \geq I_-(h)$.

Définition 1.47. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$. *On dit qu'une fonction bornée* $h : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est* (Riemann) intégrable *sur* $[a;b]$ *si* $I_+(h) = I_-(h)$. *Dans ce cas, la valeur commune est* l'intégrale *de* h *sur* $[a;b]$, *notée* $\int_a^b h$.

"En passant à la limite", cette intégrale hérite des propriétés de la proposition 1.46.

Proposition 1.48. *Les résultats de la proposition 1.46 sont valables pour toutes fonctions intégrables f et g.*

Démonstration : Admise. □

Grâce au théorème 1.44 et au théorème 1.34, on a la

Proposition 1.49. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Toute fonction continue sur $[a; b]$ est (Riemann) intégrable sur $[a; b]$.*

Démonstration : Admise. □

Il est souvent utile de définir l'intégrale d'une fonction sur un singleton. Si $d \in \mathbb{R}$, on décide que toute fonction définie sur $\{d\}$ est (Riemann) intégrable et que son intégrale est nulle. On peut vérifier qu'avec cette convention la proposition 1.48 est encore valable pour $a = b$. Pour $a \leq b$, on peut aussi prendre $c = a$ ou $c = b$ dans la propriété 3 de cette proposition 1.48. De plus, pour $a \leq b$ et pour une fonction intégrable h sur $[a; b]$, on peut définir son intégrale de b à a, notée $\int_b^a h$, par $-\int_a^b h$. On constate qu'alors la propriété 3 de la proposition 1.48 est valable lorsque $c \notin [a; b]$.

Pour terminer ce complément, considérons un exemple intéressant. On a vu que la fonction $0 < t \mapsto 1/t$ est continue. Donc elle est intégrable sur tout intervalle $[a; b]$ avec $0 < a < b$. Pour $x > 0$, le nombre réel $\int_1^x (1/t)dt$ est bien défini, comme précédemment si $x > 1$, par 0 si $x = 1$ et par $-\int_x^1 (1/t)dt$ si $x < 1$. Soit $L :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x > 0$, associe $\int_1^x (1/t)dt$. Cette fonction est par définition la fonction logarithme népérien. Grâce à la proposition 1.48, on peut facilement montrer que cette fonction est continue. Soit $a > 0$, montrons que L est continue en a. Pour $x > 0$, on a

$$L(x) - L(a) = \int_1^x (1/t)\, dt - \int_1^a (1/t)\, dt = \int_a^x (1/t)\, dt\,. \tag{1.8}$$

Pour $x \geq a$, on a $|L(x) - L(a)| \leq (x - a)(1/a)$. Donc, par le théorème des gendarmes, la limite à droite de L en a existe et vaut $L(a)$. Pour $x \in]a/2; a]$, on a $|L(x) - L(a)| \leq (a - x)(1/x) \leq (a - x)(2/a)$. Par le théorème des gendarmes, la limite à gauche de L en a existe et vaut $L(a)$. On a montré que L est continue en a. Notons, de plus, que (1.8) montre que L est strictement croissante (d'après le 2. de la proposition 1.46 qui est applicable d'après la proposition 1.48). Montrons maintenant que L est dérivable en a. Pour $x > 0$ et $x \neq a$,

$$\begin{aligned}\frac{L(x) - L(a)}{x - a} - \frac{1}{a} &= \frac{1}{x - a}\int_a^x (1/t)\, dt - \frac{1}{x - a}\int_a^x (1/a)\, dt \\ &= \frac{1}{x - a}\int_a^x \big(1/t - 1/a\big)\, dt\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme $0 < t \mapsto 1/t$ est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $y > 0$ vérifiant $|y - a| < \delta$, on ait $|1/y - 1/a| < \epsilon$. Soit $x > a$ tel que $0 < x - a < \delta$. Pour tout $t \in [a; x]$, on a $0 < t - a < \delta$. Donc, par (1.9),

$$\left|\frac{L(x) - L(a)}{x - a} - \frac{1}{a}\right| \leq \frac{1}{x - a}\int_a^x \big|1/t - 1/a\big|\, dt \leq \epsilon\,.$$

On a montré que $1/a$ est la dérivée à droite de L. De même, on montre que $1/a$ est la dérivée à gauche de L. La fonction L est donc dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est la fonction $0 < t \mapsto 1/t$. On poursuivra l'étude de L dans la partie 2.4. On verra en particulier qu'elle est strictement croissante et qu'il existe un unique réel $e \in]1; +\infty[$ tel que $L(e) = 1$. Grâce à la proposition 1.48, on peut facilement montrer que $e \in]1,5; 4[$. En effet, comme la fonction $[1; 1,5] \ni t \mapsto 1 - (1/t)$ est positive, la proposition 1.48 montre que

$$0 \leq \int_1^{1,5} \big(1 - (1/t)\big)\, dt = 0,5 - L(1,5)$$

soit $L(1,5) < 1$ ce qui donne $1,5 < e$. En utilisant la fonction $g : [1; 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = (1/t) - (1/2)$ si $t \leq 2$ et par $g(t) = (1/t) - (1/4)$ si $t > 2$, on montre de même que $L(4) > 1$ ce qui donne $4 > e$. En utilisant le fait que $0 < t \mapsto 1/t$ est convexe (cf. paragraphe 3.3.1) et donc qu'elle est au-dessus de ces tangentes (cf. proposition 3.17), on peut améliorer cet encadrement comme le montre l'

Exercice 1.22. : L'objet de cet exercice est d'obtenir l'encadrement $e \in]2; 3[$.

1. En utilisant le fait que, sur $[1; 2]$, $\phi : 0 < t \mapsto 1/t$ est au-dessous de la corde liant $(1, \phi(1))$ et $(2, \phi(2))$, montrer que $L(2) < 1$.
2. En utilisant le fait que, sur $[1; 3]$, $\phi : 0 < t \mapsto 1/t$ est au-dessus de sa tangente en $(2, \phi(2))$, montrer que $L(3) > 1$.
3. En déduire que $e \in]2; 3[$.

Chapitre 2

Fonctions dérivables.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Parmi toutes les droites passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, y en a-t-il une “plus proche” du graphe de f que les autres ? Après avoir donné un sens précis à cette phrase, on peut vérifier qu'une telle solution est unique, si elle existe, et qu'elle existe si et seulement si la fonction f est dérivable en x_0 (au sens donné ci-dessous). Dans ce cas, la droite solution du problème est appelée la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Pour les fonctions dérivables, on va introduire la fonction dérivée, qui, à chaque x_0, associe la pente de la tangente au graphe en x_0. L'intérêt principal de cette fonction est que son signe détermine les variations de f, chose bien connue au lycée mais rarement démontrée. On va voir ici que cette propriété découle du théorème des accroissements finis (dont on donne une preuve). On s'intéressera ensuite aux fonctions dérivables dont la dérivée est encore dérivable c'est-à-dire aux fonctions deux fois dérivables et même aux fonctions n fois dérivables, pour $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Dérivées.

Dans cette partie, on introduit les notions de dérivabilité et de fonction dérivée. Cela nous permet de démontrer une version simplifiée de la règle de l'Hospital, un outil utilisé dans l'UE1 pour étudier des limites présentant des formes indéterminées du type “0/0”. Comme la continuité, on vérifie que la dérivabilité est préservée par certaines opérations élémentaires sur les fonctions.

2.1.1 Fonction dérivable en un point.

Afin d'exprimer de façons différentes la définition de la dérivabilité, on établit d'abord la

Proposition 2.1. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ accessible par $D \setminus \{x_0\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\displaystyle\lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *existe et vaut* ℓ.
2. $\displaystyle\lim_{h\to 0, x\neq 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *existe et vaut* ℓ.
3. *Il existe* $\delta > 0$ *et une fonction* $\varphi :]-\delta;\delta[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tendant vers* 0 *en* 0 *telle que, pour tout* $h \in]-\delta;\delta[$ *vérifiant* $x_0 + h \in D$*, on ait*

$$f(x_0+h) \;=\; f(x_0) \,+\, h\ell \,+\, h\varphi(h)\,.$$

Démonstration : L'équivalence $1 \Longleftrightarrow 2$ est une conséquence directe du corollaire 1.27. Maintenant, si 3 est vraie, montrons 2. On a, pour $h \in]-\delta;\delta[\setminus\{0\}$ tel que $x_0 + h \in D$,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \ell + \varphi(h)\,. \tag{2.1}$$

En passant à la limite quand $x \to x_0$, on obtient 2, par somme (cf. proposition 1.23). Réciproquement, si 2 est vraie, montrons 3. Soit $\varphi :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $h \in]-1;1[$, associe 0, si $x_0 + h \notin D$, et associe le $\varphi(h)$ donné par (2.1), si $x_0 + h \in D$. D'après 2, φ tend vers 0 en 0, par somme (cf. proposition 1.23). Par définition de $\varphi(h)$ lorsque $x_0 + h \in D$, l'égalité dans 3 est satisfaite donc 3 est vraie. On a montré $3 \Longleftrightarrow 2$. □

Définition 2.2. *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in D$ *accessible par* $D \setminus \{x_0\}$*. On dit que* f *est* dérivable en x_0 *s'il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que l'une des propriétés de la proposition 2.1 est vraie. Dans ce cas, le réel* ℓ *est appelé le* nombre dérivé de f en x_0*, noté* $f'(x_0)$*, et la droite d'équation* $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *est appelée la* tangente à f en x_0.

Remarque 2.3. *Dans le cadre de la définition 2.2, si* f *est dérivable en* x_0 *alors* toutes les *propriétés de la proposition 2.1 sont vraies (d'après cette proposition 2.1).*

Une fonction dérivable en un point ne peut pas se permettre de "faire un saut" en ce point, commme le montre la

Proposition 2.4. *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in D$ *accessible par* $D \setminus \{x_0\}$*. Si* f *est dérivable en* x_0 *alors* f *est continue en* x_0.

Démonstration : En appliquant le résultat sur les limites de sommes et de produits (cf. proposition 1.23) à la propriété 3 de la proposition 2.1, on obtient le résultat. □

Par contre, UNE FONCTION CONTINUE (en x_0) N'EST PAS OBLIGATOIREMENT DÉRIVABLE (en x_0) : ainsi $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'y est pas dérivable. Comme $(|x| - 0)/x = 1$, pour $x > 0$, et comme $(|x| - 0)/x = -1$, pour $x < 0$, on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{|x|-0}{x} \;=\; 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{|x|-0}{x} \;=\; -1\,.$$

Le rapport $(|x| - 0)/x$ n'a donc pas de limite en 0, ce qui montre bien que la fonction n'est pas dérivable en 0.

Définition 2.5. *Dans le cadre de la définition 2.2, si x_0 est accessible par $D\cap]x_0;+\infty[$ (resp. $D\cap]-\infty;x_0[$) et si l'on remplace les limites par des limites à droite (resp. à gauche), alors on définit la notion de dérivabilité à droite (resp. à gauche) en x_0 et la notion de nombre dérivé à droite (resp. à gauche) en x_0.*

En particulier, le raisonnement précédent montre que la fonction $x \mapsto |x|$ admet 1 pour nombre dérivé à droite en 0 et -1 pour nombre dérivé à gauche en 0.

Exercice 2.1. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ pour $x \geq 0$ et $f(x) = x^3 + x$ pour $x \leq 0$. Étudier ses dérivées à gauche et à droite en 0 ? Est-elle est dérivable en 0 ?

Exercice 2.2. : Montrer que les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$, définies sur $\mathbb{R}$, sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les dérivées ?

Exercice 2.3. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. En utilisant l'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ et la définition du nombre dérivé, montrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Voyons maintenant la règle de l'Hospital. On considère ici une version simplifiée. La version complète est proposée dans le paragraphe 2.2.3 (cf. proposition 2.20).

Proposition 2.6. *Soit I un intervalle, qui n'est pas réduit à un point, $a \in I$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et dérivables en a, telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. On suppose, de plus, que g ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$. Alors $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)/g(x)$ existe et vaut $f'(a)/g'(a)$.*

Démonstration : Par hypothèse, il existe des fonctions φ_1 et φ_2, définies près de 0 et tendant vers 0 en 0, telles que, pour $x \in I$, $f(x) = (x-a)f'(a) + (x-a)\varphi_1(x-a)$ et $g(x) = (x-a)g'(a) + (x-a)\varphi_2(x-a)$. Donc, pour $x \neq a$, on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-a)f'(a) + (x-a)\varphi_1(x-a)}{(x-a)g'(a) + (x-a)\varphi_2(x-a)} = \frac{f'(a) + \varphi_1(x-a)}{g'(a) + \varphi_2(x-a)},$$

après simplification par $x - a$. D'après les opérations sur les limites (cf. proposition 1.23) et le fait que $g'(a) \neq 0$, on déduit que $f(x)/g(x)$ a $f'(a)/g'(a)$ pour limite. □

Exercice 2.4. : Étudier

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ x\neq\pi}} \frac{1+\cos x}{x-\pi}, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{x^2 \sin 1/x}{\sin x}.$$

Le défaut principal de cette version de la règle de l'Hospital réside dans l'hypothèse $g'(a) \neq 0$ puisque cela empêche de traiter l'étude de

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

La version complète (cf. proposition 2.20) permettra de le faire.

Pour terminer ce paragraphe, faisons un complément (hors programme de l'examen) pour traiter le problème évoqué dans l'introduction du chapitre 2 (on va utiliser les notions de la partie 1.2).
Étant donnés I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée, on cherche une droite, d'équation $y = g(x)$, passant par le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, telle que, près de x_0, $f - g$ est négligeable devant l'écart typique entre deux telles droites, cet écart étant une constante fois $|x - x_0|$? Autrement dit, peut-on trouver une équation de droite g telle que $f - g = o(|x - x_0|)$, au voisinage de x_0 ?
Si g_1 et g_2 conviennent alors il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $c|x - x_0| = |g_1(x) - g_2(x)| \leq |g_1(x) - f(x)| + |f(x) - g_2(x)|$. Donc, près de x_0, $c|x - x_0| \leq |x - x_0|(\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x))$, où ϵ_1 et ϵ_2 tendent vers 0 en x_0. Pour $x \neq 0$, on peut simplifier par $|x - x_0|$ puis passer à la limite dans l'inégalité pour obtenir $c = 0$. On a donc montrer que $g_1 = g_2$ c'est-à-dire que, si la solution existe, elle est unique.
Voyons maintenant qu'il y a une solution si f est dérivable en x_0. Dans ce cas, prenons $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (ce qu'on a appelé la tangente à f en x_0). Pour $x \neq x_0$, on peut écrire $f(x) - g(x) = (x - x_0)\epsilon(x)$ où la fonction $\epsilon(x)$ tend vers 0 en x_0, puisque f est dérivable en x_0. La fonction g résoud donc le problème.
Maintenant, supposons qu'on ait une solution qu'on peut écrire $g(x) = a + b(x - x_0)$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Comme $g(x_0) = f(x_0)$, on a forcément $a = f(x_0)$. Comme on a $f(x) - g(x) = o(x - x_0)$, au voisinage de x_0, on en déduit, par définition de la dérivabilité (cf. définition 2.2), que f est dérivable en x_0 de nombre dérivé b.
On a justifié toutes les affirmations avancées dans l'introduction du chapitre 2. Voyons maintenant un exemple où le problème n'a pas de solution. Soit $f(x) = |x - x_0|^{1/2}$, pour $x \in \mathbb{R}$. Si une fonction $g(x) = f(x_0) + b(x - x_0)$ convenait, on aurait, près de x_0, $f(x) - g(x) = |x - x_0|\epsilon(x)$ avec $\lim_{x_0} \epsilon = 0$. Pour $x > x_0$, on aurait, en divisant par $|x - x_0|^{1/2}$, $1 - b|x - x_0|^{1/2} = |x - x_0|^{1/2}\epsilon(x)$ et, en passant à la limite quand $x \to x_0^+$, on obtient $1 = 0$, contradiction. Le problème ne peut donc avoir de solution. Ce n'est pas étonnant car la fonction n'est pas dérivable en x_0 puisque

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{|x - x_0|^{1/2} - 0}{x - x_0}$$

n'existe pas.

2.1.2 Fonction dérivée, dérivées successives.

En tout point où une fonction est dérivable, on peut associer à ce point le nombre dérivée en ce point. On construit ainsi une nouvelle fonction, la fonction dérivée.

Définition 2.7. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $E \subset D$. On dit que f est dérivable sur E si E est non vide, si tout élément $x_0 \in E$ est accessible par $D \setminus \{x_0\}$ et si f est dérivable en tout point x_0 de E. Si f est dérivable sur D, on dit simplement qu'elle est dérivable.*
Soit D_1 l'ensemble des $x_0 \in D$, accessibles par $D \setminus \{x_0\}$, tels que f soit dérivable en x_0.

Lorsque D_1 est non vide, on l'appelle le domaine de dérivabilité de f puisque c'est le plus grand ensemble sur lequel f est dérivable.
Lorsque D_1 est non vide, la fonction, notée f', de D_1 dans $\mathbb{R}$, qui, à $x \in D_1$, associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f au point x, est appelée (fonction) dérivée de f.
Si $D_1 \neq \emptyset$ et $E \subset D_1$, la fonction, définie sur E, qui à $x \in E$ associe $f'(x)$ est appelée (fonction) dérivée de f sur E. C'est donc la restriction de f' à E.

Dans le cadre de cette définition 2.7, on a tendance, par abus de langage, à confondre f' avec ses restrictions à des parties strictement incluses dans D_1. C'est le cas, par exemple, si l'on dit que la fonction $g :]0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $g(x) = 1$ pour tout $x \in]0; 1]$, est la dérivée de la fonction $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in [0; 1]$. En effet, cette dernière est dérivable en 0 puisque

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{x - 0}{x} = 1 ,$$

donc g ne peut être sa dérivée car elle n'est pas définie en 0. En revanche, g est la restriction à $]0; 1]$ de la dérivée de f (À vérifier). Cette tendance est particulièrement forte lorsque l'on sait montrer que f est dérivable sur un certain $D_2 \subset D$ mais que l'on ne sait pas déterminer D_1.
Concernant la dérivée d'une fonction f, on utilise aussi une autre notation, dite de Leibniz : $\frac{df}{dx}$ ou $\frac{d}{dx}(f)$ pour f' (où x est le nom de la variable). Par exemple, on écrit

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3 + x^2 + 1}\right) = \frac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2 + 1}} .$$

Lorsque la dérivée $f' : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ d'une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ (donc $D_1 \subset D$) a elle-même un domaine de dérivabilité $D_2 \subset D_1$, sa dérivée est appelée la dérivée seconde de f, notée f''. Si maintenant, cette fonction f'' a encore un domaine de dérivabilité $D_3 \subset D_2$, on note par f''' ou $f^{(3)}$ sa dérivée, qui est la dérivée troisième de f. Plus généralement, on va définir le fait d'être n fois dérivable quelque part et la dérivée $n$ième (pour $n \in \mathbb{N}$).

Définition 2.8. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $E \subset D$. On dit que f est n fois dérivable sur E si,*

1. *lorsque $n = 1$, f est dérivable sur E*
2. *et, lorsque $n > 1$, f est dérivable sur E et f' est $(n - 1)$ fois dérivable sur E.*

Si f est n fois dérivable sur D, on dit simplement qu'elle est n fois dérivable.

Vérifions que cette définition a bien un sens. Pour $p \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(p)$ la proposition ("une fonction est n fois dérivable sur E" est bien définie). D'après le point 1 de la définition 2.8, $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons que, pour un $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(p)$ soit vraie. Alors, dire que f est $(p+1)$ fois dérivable sur E signifie, d'après le 2 de la définition 2.8, que f est dérivable sur E et que sa dérivée sur E est p fois dérivable sur E, ce qui est bien défini par hypothèse de récurrence. La phrase "f est $(p+1)$ fois dérivable sur E" est bien définie donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. Dans cette situation,

on dit que la phrase “f est n fois dérivable sur E” a été définie par récurrence.
De manière analogue, on veut définir la dérivée n-ième d'une fonction. Comme pour la dérivée première, on est obligé de choisir précisément son domaine de définition pour pouvoir parler de “la” dérivée n-ième.

Définition 2.9. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La dérivée n-ième de f est définie,*

1. *pour $n = 1$ et lorsque son domaine de dérivabilité est non vide, par la dérivée de f*
2. *et, pour $n > 1$ et lorsque la dérivée $(n-1)$-ième de f est bien définie et admet un domaine de dérivabilité non vide, par la dérivée de la dérivée $(n-1)$-ième de f.*

Dans ce cas, on note par $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f. En notation dite de Leibniz, on écrit $f^{(n)} = \dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Vérifions encore par récurrence que cette définition a un sens. Pour $n = 1$, c'est le cas. Supposons que, pour un $p \in \mathbb{N}$, la dérivée p-ième soit bien définie. Soit maintenant $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que f soit $(p+1)$ fois dérivable sur un sous-ensemble non vide E de D. Par hypothèse de récurrence, la dérivée p-ième de f est bien définie. De plus, elle est dérivable sur E. D'après le 2 de la définition 2.9, la dérivée $(p+1)$-ième de f est bien définie puisque c'est la dérivée de la dérivée p-ième de f. Par le théorème de récurrence, la dérivée p-ième de f est bien définie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.5. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3f(x)$. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, f est p fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la dérivée p-ième de f en fonction de f.

2.1.3 Dérivation et opérations sur les fonctions.

Étant donné que la dérivabilité se traduit en terme de limites et que l'on dispose de propriétés sur les opérations sur les limites (cf. Section 1.1.6), on s'attend à avoir des propriétés similaires sur la dérivabilité. C'est l'objet de la

Proposition 2.10. *Soit $f : D_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur D (donc $D \subset D_1 \cap D_2$).*

1. *Les fonctions $f+g$, λf, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, fg sont dérivables sur D, de dérivées respectives $f' + g'$, $\lambda(f')$ et $f'g + fg'$.*
2. *Si, de plus, f ne s'annule pas sur D, alors $1/f$ est définie et dérivable sur D de dérivée $-f'/f^2$.*

Démonstration : C'est une conséquence de la propostion 1.23. Par exemple, détaillons les cas du produit et du passage à l'inverse.
Soit $a \in D$. D'après l'hypothèse sur f et g, il existe des fonctions φ_1 et φ_2, définies près de 0 et tendant vers 0 en 0, telles que, pour $h \neq 0$ tel que $a + h \in D$, $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi_1(h)$ et $g(a+h) = g(a) + hg'(a) + h\varphi_2(h)$. Donc

$$f(a+h)g(a+h) = \big(f(a) + hf'(a) + h\varphi_1(h)\big) \cdot \big(g(a) + hg'(a) + h\varphi_2(h)\big) .$$

En développant, on obtient

$$f(a+h)g(a+h) \ = \ f(a)g(a) \ + \ h\big(f'(a)g(a) \ + \ f(a)g'(a)\big) \ + \ h\varphi(h) \,,$$

où la fonction $\varphi(h) := f(a)\cdot\varphi_2(h)+hf'(a)(g'(a))+\varphi_2(h))+\varphi_1(h)\cdot(g(a)+hg'(a)+h\varphi_2(h))$ tend vers 0 en 0, d'après les opérations sur les limites (cf. propostion 1.23). Par définition de la dérivabilité (cf. définition 2.2), fg est dérivable en a et on a $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
Passons à l'inversion. On a, pour $x \in D \setminus \{a\}$,

$$\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)} \ = \ \frac{f(a)-f(x)}{f(x)f(a)} \ = \ -(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{f(x)f(a)} \,.$$

Comme f est dérivable en a, elle y est continue et, d'après les opérations sur les limites (cf. propostion 1.23), $1/(f(x)f(a))$ tend vers $1/f(a)^2$ quand x tend vers a. D'autre part, $(f(x)-f(a))/(x-a)$ tend vers $f'(a)$ quand x tend vers a et $x \neq a$. On en déduit que $[1/f(x) - 1/f(a)]/(x-a)$ tend vers $-f'(a)\cdot 1/f(a)^2$, quand x tend vers a et $x \neq a$. $1/f$ est donc dérivable en a et $(1/f)'(a) = -f'(a)/f^2(a)$. □

Comme conséquence immédiate de cette proposition 2.10, on a les propriétés suivantes (que l'on pourra utiliser sans démonstration) : si f et g sont dérivables sur D et si g ne s'y annule pas, alors f/g est définie et dérivable sur D et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f^n est dérivable sur D. De plus, on a

$$(f/g)' \ = \ (f'g - fg')/g^2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \,, \, (f^n)' \ = \ nf^{n-1}f' \,.$$

Exercice 2.6. : Vérifier ces propriétés.

Corollaire 2.11. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions polynômes sont n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et les dérivées successives sont encore des polynômes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fractions rationnelles sont n fois dérivables sur leur domaine de définition et les dérivées successives sont encore des fractions rationnelles de même domaine de définition.*
De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $(k,p) \in \mathbb{N}^2$, la dérivée p-ième de $t \mapsto (t-a)^k$ au point x est donnée, si $p > k$, par 0 et, si $p \leq k$, par

$$k(k-1)\cdots(k-p+1)\cdot(x-a)^{k-p} \ = \ \frac{k!}{(k-p)!}\cdot(x-a)^{k-p} \,.$$

Démonstration : On traite seulement le cas des polynômes (le cas des fractions rationnelles est similaire grâce au 2 de la proposition 2.10). On montre d'abord le résultat pour $n = 1$. Par l'exercice 2.2, on sait que $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivées respectives la fonction nulle et f_0, qui sont bien des fonctions polynômes. Comme pour la continuité des polynômes (cf. la preuve du corollaire 1.26), on montre que les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que leur dérivées sont encore des fonctions polynômes.
Supposons maintenant qu'on ait démontré, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, que les fonctions polynômes soit n fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et que les dérivées successives jusqu'à l'ordre n sont des fonctions polynômes. Soit f une telle fonction polynôme. On a vu qu'elle est dérivable sur

$\mathbb{R}$ et que sa dérivée f' est une fonction polynôme. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à f'. Donc f est $(n+1)$ fois dérivable et sa dérivée $(n+1)$-ième est une fonction polynôme puisque c'est la dérivée n-ième de la fonction polynôme f'.
Le calcul des dérivées du monôme $(t-a)^k$ est laissé en exercice (cf. Exercice 2.7). $\square$

Exercice 2.7. : Pour $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$ fixés, montrer par récurrence sur $p \in [\![0;k]\!]$ la formule du corollaire 2.11 et terminer la preuve de ce corollaire.

Une autre opération importante est la composition. Là encore, les opérations sur les limites (cf. proposition 1.23) nous permet d'établir la

Proposition 2.12. *Soit $f : D_1 \longrightarrow D_2$, dérivable en $a \in D_1$, et $g : D_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$. Alors la composée $g \circ f$ est dérivable en a et on a*

$$\big(g \circ f\big)'(a) \;=\; g'\big(f(a)\big) \,\cdot\, f'(a)\,.$$

Démonstration : D'après l'hypothèse sur f et g, il existe des fonctions φ_1 et φ_2, définies près de 0 et tendant vers 0 en 0, telles que, pour $x \in D_1$ et $y \in D_2$, $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)\varphi_1(x-a)$ et $g(y) = g(f(a)) + (y - f(a))g'(f(a)) + (y-f(a))\varphi_2(y-f(a))$. Pour $x \neq a$, on a

$$\frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a} \;=\; \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \Big(g'\big(f(a)\big) \;+\; \varphi_2\big(f(x)-f(a)\big)\Big)\,.$$

Comme f est dérivable en a, elle y est continue et $\lim_a f = f(a)$. Par composition (cf. proposition 1.23), $\varphi_2(f(x) - f(a))$ tend vers 0, quand $x \to a$. Par produit (cf. proposition 1.23) et en réutilisant la dérivabilité de f en a, on en déduit que

$$\lim_{x\to a, x\neq a} \frac{g\big(f(x)\big) - g\big(f(a)\big)}{x-a} \;=\; g'\big(f(a)\big) \,\cdot\, f'(a)\,. \;\square$$

En notation dite de Leibniz, ceci s'écrit agréablement : si g est fonction de f et f est fonction de x, alors

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}\,\frac{df}{dx}.$$

Mais il faut bien réaliser ce que ceci veut dire. Par exemple, supposons que l'on ait à calculer la dérivée de $y = \ln(2 + \cos\sqrt{1+x^2})$. On peut décomposer notre fonction compliquée et poser $w = 1 + x^2$, $v = \sqrt{w}$, $u = 2 + \cos v$, $y = \ln u$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dw}\,\frac{dw}{dx} = \frac{1}{u} \times (-\sin v) \times \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{w}} \times \cancel{2}x \\ &= \frac{-x \sin\sqrt{1+x^2}}{(2+\cos\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

L'application de ces règles de calcul est entièrement mécanique et elle est effectivement mécanisée dans les logiciels de calcul formel.

La dérivabilité des fonctions réciproques s'étudie au moyen de la

Proposition 2.13. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et dérivable sur I. Alors f a une fonction réciproque $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ (cf. théorème 1.41). Si, pour $x_0 \in I$, $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 := f(x_0)$ et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Démonstration : Comme f est dérivable sur I, elle y est continue. On peut donc appliquer le théorème 1.41 qui prouve l'existence et la continuité de f^{-1}. Étudions la dérivabilité de f^{-1} en y_0. On a, pour $y \in f(I) \setminus \{y_0\}$,

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \left(\frac{f\big(f^{-1}(y)\big) - f\big(f^{-1}(y_0)\big)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \right)^{-1} .$$

Comme f^{-1} est continue, on a $\lim_{y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$. Comme f est dérivable en x_0, on a, par composition (cf. proposition 1.23),

$$\lim_{y \to y_0,\ y \neq y_0} \frac{f\big(f^{-1}(y)\big) - f\big(f^{-1}(y_0)\big)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = f'(x_0) .$$

Mais $f'(x_0) \neq 0$, donc par inversion (cf. proposition 1.23),

$$\lim_{y \to y_0,\ y \neq y_0} \left(\frac{f\big(f^{-1}(y)\big) - f\big(f^{-1}(y_0)\big)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)} . \ \square$$

Notons que, dans cette preuve, aucun dénominateur ne peut s'annuler car, par injectivité de f^{-1}, le fait que $y \neq y_0$ implique que $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$.
Du point de vue graphique, on sait que le graphe de f^{-1} est le symétrique de celui de f par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$). Que peut-on dire des tangentes (quand elles existent) ? Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du graphe de f. L'équation de la tangente T en M_0 est $y = y_0 + (x - x_0)f'(x_0)$. On suppose que $f'(x_0) \neq 0$ (c'est-à-dire que la tangente n'est pas horizontale). T est l'ensemble des points $M(t, y_0 + (t - x_0)f'(x_0))$, lorsque t décrit $\mathbb{R}$. La droite S, symétrique de T par rapport à la première bissectrice, est l'ensemble des points $N(y_0 + (t - x_0)f'(x_0), t)$. Son équation cartésienne est $x = y_0 + (y - x_0)f'(x_0)$ soit, en la mettant sous la forme habituelle, $y = x_0 + (x - y_0)/f'(x_0)$ puisque $f'(x_0) \neq 0$. On obtient que l'équation de S est $y = f^{-1}(y_0) + (x - y_0)(f^{-1})'(y_0)$, c'est-à-dire celle de la tangente de f^{-1} en $N_0(y_0, x_0)$. Lorsque $f'(x_0) \neq 0$, la tangente de f^{-1} au point (y_0, x_0) est donc la symétrique par rapport à la première bissectrice de celle de f au point (x_0, y_0).

2.2 Accroissements finis.

L'objet principal de cette partie est d'expliquer pourquoi le signe de la dérivée d'une fonction (lorsqu'elle existe) donne les variations de cette fonction. Ce sera une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis (cf. théorème 2.17). On verra une version plus générale de ce résultat qui permet de démontrer la règle de l'Hospital, qui fut utilisée dans l'UE1 pour étudier les formes indéterminées de limite du type "0/0" (on généralise la forme simplifiée de cette règle obtenue dans le paragraphe 2.1.1). Dans un complément, on applique les résultats de la partie à un problème d'interpolation.

2.2.1 Extremum local et théorème de Rolle.

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux maxima et minima locaux d'une fonction dérivable sur un intervalle ouvert. On va voir qu'en ces points la dérivée doit s'annuler. Ce résultat est utile pour démontrer le théorème de Rolle, qui permettra d'obtenir le théorème des accroissements finis.

Définition 2.14. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in D$. On dit que f admet un* maximum local *(resp.* minimum local*) en x_0 ou encore que x_0 est un* maximum local *(resp.* minimum local*) de f, si la proposition $(f(x) \leq f(x_0))$ (resp. $(f(x) \geq f(x_0))$) est vraie près de x_0, ce qui signifie, d'après la définition 1.29, qu'il existe $h > 0$ tel que, pour tout $x \in D\cap]x_0 - h; x_0 + h[$, la proposition $(f(x) \leq f(x_0))$ (resp. $(f(x) \geq f(x_0))$) est vraie. Dans ce cas, on dit que $f(x_0)$ est une valeur* maximale locale (*resp.* minimale locale) *de f. Si la proposition $(f(x) \leq f(x_0))$ (resp. $(f(x) \geq f(x_0))$) est vraie sur D, alors on parle de* maximum global (*resp.* minimum global) *en x_0. Un extremum local est un maximum local ou un minimum local.*

La fonction $x \mapsto |x|$ admet un minimum local en 0, c'est même un minimum global, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0 = |0|$. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = |x|$ si $x < 1$ et $f(x) = -4$ si $x \geq 1$, admet un minimum local en 0, puisque, pour tout $x \in]-1; 1[$, $f(x) \geq 0 = f(0)$, mais il n'est pas global car $f(1) < f(0)$.

Exercice 2.8. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2 + x$ si $x \leq -1$, $f(x) = -x$ si $-1 < x \leq 0$, $f(x) = x$ si $0 < x \leq 2$ et $f(x) = 2 - x$ si $x > 2$. Quels sont les extrema locaux de f ? Y en a-t-il des globaux ?

Lorsque la fonction est dérivable en un extremum, la pente doit être nulle en ce point, comme le montre la

Proposition 2.15. *Soit I un* **intervalle ouvert** *et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Si f a un extremum local en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration : On suppose que f a un minimum local en a (le cas d'un maximum local se traite de manière analogue). Il existe $\delta > 0$ tel que $]a - \delta; a + \delta[\subset I$ et, pour tout $x \in]a - \delta; a + \delta[$, $f(x) \geq f(a)$. Pour $0 < h < \delta$, on a

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \leq 0 \tag{2.2}$$

puisque f restreinte à $]a-\delta; a+\delta[$ est minimale en a. Comme f est dérivable en a, elle est dérivable à droite et à gauche en a et on a (cf. proposition 1.8)

$$f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{et} \quad f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

On peut donc passer à la limite dans les inégalités (2.2) (cf. proposition 1.21) pour obtenir

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq 0\,,$$

ce qui montre que $f'(a) = 0$. □

Autrement dit, l'annulation de la dérivée est une condition nécessaire à l'existence d'un extremum local. Est ce une condition suffisante ? Non ! Considérons en effet la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe x^3. Elle est dérivable et $f'(x) = 3x^2$ (cf. corollaire 2.11 ou exercice 2.3). Donc $f'(0) = 0$. Mais 0 n'est ni un minimum local ni un maximum local. En effet, si 0 était un maximum local, il existerait un $h > 0$ tel que, pour tout $x \in]-h; h[$, on ait $x^3 \leq 0$. Mais c'est impossible puisque $(h/2)^3 > 0$. Si 0 était un minimum local, il existerait un $h > 0$ tel que, pour tout $x \in]-h; h[$, on ait $x^3 \geq 0$. Mais c'est impossible puisque $(-h/2)^3 = -(h/2)^3 < 0$.
Notons, de plus, que l'hypothèse I ouvert est indispensable pour avoir le résultat de la proposition 2.15. La fonction $g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in [0; 1]$, associe x, est minimale en 0. Elle est dérivable en 0, puisque $\lim_{x\to 0, x\neq 0} g(x)/x = 1$, mais $g'(0) = 1 \neq 0$.
La proposition 2.15 va nous permettre d'obtenir le théorème des accroissements finis dans un cas particulier : c'est le théorème de Rolle suivant.

Théorème 2.16 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a; b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a; b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration : Admettons momentanément que le résultat soit démontré lorsque $f(a) = f(b) = 0$ et montrons qu'alors il est vrai dans le cas général. Soit f une fonction satisfaisant les hypothèses du théorème. Soit $g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(a)$, pour tout $x \in [a; b]$. Par somme, la fonction g est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ et, pour tout $x \in]a; b[$, $g'(x) = f'(x)$. Comme $g(a) = g(b) = 0$, on a l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ donc tel que $f'(c) = 0$.
Montrons maintenant le résultat dans le cas où $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M = \sup(f[a, b])$ et $m = \inf(f([a, b]))$. Ces bornes existent dans $\mathbb{R}$ et sont atteintes par f puisque f est continue sur $[a, b]$ (cf. théorème 1.34). Comme $f(a) = 0$, on doit avoir $m \leq 0 \leq M$. Si $m = 0 = M$, c'est que f est constante et égale à 0 sur $[a, b]$, donc sa dérivée s'annule sur $]a, b[$. Sinon, on a par exemple $M > 0$ (le cas $m < 0$ se traite de manière analogue). On peut trouver un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = M$, puisque M est atteint. Comme $f(a) = f(b) = 0$, on a $c \in]a, b[$. La restriction de f à l'intervalle ouvert $]a, b[$ présente un maximum (local) en c, donc, d'après la proposition 2.15, $f'(c) = 0$. □

Graphiquement, le théorème de Rolle dit que, si les valeurs de la fonction aux extrémités sont les mêmes, alors il existe un point où la tangente est horizontale. Dans le paragraphe 2.2.4, on verra un exemple concret d'application du théorème de Rolle à un problème d'interpolation linéaire.

2.2.2 Théorème des accroissements finis.

Nous arrivons maintenant au résultat principal de cette partie 2.2.

Théorème 2.17 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, continue sur* $[a;b]$*, dérivable sur* $]a;b[$*. Il existe* $c \in]a;b[$ *tel que* $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$*.*

Démonstration : On pose, pour $x \in [a;b]$,

$$g(x) \;=\; f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) \right) .$$

Par différence, g est continue sur $[a;b]$ (cf. corollaire 1.26 et corollaire 1.25), dérivable sur $]a;b[$ (cf. corollaire 2.11 et proposition 2.10) et on a, pour tout $x \in]a;b[$,

$$g'(x) \;=\; f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

On a $g(a) = g(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle (cf. théorème 2.16) à la fonction g, ce qui donne un $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a donc $f'(c) \cdot (b-a) = f(b) - f(a)$.
□

Notons que l'ordre des bornes de l'intervalle ne joue aucun rôle puisque l'on a aussi $f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$, en changeant les signes de chaque côté de l'égalité.
Graphiquement, le théorème des accroissements finis dit qu'il existe un point $c \in]a,b[$ tel que la pente de la tangente au graphe de f au point de coordonnées $(c, f(c))$ soit égale à la pente de la droite qui joint les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
Lorsque l'on suppose de plus que $f(a) = f(b)$, le théorème 2.17 redonne le théorème de Rolle (cf. théorème 2.16) comme on l'avait annoncé.
Étant donné un intervalle I, qui n'est pas réduit à un point, on peut appliquer le théorème 2.17 à une fonction définie et continue sur I, dérivable à l'intérieur de I, c'est-à-dire sur $]\inf I; \sup I[$ (avec la convention $\sup I = +\infty$ si I n'est pas majoré et $\inf I = -\infty$ si I n'est pas minoré). On obtient ainsi la justification suivante du tableau des variations de f sur I :

Si f est continue sur un intervalle I, dérivable sur $]\inf I; \sup I[$ et si f' est strictement positive (resp. négative) sur $]\inf I; \sup I[$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

En effet, si on prend $a < b$ dans I, l'égalité $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ avec $f'(c) > 0$ (resp. $f'(c) < 0$) entraîne que $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) < f(a)$). Par le même raisonnement, on a aussi le fait que

$$\boxed{\text{si } f' = 0 \text{ sur }]\inf I; \sup I[\text{ alors } f \text{ est constante sur } I.}$$

Notons au passage que, lorsqu'on dispose du tableau des variations d'une fonction, on connaît aussi les extrema de cette fonction. Si, par exemple, une fonction est décroissante sur $[a; b]$ puis croissante sur $[b; c]$ alors on sait qu'elle est localement minimale en b. Si une fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle n'admet pas d'extrema.

Exercice 2.9. : Soit $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - px - q$. Suivant les valeurs de p et q, quels sont les extrema de f ?

Dans le théorème des accroissements finis, rien n'est dit sur le c, à part qu'il se situe dans l'intervalle $]a, b[$. Il est utile principalement quand on peut encadrer la dérivée f'.

Corollaire 2.18 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit I un intervalle, qui n'est pas réduit à un point, et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $]\inf I; \sup I[$. S'il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in]\inf I; \sup I[$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors, pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a \leq b$,*

$$m(b-a) \;\leq\; f(b) - f(a) \;\leq\; M(b-a)\,.$$

Si la fonction f a une dérivée continue sur le segment $[a, b]$ alors on peut prendre pour M (resp. m) la borne supérieure (resp. inférieure) de $f'(x)$ sur $[a, b]$, d'après la théorème 1.34.

Démonstration : On sait, d'après le théorème des accroissements finis, qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ et, par hypothèse, on a $m \leq f'(c) \leq M$. □

2.2.3 Règle de l'Hospital.

Dans ce paragraphe, on généralise le théorème des accroissements finis afin de démontrer la règle de l'Hospital.

Proposition 2.19. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f, g : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) \;=\; g'(c) \cdot \big(f(b) - f(a)\big)\,.$$

Si, de plus, on suppose que $g(a) \neq g(b)$ et que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$, ceci veut dire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \;=\; \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\,.$$

Démonstration : voir l'exercice 2.10. □

Il s'agit bien d'une généralisation du théorème des accroissements finis puisqu'en prenant $g : x \mapsto x$ sur $[a;b]$, on retrouve exactement l'énoncé du théorème 2.17.

Exercice 2.10. : Sous les hypothèses de la proposition 2.19, on pose, pour $x \in [a;b]$,

$$h(x) \;=\; \big(f(x) - f(a)\big) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) \;-\; \big(g(x) - g(a)\big) \cdot \big(f(b) - f(a)\big)\,.$$

Vérifier que h satisfait bien les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a;b]$ (cf. théorème 2.16). En déduire la preuve de la proposition 2.19.

La proposition 2.19 nous permet de démontrer une version généralisée de la règle de l'Hospital. À la différence de la première version (cf. proposition 2.20), on ne suppose pas ici que les fonctions sont dérivables au point où l'on étudie les limites.

Proposition 2.20. *[Régle de l'Hospital] Soit I un intervalle, qui n'est pas réduit à un point, $a \in I$ et $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continues sur I, dérivables sur $I \setminus \{a\}$ telles que $f(a) = g(a) = 0$. On suppose, de plus, que ni g ni g' ne s'annulent sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x\to a, x\neq a} f'(x)/g'(x)$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim_{x\to a, x\neq a} f(x)/g(x)$ existe et elles sont égales.*

Démonstration : On traite le cas où $\ell := \lim_{x\to a, x\neq a} f'(x)/g'(x)$ est réel (les autres cas sont similaires). Soit $\epsilon > 0$. Il existe donc $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in I\setminus\{a\}\cap]a-\delta; a+\delta[$, $|f'(y)/g'(y) - \ell| < \epsilon$. Soit $x \in I\setminus\{a\}\cap]a-\delta; a+\delta[$. D'après le théorème des accroissements finis généralisé (cf. proposition 2.19), il existe c strictement compris entre a et x, donc appartenant à $I \setminus \{a\}\cap]a-\delta; a+\delta[$, tel que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} \;=\; \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \;=\; \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

On a donc, $|f(x)/g(x) - \ell| = |f'(c)/g'(c) - \ell| < \epsilon$, puisque $c \in I \setminus \{a\}\cap]a-\delta; a+\delta[$. □

On a signalé que l'on ne peut appliquer la version simplifiée de la règle de l'Hospital (cf. proposition 2.6) à la

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{1-\cos x}{x^2}\,.$$

Voyons comment la version complète permet de traiter ce cas. Les fonctions $f(x) = 1-\cos x$ et $g(x) = x^2$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, $f(0) = g(0) = 0$ et ni g ni g' ne s'annule en dehors de 0. Donc, si $(f'/g')(x)$ a une limite en 0, pour $x \neq 0$, alors, par la version complète de la règle de l'Hospital (et seulement elle), on en déduit l'existence et la valeur de la limite cherchée. Étudions donc $(f'/g')(x) = \sin x/(2x)$, pour $x \neq 0$. Comme $(\sin x)/x$ tend vers $\cos 0 = 1$ (cf. paragraphe 2.4.3), $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f'(x)/g'(x) = 1/2$ et donc limite cherchée existe et vaut $1/2$.

Exercice 2.11. : Étudier

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\tan x \,-\, x}{(\operatorname{sh} x)^2}\,, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{ch} x \,-\, \cos x}{\ln(1+x) \,-\, \sin x}\,, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{sh} x \,-\, \sin x}{\ln(1+x^2) \,-\, x\sin x}\,.$$

2.2.4 Complément : erreur d'interpolation.

Dans ce complément nous allons majorer une erreur d'interpolation en s'appuyant sur le théorème de Rolle. Quand il n'y avait pas encore de calculettes, on lisait les valeurs des fonctions trigonométriques dans des tables. Par exemple, la table des sinus d'angles en radian donnait

$$\begin{array}{l|ll} 0,375 & 0,366\,272\,5 & \pm 0,5\ 10^{-7}\,, \\ 0,376 & 0,367\,202\,9 & \pm 0,5\ 10^{-7}\,. \end{array}$$

Par interpolation linéaire, on obtient $\sin(0,3755) = 0,366\,737\,7$ qui est la moyenne des deux valeurs indiquées. De combien de décimales est-on sûr ?
L'interpolation linéaire consiste à remplacer sur le segment $[a;b]$ la fonction f par la fonction affine dont le graphe est la droite qui joint les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. C'est la fonction φ donnée sur $[a;b]$ par

$$\varphi(x) \;=\; \frac{x-a}{b-a}\cdot f(b) \;+\; \frac{b-x}{b-a}\cdot f(a)\,.$$

Choisissons $c \in]a, b[$. L'erreur d'interpolation en c est $|f(c)-\varphi(c)|$. Posons, pour $x \in [a;b]$,

$$g(x) \;=\; f(x) \;-\; \varphi(x) \;-\; \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\cdot\big(f(c)-\varphi(c)\big)\,.$$

On constate que $g(a) = g(c) = g(b) = 0$. On suppose f dérivable autant de fois que l'on veut sur $[a;b]$. g l'est donc aussi. On peut appliquer le théorème de Rolle (cf. théorème 2.16) aux deux segments $[a;c]$ et $[c;b]$. La dérivée g' s'annule donc en un certain $a_1 \in]a;c[$ et en un certain $b_1 \in]c;b[$. On applique de nouveau le théorème de Rolle à g' sur $[a_1;b_1]$ et on trouve un $d \in]a_1;b_1[$ tel que

$$0 \;=\; g''(d) \;=\; f''(d) \;-\; \frac{2}{(c-a)(c-b)}\cdot\big(f(c)-\varphi(c)\big)$$

(vérifier le calcul de la dérivée seconde). Comme f'' est supposée dérivable sur $[a;b]$, elle y est continue donc bornée. Si on pose $M = \sup\{|f''(x)|; x \in [a;b]\}$, on a la majoration

$$|f(c)-\varphi(c)| \;\leq\; |c-a|\cdot|c-b|\cdot M/2\,.$$

Une étude de la variation de $|c-a|\,|b-c|$ quand c parcourt $[a,b]$ montre que le maximum est atteint pour $c = (a+b)/2$ et vaut $(b-a)^2/4$ (faire cette étude). On obtient finalement comme majoration de l'erreur d'interpolation

$$|f(c)-\varphi(c)| \;\leq\; (b-a)^2\cdot M/8\,.$$

Dans l'exemple de la table des sinus, $b-a = 10^{-3}$ et la dérivée seconde, qui est $-\sin$, est majorée en valeur absolue par $0,4$ sur l'intervalle considéré. L'erreur d'interpolation est donc majorée par $0,5\cdot 10^{-7}$. Avec les erreurs d'arrondi, le résultat est bon à 10^{-7} près. La table est faite pour que le nombre de décimales données (7) corresponde à la précision obtenue par interpolation linéaire.

2.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Les fonctions usuelles vues en MA1 sont toutes des exemples de fonction indéfiniment dérivable (sur un intervalle convenable). Il est donc intéressant d'étudier de manière générale les fonctions qui, pour un certain k, sont k fois dérivables et ont une dérivée k-ième continue. C'est l'objet de cette partie. En particulier, on verra deux formules de Taylor qui comparent une telle fonction avec une certaine fonction polynôme.

2.3.1 Définition et propriétés.

Afin d'exprimer plus facilement des propriétés, il est commode d'introduire quelques **conventions** (cf. introduction). On pose $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On décide que, pour $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell < \infty$, $[\![\ell; \infty[\![$ désigne l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq \ell$ et que, pour $k = \infty$, $k - 1$ est encore ∞.
On s'intéresse aux fonctions plusieurs fois dérivables (cf. définition 2.8) sur une partie D de $\mathbb{R}$ qui est une réunion d'intervalles. En particulier, D peut être un intervalle.

Définition 2.21. *Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}$ et D une réunion d'intervalles. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite* (de classe) $\mathcal{C}^k$ sur *D si,*
- *lorsque $k = 0$, elle est continue sur D (dans ce cas $f^{(0)} := f$),*
- *lorsque $k > 0$, elle est k fois dérivable sur D et sa dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur D,*
- *lorsque $k = \infty$, elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur D, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Lorsque $k \in \mathbb{N}$, on dit aussi que f est k fois continûment dérivable sur *D et lorsque $k = \infty$, on dit aussi que f* est indéfiniment dérivable sur *D. Pour $k \in \overline{\mathbb{N}}$, on note par $\mathcal{C}^k(D)$ l'ensemble des fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.*

Notons tout de suite que le corollaire 2.11 dit simplement que les fonctions polynômes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tandis que les fractions rationnelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

Proposition 2.22. *Soit D une réunion d'intervalles et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Si, pour un $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D alors, pour tout $\ell \in [\![0; k[\![$, f est de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur D.*

2. *Soit $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$. f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D si et seulement si f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D.*

Démonstration : Montrons 1. Lorsque $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction f qui est k fois dérivable est bien sûr ℓ fois dérivable mais aussi $(\ell + 1)$ fois dérivable, ce qui signifie que la dérivée ℓ-ième de f est dérivable donc continue. Si f est $\mathcal{C}^\infty$, elle est par définition $\mathcal{C}^\ell$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. On a montré 1.
On montre maintenant 2. Si f est $\mathcal{C}^k$ sur D, pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors f est k fois dérivable donc sa dérivée est $(k-1)$ fois dérivable (ou continue si $k-1 = 0$) et on a $f^{(k)} = (f')^{(k-1)}$.

Comme $f^{(k)}$ est continue sur D, f' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D. Si f est $\mathcal{C}^\infty$, on peut faire le raisonnement précédent pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et obtenir que f' est $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que f' est $\mathcal{C}^\infty$.
Réciproquement, si, pour $k \in \mathbb{N}^*$, f' est $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D alors f est k fois dérivable sur D et $f^{(k)} = (f')^{(k-1)}$. Comme $(f')^{(k-1)}$ est continue sur D, f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D. Si f' est $\mathcal{C}^\infty$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f' est $\mathcal{C}^{n+1}$ donc f est $\mathcal{C}^n$, pour tout n, donc f est $\mathcal{C}^\infty$. $\square$

Comme la continuité et la dérivabilité, la classe $\mathcal{C}^k$ se transmet par les opérations usuelles comme on va le voir dans les propositions 2.23, 2.25 et 2.26 suivantes.

Proposition 2.23. *Soit D une réunion d'intervalles et $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathcal{C}^k(D)^2$. Alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur D. Si, de plus, f ne s'annule pas sur D, alors $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.*

Démonstration : Pour $k = 0$, le résultat a été démontré dans le corollaire 1.25. Soit $k > 0$. Supposons que le résultat ait été démontré pour $k-1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathcal{C}^k(D)^2$. D'après la proposition 2.10, on a $(f+g)' = f' + g'$, $(\lambda f)' = \lambda f'$ et $(fg)' = f'g + fg'$. Sont $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D f, g, f' et g', par la proposition 2.22. Par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $(f+g)'$, $(\lambda f)'$ et $(fg)'$ sont $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D, donc $f+g$, λf et fg sont $\mathcal{C}^k$ sur D, par la proposition 2.22. Soit maintenant f de classe $\mathcal{C}^k$ sur D et ne s'annulant par sur D. La fonction $1/f$ est bien définie et dérivable sur D, de dérivée $-f'/f^2$, d'après la proposition 2.10. Comme f' et f sont $\mathcal{C}^{k-1}$ sur D, l'hypothèse de récurrence assure que $-f'/f^2$ l'est aussi, donc $1/f$ est $\mathcal{C}^k$ sur D par la proposition 2.22.
Lorsque $k = \infty$, il s'agit de montrer que le résultat précédent est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce que l'on vient de démontrer par récurrence. $\square$

Pour calculer la dérivée k-ième d'un produit, on dispose de la formule suivante, qui ressemble beaucoup à la formule du binôme de Newton vue en MA2.

Proposition 2.24 (Formule de Leibniz)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables sur D. Alors fg est n fois dérivable sur D et*

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)} &= f^{(n)}g + \mathbf{C}_n^1 f^{(n-1)}g' + \cdots + \mathbf{C}_n^i f^{(n-i)}g^{(i)} + \cdots + \mathbf{C}_n^{n-1} f'g^{(n-1)} + fg^{(n)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{C}_n^i f^{(n-i)} g^{(i)} ,\end{aligned}$$

où, pour $0 \leq i \leq n$, on a $\mathbf{C}_n^i := \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Démonstration : On procède par récurrence sur n. Avec la convention $f^{(0)} = f$ et le fait que $(fg)' = f'g + fg'$, la formule est correcte pour $n = 0$ et $n = 1$. Supposons la formule établie pour un $n \geq 1$ et montrons-là pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' = \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{C}_n^i f^{(n-i)} g^{(i)}\right)' \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{C}_n^i f^{(n-i+1)} g^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} \mathbf{C}_n^i f^{(n-i)} g^{(i+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \mathbf{C}_n^i f^{(n+1-i)} g^{(i)} + \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{C}_n^{j-1} f^{(n+1-j)} g^{(j)} \\
&= f^{(n+1)} g + \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{C}_n^{j-1} + \mathbf{C}_n^j\right) f^{(n+1-j)} g^{(j)} + f g^{(n+1)} .
\end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise, pour $1 \leq j \leq n$, l'égalité $\mathbf{C}_n^{j-1} + \mathbf{C}_n^j = \mathbf{C}_{n+1}^j$, vue en MA2. □

Revenons à la transmission de la classe $\mathcal{C}^k$ par des opérations. La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 2.25. *Soit D et E des réunions d'intervalles de $\mathbb{R}$ et $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Soit $f : D \longrightarrow E$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur D et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ sur E. Alors la fonction composée $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D.*

Démonstration : On procède par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$, on sait que la composée de deux fonctions continues est une fonction continue (cf. corollaire 1.25). Supposons la proposition établie pour un $k-1 \geq 0$. Sous les hypothèses de la proposition, on sait déjà que $g \circ f$ est dérivable sur D, et que $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$ (cf. proposition 2.12). Les fonctions f', g' et f sont de classe $\mathcal{C}^k$ (cf. proposition 2.22), et, par hypothèse de récurrence, la composée $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Donc $(g \circ f)'$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ (cf. proposition 2.23), ce qui signifie que $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur D, par la proposition 2.22. Lorsque $k = \infty$, il s'agit de montrer que le résultat précédent est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce que l'on vient de démontrer par récurrence. □

Voyons maintenant à quelle condition la fonction réciproque d'une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ est elle-même de classe $\mathcal{C}^k$.

Proposition 2.26. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \overline{\mathbb{N}}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, strictement monotone sur I. Soit $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ la fonction réciproque de f. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La fonction f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle $f(I)$.*
2. *Pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.*

Démonstration : Supposons la propriété 1 vérifiée. Comme f et f^{-1} sont dérivables, on a $(f^{-1} \circ f)' = ((f^{-1})' \circ f) \cdot f'$, par la proposition 2.12. Or $f^{-1} \circ f$ est l'application identique de l'intervalle I, donc, pour tout x de I, $(f^{-1})'(f(x)) \times f'(x) = 1$, ce qui impose $f'(x) \neq 0$. On obtient donc la propriété 2.

Supposons maintenant la propriété 2 vérifiée. On sait déjà que f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, et que sa dérivée vaut $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$ (cf. proposition 2.13). On raisonne alors par récurrence sur $p \in [\![0;k]\!]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^k$, la formule pour $(f^{-1})'$ montre, par composition (cf. proposition 1.25 ou 2.25), qu'elle est continue et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons que l'on sache déjà que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$, pour un $p \in [\![1;k]\!]$. Alors la même formule montre, toujours par composition (cf. proposition 2.25), que $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$ et donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^p$ (cf. proposition 2.22). On termine par le théorème de récurrence, qui permet aussi de traiter le cas $k = \infty$. $\square$

On verra de nombreuses applications de ces résultats dans la partie 2.4.

2.3.2 Formule de Taylor avec reste de Lagrange.

Pour des fonctions assez régulières, on va établir la formule de Taylor avec reste de Lagrange. Cette formule généralise le théorème des accroissements finis.

Théorème 2.27 (Taylor - Lagrange)**.** *Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a;b]$, telle que $f^{(n+1)}$ est bien définie sur $]a;b[$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,. \end{aligned}$$

La formule écrite est la *formule de Taylor à l'ordre n avec reste de Lagrange pour la fonction f entre a et b* . Le reste est $((b-a)^{n+1}/(n+1)!)f^{(n+1)}(c)$ et la partie principale est le polynôme (de la variable b)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

qui s'appelle le polynôme de Taylor de f en a.
A l'ordre $n = 0$, on retrouve bien le théorème des accroissements finis. Les hypothèses qui sont données sont un petit peu compliquées, elles visent à avoir l'énoncé le plus général possible. Dans la pratique, on applique souvent le théorème à une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle contenant a et b, auquel cas les hypothèses sont vérifiées quel que soit n.

Démonstration : L'équation d'inconnue y

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} y$$

admet une unique solution λ. Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\lambda = f^{(n+1)}(c)$. Pour cela, on pose

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \lambda\,.$$

Grâce aux hypothèses faites sur f, la fonction g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}
g'(x) &= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)\right)' + \frac{(b-x)^n}{n!}\lambda \\
&= -f'(x) - \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x) + \frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x)\right) + \frac{(b-x)^n}{n!}\lambda \\
&= -f'(x) + \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(b-x)^\ell}{\ell!}f^{(\ell+1)}(x) - \sum_{k=1}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\lambda \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1}\frac{(b-x)^\ell}{\ell!}f^{(\ell+1)}(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) + \frac{(b-x)^n}{n!}\big(\lambda - f^{(n+1)}(x)\big) \\
&= \frac{(b-x)^n}{n!}\big(\lambda - f^{(n+1)}(x)\big)\ .
\end{aligned}$$

Par définition de λ, $g(a)=0$. De plus, $g(b)=f(b)-f(b)=0$. On peut donc appliquer à g le théorème de Rolle (cf. théorème 2.16), qui montre qu'il existe $c\in]a;b[$ tel que $g'(c)=0$. D'après l'expression précédente de g', on obtient $\lambda = f^{(n+1)}(c)$. $\square$

Pour mieux comprendre cette preuve, reprenons les arguments dans le cas où $n=0$. On interprête $f(b)=f(a)+\lambda(b-a)/(1!)$ comme étant $g(a)=0$ pour la fonction $g(x) = f(b)-f(x)-\lambda(b-x)/(1!)$ et on cherche à calculer λ. Pour ce faire, on dérive g et on obtient $g'(x)=-f'(x)+\lambda$. Comme, d'autre part, $g(a)=0$ et $g(b)=0-0=0$, on a, par le théorème de Rolle appliqué à g, l'existence d'un $c\in]a;b[$ tel que $g'(c)=0$ ce qui donne la valeur de λ.

La formule de Taylor-Lagrange a des variantes d'écriture. En posant $b=a+h$, tout réel strictement compris entre a et $a+h$ peut s'écrire sous la forme $a+\theta h$ avec $0<\theta<1$. Donc, sous les hypothèses du théorème avec $b=a+h$, il existe $\theta\in]0;1[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\ .$$

Le θ de la formule dépend de a et de h. Dans le cas particulier où $a=0$, on a, pour chaque x, l'existence d'un $\theta\in]0;1[$ tel que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\ ,$$

qui est appelée *formule de Maclaurin* (avec reste de Lagrange).

L'inégalité des accroissements finis (cf. proposition 2.18) est utile pour obtenir des majorations. La formule de Taylor-Lagrange a aussi cette utilité (contrairement à la formule de Taylor-Young du paragraphe 2.3.3). Voyons un exemple. La fonction exponentielle est dérivable à tous les ordres sur $\mathbb{R}$ (cf. paragraphe 2.4.1). On peut donc écrire la formule de

Maclaurin à n'importe quel ordre n. Pour tout réel x, il existe $\theta \in]0;1[$ tel que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} .$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$e^x \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \tag{2.3}$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.
La formule de Taylor-Lagrange permet aussi d'obtenir des résultats d'approximation ("vrais à la limite"). Dans l'exemple précédent, si l'on pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} ,$$

alors on peut montrer que $u_n(x)$ tend vers e^x. En effet, d'après la formule de Mac Laurin,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} . \tag{2.4}$$

Le résultat cherché ($\lim_{n\to\infty} u_n(x) = e^x$) découle maintenant de l'

Exercice 2.12. : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $v_n = |x|^n/(n!)$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que la suite $(v_n)_{n\geq N}$ soit décroissante. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers un certain l. En écrivant $v_{n+1} = v_n \cdot |x|/(n+1)$, montrer que $l = 0$.

Attention, on peut trouver une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que la suite des restes de Taylor-Lagrange pour $x \neq 0$ ne tende pas vers 0, quand $n \to \infty$ (cf. Exercice 3.8).

De manière plus concrète, les formules de Taylor-Lagrange permettent d'approximer des nombres réels au sens de la définition suivante.

Définition 2.28. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $p \in]0;+\infty[$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est une* approximation de a avec la précision p, *ou bien une* valeur approchée de a à p près, *si $|x - a| \leq p$.*

Ainsi $3,14$ est une valeur approchée de π à $10^{-1} = 0,1$ près mais aussi à $10^{-2} = 0,01$ près, et $1,414$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^{-2} = 0,01$ près.
On admet que $e \in]2;3[$ (cf. exercice 1.22). Donc $2,5$ est une valeur approchée de e à $10^0 = 1$ près. Comme, pour $x \in [0;1]$,

$$\frac{|x|^{5+1}}{(5+1)!} e^{|x|} \leq \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} \leq 5 \cdot 10^{-3} ,$$

$u_5(1)$ est, d'après (2.4), une valeur approchée de e à $5 \cdot 10^{-3}$ près.

On verra au paragraphe 3.4.3 une application similaire des formules de Taylor-Lagrange aux suites récurrentes.

2.3.3 Formule de Taylor avec reste de Young.

On se propose ici d'établir la formule de Taylor avec reste de Young qui ressemble beaucoup à celle de Taylor-Lagrange du paragraphe 2.3.2. La différence se situe au niveau du reste, qui est ici moins explicite.
Notons que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, alors tout $a \in I$ est accessible par $I \setminus \{a\}$ (cf. définition 1.1) et l'on peut parler de dérivabilité en a pour une fonction définie sur I. Si l'on pose $D = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$ alors 0 est accessible par $D \setminus \{0\}$. Cela a donc un sens de considérer la limite en 0 d'une fonction définie sur D.

Théorème 2.29. *Soit I un* **intervalle** *de $\mathbb{R}$, non réduit à un point, et $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $n-1$ fois dérivable sur I. On suppose que f a une dérivée n-ème $f^{(n)}(a)$ en a. Soit $D = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$.*
Alors, il existe une fonction $\epsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $h \in D$, on ait

$$f(a+h) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) \;+\; h^n \cdot \epsilon(h)$$

et $\lim_{h\to 0, h\neq 0} \epsilon(h) = 0$.

Le "reste" $h^n\epsilon(h)$ s'appelle reste de Young et la formule du théorème est la *formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en a*. Avec la notation o, le reste est un $o(h^n)$, près de 0. A l'ordre 1, la formule s'écrit $f(a+h) = f(a)+f'(a)h+h\epsilon(h)$ avec $\lim_{h\to 0, h\neq 0} \epsilon(h) = 0$. C'est simplement écrire que f a pour dérivée $f'(a)$ en a (cf. définition 2.2).

Démonstration : Posons, pour $x \in I$,

$$g(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\,.$$

C'est une fonction polynôme donc elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Soit $p \in [\![0; n-1]\!]$. D'après le corollaire 2.11, on a

$$g^{(p)}(x) \;=\; \sum_{k=p}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-p}}{(k-p)!} f^{(k)}(a)$$

d'où l'on tire $g^{(p)}(a) = 1 \cdot f^{(p)}(a)$. Soit $h \in D \setminus \{0\}$ et $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(t) \;=\; f(t) \;-\; g(t) \;-\; \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n}\,(t-a)^n\,.$$

La fonction Φ est $n-1$ fois dérivable sur I. Pour $p \in [\![0; n-1]\!]$ et $t \in I$, on a

$$\Phi^{(p)}(t) \;=\; f^{(p)}(t) \;-\; g^{(p)}(t) \;-\; \frac{f(a+h) - g(a+h)}{h^n}\,\frac{n!}{(n-p)!}(t-a)^{n-p}\,. \tag{2.5}$$

On constate que $\Phi^{(p)}(a) = 0$. D'autre part, $\Phi(a+h) = 0$.
Considérons le cas où $h < 0$ (le cas $h > 0$ se traite de manière analogue). On pose

$c_0 = a + h < a$ et, pour $p \in [\![0; n-1]\!]$, soit $\mathcal{Q}(p)$ la proposition : il existe $(c_j)_{j\in[0;p]}$, une suite finie strictement croissante de $p+1$ éléments de $[a+h; a[$ telle que, pour tout $j \in [\![0; p]\!]$, $\Phi^{(j)}(c_j) = 0$.
$\mathcal{Q}(0)$ est vraie puisque $\Phi^{(0)}(c_0) = \Phi(a+h) = 0$. Si $n = 1$ alors $\mathcal{Q}(p)$ est vraie pour tout $p \in [\![0; n-1]\!]$. On se place donc dans le cas où $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{Q}(p)$ soit vraie pour un $p \in [\![0; n-2]\!]$. Par hypothèse de récurrence, on a déjà une suite $(c_j)_{j\in[0;p]}$ strictement croissante d'éléments de $[a+h; a[$ telle que, pour tout $j \in [\![0; p]\!]$, $\Phi^{(j)}(c_j) = 0$. Par le théorème de Rolle appliqué entre c_p et a à $\Phi^{(p)}$, il existe un $c_{p+1} \in]c_p; a[$ tel que $\Phi^{(p+1)}(c_{p+1}) = 0$. On a donc établi $\mathcal{Q}(p+1)$. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{Q}(n-1)$ est vraie. D'après (2.5) pour $p = n-1$ et $t = c_{n-1}$, on en déduit que

$$f(a+h) \;=\; g(a+h) \;+\; \frac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{c_{n-1} - a} \cdot \frac{h^n}{n!} \,.$$

Pour $h \in D \setminus \{0\}$, on pose

$$\epsilon(h) \;=\; \frac{1}{n!}\left(\frac{f^{(n-1)}(c_{n-1}) - f^{(n-1)}(a)}{c_{n-1} - a} \;-\; f^{(n)}(a)\right)$$

et $\epsilon(0) = 0$. Il reste à montrer que $\lim_{h\to 0, h\neq 0} \epsilon(h) = 0$.
Soit $\eta > 0$. Comme $f^{(n-1)}$ est dérivable en a, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $x \in I \setminus \{a\} \cap]a-\delta; a+\delta[$, on ait

$$\left|\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \;-\; f^{(n)}(a)\right| \;<\; \eta \,.$$

Pour $h \in D$ tel que $0 < |h| < \delta$, $a+h \in I \setminus \{a\} \cap]a-\delta; a+\delta[$ donc $c_{n-1} \in I \setminus \{a\} \cap]a-\delta; a+\delta[$ et donc $|\epsilon(h)| < \eta/(n!) \leq \eta$. □

Afin de mieux comprendre la démonstration précédente, reprenons les arguments dans le cas où $n = 2$. Le polynôme de Taylor de degré $n-1 = 1$ est donc $g(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$. Pour $h \in D \setminus \{0\}$ fixé avec $h < 0$, on introduit la fonction $\Phi(t) = f(t) - g(t) - (f(a+h) - g(a+h))(t-a)^2/h^2$ (qui vaut en fait $\Phi(t) = f(t) - g(t) - (t-a)^2(f^{(2)}(a)/(2!) - \epsilon(h))$). Comme $\Phi(a) = 0 = \Phi(a+h)$, il existe, par le théorème de Rolle, $c_1 \in]a+h; a[$ tel que $\Phi'(c_1) = 0$. On en déduit que

$$f(a+h) \;=\; g(a+h) \;+\; \frac{f'(c_1) - f'(a)}{c_1 - a} \cdot \frac{h^2}{2!} \,.$$

Comme f' est dérivable en a, pour tout $\eta > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, pour $x \in I \setminus \{a\} \cap]a-\delta; a+\delta[$, on ait $|f''(a) - (f'(x) - f'(a))/(x-a)| < \eta$. Donc, pour $-\delta < h < 0$,

$$\epsilon(h) \;:=\; \frac{1}{2!}\left(\frac{f'(c_1) - f'(a)}{c_1 - a} \;-\; f''(a)\right)$$

est majoré, en valeur absolue, par η. Donc $\lim_{h\to 0, h\neq 0} \epsilon(h) = 0$ et $f(a+h) = g(a+h) + f''(a)h^2/(2!) + o(h^2)$.
Les hypothèses que l'on a données visent à avoir un énoncé le plus général possible. Dans la pratique, on a souvent à écrire une formule de Taylor-Young en a pour une fonction f

qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert contenant a. Dans ce cas, les hypothèses du théorème 2.29 sont bien sûr vérifiées et on peut même donner une démonstration plus rapide de la formule de Taylor-Young, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange. C'est le contenu de l'exercice suivant.

Exercice 2.13. : Soit I un intervalle ouvert, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit h tel que $a + h \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. Ecrire la formule de Taylor avec reste de Lagrange pour f à l'ordre n entre a et $a+h$. Vérifier que le reste est négligeable devant h^n quand $h \to 0$. En déduire la formule de Taylor-Young à l'ordre n.

En revanche, on ne pourrait pas montrer Taylor-Lagrange à partir de Taylor-Young au même ordre, ce qui indique qu'il y a plus d'information dans le reste de Lagrange que dans celui de Young. Pour mieux sentir cette différence qualitative, reprenons l'exemple de la fonction exponentielle. L'inégalité (2.3) pour $x \neq 0$, obtenue par Taylor-Lagrange, est inaccessible avec théorème 2.29 (on n'a aucune idée du signe de la fonction ϵ). C'est pourquoi la différence entre ces deux formules de Taylor se traduit par une différence d'utilisation. La formule de Taylor avec reste de Lagrange permet des calculs de majorations sur un intervalle tandis que celle avec reste de Young en a donne des renseignements sur le comportement de la fonction quand la *variable tend vers* a.

2.4 Fonctions usuelles.

L'objet de ce paragraphe est de rappeler les principales propriétés des fonctions usuelles vues dans le MA1 et d'en donner une preuve rigoureuse. Les résultats qui suivent seront supposés connus aux examens de MA4 et pourront donc être utilisés sans démonstration. Les preuves détaillées de ces résultats, que l'on donne dans cette partie, constituent des exemples instructifs d'application du cours.

2.4.1 Logarithme et exponentielle.

Dans ce paragraphe, on va introduire la fonction logarithme népérien et établir certaines propriétés. En particulier, on montrera qu'elle est bijective de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et on donnera des propriétés de sa fonction réciproque : l'exponentielle.

Parfois, on définit la fonction logarithme népérien comme étant la primitive de la fonction $t \mapsto 1/t$, définie sur $]0;+\infty[$, qui s'annule en 1. Grâce au théorème des accroissements finis (cf. paragraphe 2.2.2), on sait qu'il y a au plus une telle fonction. En effet, si f et g sont deux telles fonctions alors $(f-g)'(x) = 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$, donc $f(x) - g(x) = f(1) - g(1) = 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$, c'est-à-dire $f = g$. En revanche, il n'est pas clair du tout qu'il existe une telle fonction. On a esquissé au paragraphe 1.3.3 la construction d'une telle fonction. Comme on n'a pas rigoureusement justifié (mais c'est possible) les résultats du paragraphe 1.3.3, on **admet** l'existence de cette fonction $\ln :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que, pour tout $x \in]0;+\infty[$, $\ln'(x) = 1/x$. On appelle cette fonction le

logarithme népérien.
Si l'on a besoin d'une primitive de $1/x$ sur $]-\infty;0[$, on peut prendre $]-\infty;0[\ni x\mapsto \ln(-x)$ puique $(\ln(-x))' = -\ln'(-x) = -1/(-x) = 1/x$. Par conséquent, $\mathbb{R}^*\ni x\mapsto \ln|x|$ est une primitive de $\mathbb{R}^*\ni x\mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^*$.
Passons maintenant à l'étude de cette fonction ln. Notons tout de suite que, comme x ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$, $0<x\mapsto 1/x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ par inversion (cf. corollaire 2.11) et ln est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ comme primitive de $0<x\mapsto 1/x$ (cf. proposition 2.22). Puisque $1/x>0$ pour tout $x\in]0;+\infty[$, ln est strictement croissante. On a la propriété importante suivante.

Proposition 2.30. *Pour tout* $(a,b)\in(\mathbb{R}^{+*})^2$, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ *et, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $\ln(a^n)=n\ln a$.

Démonstration : Soit $a>0$ et $b>0$. Soit $g:\mathbb{R}^{+*}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\ln(ax)-\ln a$. Elle est bien définie cas $ax>0$. De plus, g est dérivable, $g'(x)=\ln'(ax)\times a-0=(1/(ax))\times a=1/x$ et $g(1)=0$. Par unicité de la primitive de $0<t\mapsto 1/t$ qui s'annule en 1, on a forcément $g(x)=\ln x$, pour tout $x>0$. En particulier, pour $x=b$, on obtient $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.
La proposition $\mathcal{P}(n)$ donnée par $(\ln(a^n)=n\ln a)$ est vraie pour $n=0$. Supposons qu'elle soit vraie pour un $n\in\mathbb{N}$. On a alors, pour $b=a^n$, $\ln(a^{n+1})=\ln(ab)=\ln a+\ln b=\ln a+n\ln a$, par hypothèse de récurrence, soit $\ln(a^{n+1})=(n+1)\ln a$. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. □

Comme ln est (strictement) croissante, les limites $\lim_0\ln$ et $\lim_{+\infty}\ln$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, d'après la proposition 1.17. Pour $a>1$, on a $\ln a>\ln 1=0$. Donc, pour $n\in\mathbb{N}$, $\ln(a^n)=n\ln a$ tend vers $+\infty$, quand n tend vers l'infini. On en déduit que ln n'est pas majorée et que $\lim_{+\infty}\ln=+\infty$, par la proposition 1.17. Comme, pour $x>0$, $0=\ln(1)=\ln x+\ln(1/x)$, on en déduit que $\lim_0\ln=-\infty$, par composition (cf. proposition 1.23).
Montrons maintenant que ln est surjective, c'est-à-dire que $\ln(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$. Pour ce faire, on utilise la continuité de ln. Bien sûr, on a juste à montrer que $\mathbb{R}\subset\ln(]0;+\infty[)$. Soit $y\in\mathbb{R}$. Comme $\lim_{+\infty}\ln=+\infty$ et $\lim_0\ln=-\infty$, il existe, par définition de ces limites, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$ tels que $\ln a<y<\ln b$. Comme ln est continue sur $[a;b]$, $y\in\ln([a;b])$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 1.35), et donc $y\in\ln(]0;+\infty[)$. Par conséquent, ln est surjective. En particulier, l'unique antécédent de 1 par ln est noté e. On a donc $\ln e=1$. On **admet** que $e\in]2;3[$ (cf. paragraphe 1.3.3).
Pour étudier la branche infinie en $+\infty$, on a besoin du

Lemme 2.31. *Soit* $a\in\mathbb{R}$ *et* $f:]a;+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction dérivable telle que* $\ell:=\lim_{+\infty}f'$ *existe dans* $\overline{\mathbb{R}}$. *Alors la* $\lim_{x\to+\infty}f(x)/x$ *existe et vaut* ℓ.

Démonstration : On traite seulement le cas où $\ell\in\mathbb{R}$ (les autres cas sont similaires). Soit $\epsilon>0$. Par hypothèse, il existe $A>0$ avec $A>a$ tel que, pour $y\geq A$, $|f'(y)-\ell|<\epsilon/3$. Pour $x>A$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\ell\right| = \left|\frac{f(x)-f(A)}{x}-\ell+\frac{f(A)}{x}\right|$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| &= \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A}\cdot\frac{x-A}{x} - \ell\frac{x-A}{x} + \ell\Big(\frac{x-A}{x}-1\Big) + \frac{f(A)}{x}\right| \\ &\leq \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - \ell\right|\cdot\frac{x-A}{x} + |\ell|\cdot\left|\frac{x-A}{x}-1\right| + \left|\frac{f(A)}{x}\right| .\end{aligned}$$

Comme $f(A)/x$ et $1-(x-A)/x$ tendent vers 0, quand x tend vers $+\infty$, on peut trouver $B \geq A$ tel que, pour $x > B$, on ait $|f(A)/x| < \epsilon/3$ et $|1-(x-A)/x| < \epsilon/(3|\ell|+1)$. Donc, pour $x > B$, on a

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - \ell\right|\cdot 1 + |\ell|\cdot\frac{\epsilon}{3|\ell|+1} + \epsilon/3 \ .$$

Par le théorème des accroissements finis (cf. théorème 2.17), il existe y strictement compris entre x et A, donc vérifiant $y > A$, tel que $(f(x)-f(A))/(x-A) = f'(y)$. D'où

$$\left|\frac{f(x)}{x} - \ell\right| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon\,. \ \Box$$

On peut appliquer ce lemme à ln pour $a = 0$, puisque $\lim_{+\infty}\ln'$ existe et vaut 0. On en déduit donc que $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)/x = 0$. On a donc une direction parabolique dans la direction de l'axe des abcisses. Comme $(\ln(1/t))/(1/t) = -t\ln t$, on déduit par composition de la limite précédente que $\lim_{t\to 0^+} t\ln t = 0$.
Comme ln est continue, strictement croissante et surjective, c'est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque est continue et strictement croissante (cf. théorème 1.41). Par définition, cette bijection réciproque est la fonction exponentielle : $x \mapsto \exp x$.
Comme $\ln'$ ne s'annule jamais, on peut appliquer les propositions 2.13 et 2.26. On en déduit que l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\exp'(x) = 1/(\ln'\circ\exp)(x) = 1/(1/\exp x) = \exp x$. De plus, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\ln(\exp x\cdot\exp y) = \ln(\exp x) + \ln(\exp y)$, d'après la proposition 2.30, donc $\ln(\exp x\cdot\exp y) = x + y$ d'où $\exp(x+y) = \exp x\cdot\exp y$. Notons au passage que $\exp 0 = 1$ puisque $\ln 1 = 0$. Comme l'image de l'exponentielle est $]0;+\infty[$ et comme elle est croissante, on a $\lim_{-\infty}\exp = \inf]0;+\infty[= 0$ et $\lim_{+\infty}\exp = \sup]0;+\infty[= +\infty$ (d'après les conventions en vigueur et la proposition 1.17). Comme $\lim_{y\to+\infty}(\ln y)/y = 0$ et $(\ln y)/y > 0$ pour $y > 1$, on a, par le corollaire 1.24, $\lim_{x\to+\infty}(\exp x)/x = +\infty$, c'est-à-dire une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

Remarque 2.32. *On verra en Deug deuxième année une autre façon de construire la fonction exponentielle (essentiellement en utilisant la suite des fonctions $u_n(x)$ du paragraphe 2.3.2) et de retrouver ses propriétés. Cela permet aussi de construire le logarithme népérien sans avoir recours à l'intégration.*

Il est remarquable que la fonction exponentielle permette essentiellement d'exprimer tous les "radicaux", comme on va le vérifier maintenant. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe le produit de n facteurs $x\cdot\ldots\cdot x$ est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^\infty$, puisque c'est un polynôme (cf. corollaire 2.11).
Si n est impair, f_n est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est non majorée (si M

la majorait alors, comme $f_n(|M|+1) = (|M|+1)^n > M$, on a une contradiction) donc aussi non minorée puisqu'elle est impaire. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (cf. théorème 1.35). Par le théorème de continuité sur les fonctions réciproques (cf. théorème 1.41), elle est bijective et on note par $\sqrt[n]{\cdot}$ la bijection réciproque, qui est continue sur $\mathbb{R}$. Comme f_n' ne s'annule qu'en 0, $\sqrt[n]{\cdot}$ est dérivable, même C^∞, en dehors de 0 et on peut calculer sa dérivée par la formule de la dérivée de la fonction réciproque (cf. proposition 2.13 et proposition 2.26).
Si n est pair, f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Comme précédemment, on montre qu'elle est non majorée. Comme $f_n(0) = 0$, on a donc $f_n([0;+\infty[) = [0;+\infty[$ par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 1.35). Par le le théorème de continuité sur les fonctions réciproques (cf. théorème 1.41), elle est bijective et on note par $\sqrt[n]{\cdot}$ la bijection réciproque, qui est continue sur $[0;+\infty[$. Comme f_n' ne s'annule qu'en 0, $\sqrt[n]{\cdot}$ est dérivable, même C^∞, en dehors de 0 et on peut appliquer la formule de la dérivée de la fonction réciproque (cf. proposition 2.13 et proposition 2.26).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$ est appelée fonction racine n-ième. On la connaît entièrement si on la connaît sur $[0;\infty[$ (puisque, pour n impair, la fonction est impaire). Il se trouve que, pour $x > 0$, on a $\sqrt[n]{x} = \exp((1/n)\ln x)$. En effet, $\sqrt[n]{x}$ est par définition l'unique solution strictement positive de l'équation, d'inconnue y, $y^n = x$. Comme $(\exp((1/n)\ln x))^n = \exp(n \cdot (1/n)\ln x))$ (en appliquant plusieurs fois la formule $\exp(a+b) = \exp a \cdot \exp b$), on obtient $(\exp((1/n)\ln x))^n = \exp(\ln x)) = x$ avec $\exp((1/n)\ln x) > 0$. Par unicité de la solution, on a le résultat cherché.

Pour $a > 0$ et $a \neq 1$, la fonction $\mathrm{Log}_a :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui à $x > 0$ associe $\ln x / \ln a$ s'appelle le logarithme de base a. C'est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$, qui envoie a sur 1 et 1 sur 0. La bijection réciproque est la fonction $\mathbb{R} \ni y \mapsto \exp(y \ln a)$, qui envoie 1 sur a et 0 sur 1. On l'appelle fonction puissance de base a et on note $a^y = \exp(y \ln a)$. La notation n'est pas innocente. Si $(n,n') \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a bien sûr $a^{(n+n')} = (a^n)(a^{n'})$ et $(a^n)^{n'} = a^{nn'}$, mais grâce à la fonction puissance de base a, ces égalités sont encore vraies si $(n,n') \in \mathbb{R}^2$! Cette fonction généralise, sur $]0;+\infty[$ seulement, les fonctions f_n et $\sqrt[n]{\cdot}$ au cas où n n'est ni un entier naturel ni l'inverse d'un entier naturel.
Notons que le logarithme népérien ln est Log_e, le logarithme en base e. Donc, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \exp(x \ln e) = \exp x$, ce qui explique la notation usuelle de la fonction exponentielle.
Pour terminer ce paragraphe, donnons quelques propriétés utiles dites de “croissances comparées”.

Proposition 2.33. *Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.*
– *Si $a > 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x/x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x \cdot x^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x/\ln x = +\infty$.*
– *Si $a < 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x \cdot x^n = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x/x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x \cdot \ln x = 0$.*
– *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n/\ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \cdot \ln x = 0$.*

Démonstration : Voir Exercice 2.14. □

Exercice 2.14. : Montrer qu'il suffit de démontrer la proposition 2.33 pour $a = e > 1$. Dans ce cas, utiliser les limites de $(\exp x)/x$ et de $(\ln y)/y$ en $+\infty$, celle de $x \exp x$ en $-\infty$ et celle de $y \ln y$ en 0.

2.4.2 Fonctions hyperboliques.

Grâce à la fonction exponentielle introduite précédemment, on peut construire les fonctions ch, sh et th ainsi que leurs bijections réciproques Argch, Argsh et Argth.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{ch}x = (e^x + e^{-x})/2$, $\mathrm{sh}x = (e^x - e^{-x})/2$ et, comme $\mathrm{ch}x > e^x/2 > 0$, on peut définir $\mathrm{th}x := \mathrm{sh}x/\mathrm{ch}x$. Tandis que ch est paire, sh et th sont impaires. Comme l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il en est de même de ces trois fonctions d'après les propositions 2.23 et 2.25. De plus, d'après la proposition 2.10, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'x = \mathrm{sh}x$, $\mathrm{sh}'x = \mathrm{ch}x$ et $\mathrm{th}'x = (\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x)/\mathrm{ch}^2x$. Comme $\mathrm{ch}x > 0$ pour tout x, sh est strictement croissante. Comme $\mathrm{sh}0 = 0$, sh est strictement positive sur $]0;+\infty[$ et strictement négative sur $]-\infty;0[$. Donc ch est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty;0]$. En particulier, ch est minimale en 0 et y vaut $\mathrm{ch}0 = 1$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}x \geq 1$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x/2 + e^{-x}/2 > e^x/2 - e^{-x}/2$ et $e^x/2 + e^{-x}/2 > -e^x/2 + e^{-x}/2$, on a $\mathrm{ch}x > \mathrm{sh}x$ et $\mathrm{ch}x > -\mathrm{sh}x$, donc $\mathrm{ch}x > |\mathrm{sh}x|$. Par conséquent, th' est strictement positive et th est strictement croissante. D'après l'étude de la fonction exponentielle, on a $\lim_{+\infty}\mathrm{ch} = +\infty$, $\lim_{+\infty}\mathrm{sh} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{ch}x)/x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{sh}x)/x = +\infty$ (cf. proposition 1.23). En particulier, les fonctions ch et sh admettent en $+\infty$ une direction parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées. Comme

$$\left|\frac{(e^x - e^{-x})/2}{(e^x + e^{-x})/2}\right| = \left|\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}\right| ,$$

$\lim_{+\infty}\mathrm{th} = 1$, par la proposition 1.23. Par parité ou imparité, on a $\lim_{-\infty}\mathrm{ch} = +\infty$, $\lim_{-\infty}\mathrm{sh} = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{ch}x)/x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(\mathrm{sh}x)/x = -\infty$ et $\lim_{-\infty}\mathrm{th} = -1$. Montrons maintenant que $\mathrm{ch}(\mathbb{R}) = [1;+\infty[$, $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$. On a déjà vu que, pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}x \geq 1$ et $|\mathrm{th}x| = |\mathrm{sh}x|/\mathrm{ch}x < 1$ donc on a $\mathrm{ch}(\mathbb{R}) \subset [1;+\infty[$ et $\mathrm{th}(\mathbb{R}) \subset]-1;1[$. Si $y \geq 1 = \mathrm{ch}0$ alors il existe $a > 0$ tel que $\mathrm{ch}a > y$ car $\lim_{+\infty}\mathrm{ch} = +\infty$. Comme ch est continue sur $[0;a]$, elle prend la valeur y par le théorème des valeurs intermédiaires. De même, en utilisant $\lim_{+\infty}\mathrm{sh} = +\infty$, $\lim_{-\infty}\mathrm{sh} = -\infty$ et le théorème des valeurs intermédiaires, on trouve que tout $y \in \mathbb{R}$ est une valeur de sh. Par le même raisonnement, le fait que $\lim_{-\infty}\mathrm{th} = -1$ et $\lim_{+\infty}\mathrm{th} = 1$ permet de montrer que tout $y \in]-1;1[$ est une valeur de th. On a donc $\mathrm{ch}(\mathbb{R}) = [1;+\infty[$, $\mathrm{sh}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $\mathrm{th}(\mathbb{R}) =]-1;1[$. On peut donc appliquer le théorème 1.41 à sh, th et à la restriction de ch à $[0;+\infty[$. Ces trois fonctions sont donc bijectives de bijections réciproques continues et strictement croissantes, qui sont par définition les fonctions $\mathrm{Argsh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathrm{Argth} :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $\mathrm{Argch} : [1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$. Comme $\mathrm{sh}'x = \mathrm{ch}x > 0$ et $\mathrm{th}'x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et comme $\mathrm{ch}'x = \mathrm{sh}x > 0$ pour tout $x > 0$, on peut appliquer les propositions 2.13 et 2.26. On en déduit que Argsh et Argth sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition et que Argch est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$. De plus, on a $\mathrm{Argsh}'x = (\mathrm{sh}' \circ \mathrm{Argsh}x)^{-1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argth}'x = (\mathrm{th}' \circ \mathrm{Argth}x)^{-1}$, pour tout $x \in]-1;1[$, et $\mathrm{Argch}'x = (\mathrm{ch}' \circ \mathrm{Argch}x)^{-1}$, pour tout $x > 1$. Pour simplifier ces expressions, on remarque que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}^2y - \mathrm{sh}^2y = (1/4)(2e^y \cdot e^{-y} - (-2e^y \cdot e^{-y})) = 1$. Donc, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}y = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2y}$ et, pour tout $y \geq 0$, $\mathrm{sh}y = \sqrt{\mathrm{ch}^2y - 1}$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsh}'x = (\mathrm{ch} \circ \mathrm{Argsh}x)^{-1} = (\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 \circ \mathrm{Argsh}x})^{-1} = (\sqrt{1 + x^2})^{-1}$ et, pour tout $x > 1$,

$\mathrm{Argch}'x = (\mathrm{sh} \circ \mathrm{Argch}\, x)^{-1} = (\sqrt{\mathrm{ch}^2 \circ \mathrm{Argch}\, x - 1})^{-1} = (\sqrt{x^2-1})^{-1}$. Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'y = (\mathrm{ch}^2 y - \mathrm{sh}^2 y)/\mathrm{ch}^2 y = 1 - \mathrm{th}^2 y$, on a, pour tout $x \in]-1;1[$, $\mathrm{Argth}'x = (1 - \mathrm{th}^2 \circ \mathrm{Argth}\, x)^{-1} = (1-x^2)^{-1}$.

Il est utile de connaître les propriétés suivantes des fonctions hyperboliques.

Proposition 2.34. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rclcrcl} sh(a+b) & = & sha \cdot chb + shb \cdot cha & , & sh(a-b) & = & sha \cdot chb - shb \cdot cha\,, \\ ch(a+b) & = & cha \cdot chb + shb \cdot sha & , & ch(a-b) & = & cha \cdot chb - shb \cdot sha\,, \\ th(a+b) & = & \frac{tha+thb}{1+tha \cdot thb} & , & th(a-b) & = & \frac{tha-thb}{1-tha \cdot thb}\,. \end{array}$$

Démonstration : Voir Exercice 2.15. □

Exercice 2.15. : En utilisant le fait que $\exp(u+v) = \exp u \cdot \exp v$, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, démontrer les égalités de la proposition 2.34.

Corollaire 2.35. *Pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, on a*

$$\begin{array}{rclcrcl} shx + shy & = & 2 \cdot sh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot ch\left(\frac{x-y}{2}\right) & , & shx - shy & = & 2 \cdot sh\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot ch\left(\frac{x+y}{2}\right)\,, \\ chx + chy & = & 2 \cdot ch\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot ch\left(\frac{x-y}{2}\right) & , & chx - chy & = & 2 \cdot sh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot sh\left(\frac{x-y}{2}\right)\,. \end{array}$$

Démonstration : Il suffit de poser $a = (x+y)/2$ et $b = (x-y)/2$ et appliquer la proposition 2.34. □

Corollaire 2.36. *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $sh(2t) = 2 \cdot sht \cdot cht$, $ch(2t) = ch^2t + sh^2t = 2 \cdot ch^2t - 1 = 2 \cdot sh^2t + 1$, $th(2t) = (2 \cdot tht)/(1 + th^2t)$, $sht = 2 \cdot sh(t/2) \cdot ch(t/2)$, $cht = ch^2(t/2) + sh^2(t/2) = 2 \cdot ch^2(t/2) - 1 = 2 \cdot sh^2(t/2) + 1$,

$$tht = \frac{2 \cdot th(t/2)}{1 + th^2(t/2)}\,,\ sht = \frac{2 \cdot th(t/2)}{1 - th^2(t/2)}\,,\ cht = \frac{1 + th^2(t/2)}{1 - th^2(t/2)}\,.$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition 2.34 à $a = b = t$ puis à $a = b = t/2$. Pour l'avant-dernière, on écrit que $\mathrm{sh}\, t = 2 \cdot \mathrm{sh}\,(t/2) \cdot \mathrm{ch}\,(t/2) = 2 \cdot \mathrm{th}\,(t/2) \cdot \mathrm{ch}^2(t/2)$ et le fait que $1 - \mathrm{th}^2 u = 1/\mathrm{ch}^2 u$ (qui vient de $\mathrm{ch}^2 u - \mathrm{sh}^2 u = 1$). □

2.4.3 Fonctions circulaires.

Les fonctions sinus et cosinus ont été introduites au lycée dans le cadre de la géométrie du plan. Ici on va utiliser ce cadre tout en donnant une définition plus analytique.

Tout d'abord, on est utile de définir les fonctions périodiques.

Définition 2.37. *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. *On dit que* f *est* périodique de période t *si, pour tout* $x \in D$, $x + t \in D$ *et* $f(x+t) = f(x)$. *On dit que* f *est* périodique *s'il existe* $t > 0$ *tel que* f *soit périodique de période* t.

Afin de construite sinus et cosinus, on **admet** l'existence d'une fonction $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}$, où $\mathcal{U}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1, telle que

1. pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $\phi(\theta + \theta') = \phi(\theta) \cdot \phi(\theta')$,
2. ϕ soit surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{U}$, en particulier $i = \phi(\pi/2)$,
3. pour $\theta \in \mathbb{R}$, $(\phi(\theta) = 1) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}; \theta = 2k\pi)$.

On **admet** de plus que, pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$, l'aire $A(\theta)$ du morceau de camembert délimité par les segments $[0; 1]$, $[0; \phi(\theta)]$ et l'arc de cercle joignant 1 et $\phi(\theta)$ (dans le sens inverse du mouvement des aiguilles d'une montre), est proportionnelle à θ et que l'aire du disque $A(2\pi)$ vaut π (le rayon du cercle est 1). Par conséquent, pour tout $\theta \in [0; 2\pi]$, $A(\theta) = (A(2\pi)/2\pi) \cdot \theta = \theta/2$.

Comme on le verra plus loin, θ est une mesure de l'angle orienté de demi-droite défini par les demi-droites $[0\,1)$ et $[0\,\phi(\theta))$. Voyons tout d'abord quelques propriétés de ϕ.

Proposition 2.38. *Pour tout* $(\sigma, \sigma') \in \mathbb{R}^2$,

$$\big(\phi(\sigma) = \phi(\sigma')\big) \iff \big(\exists k \in \mathbb{Z}; \sigma = \sigma' + 2k\pi\big).$$

En particulier, ϕ est périodique de période 2π. Pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\phi(n\sigma) = \phi(\sigma)^n$ et $\phi(-\sigma) = \phi(\sigma)^{-1} = \overline{\phi(\sigma)}$.

Démonstration : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1 = \phi(0) = \phi(\theta) \cdot \phi(-\theta)$, d'après le point 1. Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\phi(-\theta) = \phi(\theta)^{-1}$ et comme $\phi(\theta) \in \mathcal{U}$, on a aussi $\phi(\theta)^{-1} = \overline{\phi(\theta)}$. Donc $(\phi(\sigma) = \phi(\sigma')) \iff (\phi(\sigma) \cdot \phi(\sigma')^{-1} = 1) \iff (\phi(\sigma) \cdot \phi(-\sigma') = 1) \iff (\phi(\sigma - \sigma') = 1)$, d'après le point 1, et, d'après le point 3, $(\phi(\sigma - \sigma') = 1) \iff (\exists k \in \mathbb{Z}; \sigma - \sigma' = 2k\pi)$.
Pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé et $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $(\phi(n\theta) = \phi(\theta)^n)$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après le point 3. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors $\phi((n+1)\theta) = \phi(n\theta) \cdot \phi(\theta)$, par le point 1. Par l'hypothèse de récurrence, $\phi((n+1)\theta) = \phi(\theta)^n \cdot \phi(\theta) = \phi(\theta)^{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $n \in \mathbb{Z}^-$, $-n \in \mathbb{N}$ et on a $\phi(n\theta) \cdot \phi(-n\theta) = \phi(0) = 1$. Donc, $\phi(n\theta) = \phi(-n\theta)^{-1} = (\phi(\theta)^{-n})^{-1} = \phi(\theta)^n$. $\square$

D'après la proposition 2.38, cette fonction ϕ n'est donc pas injective et est périodique de période 2π. Cependant, la restriction de ϕ à $]-\pi; \pi]$ est bijective. Elle est surjective car ϕ l'est. Elle est injective car si $(\phi(\sigma) = \phi(\sigma'))$ pour $(\sigma, \sigma') \in]-\pi; \pi]^2$ alors $\sigma = \sigma' + 2k\pi$ pour un entier k, ce qui est impossible sauf si $k = 0$, c'est-à-dire si $\sigma = \sigma'$.
En utilisant le MA2, on peut faire une remarque intéressante sur cette application ϕ. Sur $\mathbb{R}$, on introduit la relation $\mathcal{R}$ définie par $\theta \mathcal{R} \theta'$ si $\phi(\theta) = \phi(\theta')$, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$. On vérifie facilement que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. En notant par $cl(\theta)$ la classe d'équivalence de $\theta \in \mathbb{R}$ relativement à $\mathcal{R}$, on pose $\tilde{\phi}(cl(\theta)) = \phi(\theta)$. On peut vérifier que cela définit une fonction **injective** $\tilde{\phi} : \mathbb{R}/\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ (où $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ désigne le quotient de $\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$). Par construction, $\tilde{\phi}$ est surjective donc c'est une bijection de $\mathbb{R}/\mathcal{R}$ sur $\mathcal{U}$. Sur le quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$, on peut définir une addition $\oplus$ de sorte que, pour tout $(X, X') \in (\mathbb{R}/\mathcal{R})^2$, on ait $\tilde{\phi}(X \oplus X') = \tilde{\phi}(X) \cdot \tilde{\phi}(X')$. En préservant les propriétés 1 et 2 de ϕ, on "l'a rendue injective".
Géométriquement, on peut interprêter l'argument $\theta \in \mathbb{R}$ de ϕ comme une mesure d'un

angle orienté de demi-droites. Cet angle peut être identifié à la classe d'équivalence $cl(\theta)$ précédente. Le point $\phi(\theta)$ de $\mathcal{U}$ est l'unique point de $\mathcal{U}$ tel que la demi-droite $[0\,\phi(\theta))$ fasse un angle orienté de mesure θ avec la demi-droite $[0\,1)$. Notons aussi que, lorsque $\theta \in]-\pi;\pi]$, θ est la mesure algébrique de l'arc de cercle reliant 0 à $\phi(\theta)$.

Remarque 2.39. *L'autre façon de construire la fonction exponentielle, signalée dans la remarque 2.32, permet aussi de construire l'exponentielle complexe $z \mapsto e^z$. Sa restriction à l'axe imaginaire, c'est-à-dire la fonction $\phi : \mathbb{R} \ni y \mapsto e^{iy}$, vérifie les propriétés* 1, 2 *et* 3 *du début de ce paragraphe.*

Passons maintenant à la définition des fonctions sinus et cosinus. Pour $z \in \mathbb{C}$, on note par $\Re z$ la partie réelle de z, c'est-à-dire $(z+\bar{z})/2$, par $\Im z$ la partie imaginaire de z, c'est-à-dire $(z-\bar{z})/(2i)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\cos x = \Re\phi(x)$ et $\sin x = \Im\phi(x)$. On définit ainsi deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les fonctions cosinus et sinus respectivement. Donnons tout de suite quelques propriétés.

Proposition 2.40. *La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus est paire. Elles sont toutes deux 2π-périodiques. On a $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$,*

$$\begin{aligned} \big(\cos x = 0\big) &\iff \big(\exists k \in \mathbb{Z};\ x = \pi/2 + k\pi\big)\,, \\ \Big(\sin x = 0\Big) &\iff \Big(\exists k \in \mathbb{Z};\ x = k\pi\Big)\,. \end{aligned}$$

Démonstration : Comme ϕ est 2π-périodique, les fonctions sinus et cosinus le sont aussi. Puisque $\phi(-\theta) = \overline{\phi(\theta)}$, par la proposition 2.38, on en déduit que cosinus est paire et que sinus est impaire. Par le point 3, on a $\phi(0) = 1$ donc $\cos 0 = 1$ et $\sin 0 = 0$. Par le point 2, $\phi(\pi/2) = i$ donc $\cos(\pi/2) = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$. Comme $\phi(\pi) = (\phi(\pi/2))^2 = i^2 = -1$, $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$. Il reste à montrer les deux équivalences.
Si $\cos x = 0$, on a $\phi(x) \in \{-i; i\}$ donc $(\phi(x))^2 = -1$. Or $(\phi(x))^2 = \phi(2x)$, d'après le point 1. Donc $\phi(2x) = -1$. Comme $-1 = i^2 = (\phi(\pi/2))^2 = \phi(\pi)$, il existe, d'après la proposition 2.38, $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = \pi + 2k\pi$. On a donc montré que, si $\cos x = 0$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pi/2 + k\pi$. Réciproquement, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a, par la proposition 2.38, $\phi(\pi/2+k\pi) = \phi(\pi/2)\cdot(\phi(\pi))^k = (-1)^k\cdot i \in \{-i; i\}$. Donc $\cos(\pi/2+k\pi) = \Re\phi(\pi/2 + k\pi) = 0$.
Si $\sin x = 0$, on a $\phi(x) \in \{-1; 1\}$ donc $(\phi(x))^2 = 1$. D'où $\phi(2x) = (\phi(x))^2 = 1$ et, par le point 3, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x = 0 + 2k\pi$. Donc $x = k\pi$. Réciproquement, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\phi(k\pi) = (\phi(\pi))^k = (-1)^k \in \{-1; 1\}$, donc $\sin(k\pi) = 0$. □

Soit $V := \{\pi/2+k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pour $x \in \mathbb{R}\setminus V$, on pose $\tan x = (\sin x)/(\cos x)$, ce qui a bien un sens d'après la proposition 2.40. On définit ainsi l'application tangente de $\mathbb{R}\setminus V$ dans $\mathbb{R}$. Comme $(x \in \mathbb{R}\setminus V) \Longrightarrow (-x \in \mathbb{R}\setminus V)$, on peut étudier la parité de tangente. Puisque sinus est impaire et cosinus paire, tangente est impaire. Comme $(x \in \mathbb{R}\setminus V) \Longrightarrow (x+2\pi \in \mathbb{R}\setminus V)$ et comme sinus et cosinus sont 2π-périodiques, tangente l'est aussi. Avant d'étudier les variations de ces trois fonctions, on montre les propriétés suivantes.

Proposition 2.41. *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.*

$$\sin(a+b) = \sin a\cdot\cos b + \sin b\cdot\cos a \quad , \quad \cos(a+b) = \cos a\cdot\cos b - \sin b\cdot\sin a\,.$$

Démonstration : Voir Exercice 2.16. □

Exercice 2.16. : En utilisant le point 1 satisfait par la fonction ϕ, démontrer les égalités de la proposition 2.34.

Corollaire 2.42. *Pour tout* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$*, on a*

$$\sin x + \sin y \;=\; 2 \cdot \sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \quad , \quad \cos x + \cos y \;=\; 2 \cdot \cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) .$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$*,* $\sin x = \cos(\pi/2-x)$*,* $\cos x = \sin(\pi/2-x)$*,* $\sin x = -\sin(x+\pi) = -\sin(x-\pi)$*,* $\cos x = -\cos(x+\pi) = -\cos(x-\pi)$*.*

Démonstration : Il suffit d'appliquer la proposition 2.41 pour $a = (x + y)/2$ et $b = (x - y)/2$, puis pour $a = -x$ et $b = \pi/2$, puis $a = x$ et $b = \pm\pi$. □

Passons maintenant à l'étude des fonctions sinus, cosinus et tangente. On sait déjà que cosinus est paire et que les deux autres sont impaires. Rappelons que les fonctions sinus, cosinus et tangente sont 2π-périodiques. Au vu du corollaire 2.42, on peut espérer montrer que tangente est π-périodique. Notons tout de suite que si $x \in \mathbb{R} \setminus V$ et $k \in \mathbb{Z}$ alors $x + k\pi \in \mathbb{R} \setminus V$. De plus, $\tan(x + k\pi) = ((-1)^k \sin x)/((-1)^k \cos x) = \tan x$, par le corollaire 2.42. Donc tangente est périodique de période π.
Pour montrer que ces fonctions sont dérivables, on va commencer par vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$. Par définition de sinus et de cosinus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $|\sin x| \leq 1$ et $|\cos x| \leq 1$. Donc si $|x| \geq 1$, l'inégalité cherchée est vraie. On traite maintenant le cas où $|x| \leq 1$. Comme sinus est impaire, il suffit de traiter le cas $0 \leq x \leq 1$. Comme le module $|\phi(x) - 1|$ est inférieur à $|x|$, la mesure algébrique de l'arc de cercle reliant 1 à $\phi(x)$, on a $x^2 \geq |\phi(x)-1|^2 = \sin^2 x + (1-\cos x)^2$, par Pythagore. Donc $x^2 \geq \sin^2 x$ et $|x| \geq |\sin x|$. Montrons maintenant que sinus est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Par le corollaire 2.42 et la propriété précédente,

$$\left|\sin x \;-\; \sin a\right| \;=\; 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \;\leq\; |x-a| .$$

Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 1.16), on en déduit que sinus est continue en a. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.
Notons au passage que la majoration précédente permet en fait de montrer que sinus est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (cf. paragraphe 1.3.3).
Comme $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ par composition et tangente est continue sur son domaine de définition, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas (cf. proposition 1.23).
Avant de passer à la dérivabilité de ces fonctions, on montre que sinus (resp. cosinus) est positive sur $[0; \pi]$ (resp. $[-\pi/2; \pi/2]$). Supposons qu'on ait un $x \in [0; \pi]$ tel que $\sin x < 0$. On a donc $x \in]0; \pi[\setminus \{\pi/2\}$ car $\sin 0 = \sin \pi = 0$ et $\sin(\pi/2) = 1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 1.35), il existe y strictement compris entre x et $\pi/2$, donc $y \in]0; \pi[$, tel que $\sin y = 0$, ce qui contredit la proposition 2.40. Sur $[0; \pi]$, sinus est donc bien positive. Comme $\cos 0 = 1$, le même argument montre que cosinus est positive sur $[-\pi/2; \pi/2]$. En réutilisant la proposition 2.40, on voit que $\sin x > 0$, pour $x \in]0; \pi[$,

et $\cos x > 0$, pour $x \in]-\pi/2;\pi/2[$.
On montre maintenant que sinus est dérivable en 0. Soit $x \in]0;\pi/2[$. On vient de montrer que $\sin x > 0$ et $\cos x > 0$. Dans $\mathbb{C}$, l'aire du morceau de camembert délimité par les segments $[0;1]$, $[0;\phi(x)]$ et l'arc de cercle joignant 1 et $\phi(x)$, est $x/2$. Cette aire est inférieure à celle du triangle rectangle en 1 délimité par les droites $(0\,1)$ et $(0\,\phi(x))$. Cette dernière est $1\cdot|z-1|/2$, où z est le troisième sommet du triangle rectangle. Par Thalès, $|z-1|/\sin x = 1/\cos x$. On obtient donc $x/2 \leq 1\cdot(\sin x)/(2\cos x)$ ce qui donne $(\sin x)/x \geq \cos x$. On a donc $1 \geq (\sin x)/x \geq \cos x$, d'après la propriété précédente. Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 1.16), $\lim_{x\to 0, x>0}(\sin x)/x$ existe et vaut 1. Comme la fonction $0 \neq x \mapsto (\sin x)/x$ est paire, $\lim_{x\to 0, x<0}(\sin x)/x$ existe aussi et vaut 1. La fonction sinus est donc dérivable en 0 de nombre dérivé 1.
Soit $a \in \mathbb{R}$, montrons que sinus est dérivable en a. On a, par le corollaire 2.42, pour $h \neq 0$,

$$\big(\sin(a+h) - \sin a\big)/h \;=\; \big(\sin(a+h) + \sin(-a)\big)/h \;=\; 2\cdot\sin(h/2)\cdot\cos(a+h/2)\cdot(1/h)\,.$$

Par composition, $\lim_{h\to 0, h\neq 0} 2\cdot(\sin(h/2))/h = 1$ et $\lim_{h\to 0, h\neq 0}\cos(a+h/2) = \cos a$ (cf. proposition 1.23). Par produit (cf. proposition 1.23), sinus est dérivable en a de nombre dérivé $\cos a$.
Comme $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, cosinus est, par composition, dérivable sur $\mathbb{R}$ de fonction dérivée $-\sin$ (cf. proposition 2.12). De plus, tangente est, par quotient, dérivable sur son domaine de définition (cf. proposition 2.10) et on a $\tan'(x) = (\cos^2 x + \sin^2 x)/\cos^2 x = 1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$, puisque $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. On vérifie facilement par récurrence que sinus, cosinus et tangente sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.
Comme cosinus est strictement positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$, sinus est strictement croissante sur $[-\pi/2;\pi/2]$. Donc $\sin([-\pi/2;\pi/2]) \subset [\sin(-\pi/2);\sin(\pi/2)] = [-1;1]$. Comme elle est continue sur $[-\pi/2;\pi/2]$, le théorème des valeurs intermédiaires (cf. théorème 1.35) impose que $\sin([-\pi/2;\pi/2]) = [-1;1]$. De plus, elle admet, par le théorème de continuité des fonctions réciproques (cf. théorème 1.41), une bijection réciproque continue $\mathrm{Arcsin} : [-1;1] \longrightarrow [-\pi/2;\pi/2]$, la fonction arcsinus. Comme sinus est dérivable de dérivée non nulle sur $]-\pi/2;\pi/2[$ (cf. proposition 2.40), on déduit des résultats de régularité des fonctions réciproques (cf. propositions 2.26 et 2.13), que arcsinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et que, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\mathrm{Arcsin}'(x) \;=\; \frac{1}{\cos\circ\mathrm{Arcsin}\,x} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\circ\mathrm{Arcsin}\,x}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

puisque, pour $y = \mathrm{Arcsin}\,x \in]-\pi/2;\pi/2[$, $\cos y = +\sqrt{1-\sin^2 y}$. De même, on montre que cosinus est strictement décroissante sur $[0;\pi]$, que, comme elle y est continue, $\cos([0;\pi]) = [\cos 0;\cos\pi] = [-1;1]$. Elle admet donc une bijection réciproque $\mathrm{Arccos} : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi]$, la fonction arccosinus, qui est continue. Cette dernière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et on a, pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\mathrm{Arccos}'(x) \;=\; \frac{1}{-\sin\circ\mathrm{Arccos}\,x} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2\circ\mathrm{Arccos}\,x}} \;=\; \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

puisque, pour $y = \mathrm{Arccos}\,x \in]0;\pi[$, $\sin y = +\sqrt{1-\cos^2 y}$. Toujours par le même raisonnement, tangente est strictement croissante et continue sur $]-\pi/2;\pi/2[$. Comme

$\lim_{x\to\pm\pi/2}\tan x = \pm\infty$, par quotient (cf. proposition 1.23), on montre, grâce au théorème des valeurs intermédiaires, que $\tan(]-\pi/2;\pi/2[) = \mathbb{R}$, qu'elle admet une bijection réciproque $\mathrm{Arctan} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi/2;\pi/2[$, qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qui vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+\tan^2\circ\mathrm{Arctan}\,x} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Voyons maintenant quelques propriétés supplémentaires.

Proposition 2.43. *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\sin(2t) = 2\cdot\sin t\cdot\cos t$, $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cdot\cos^2 t - 1 = 1 - 2\cdot\sin^2 t$, $\sin t = 2\cdot\sin(t/2)\cdot\cos(t/2)$, $\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = 2\cdot\cos^2(t/2) - 1 = 1 - 2\cdot\sin^2(t/2)$.*

Démonstration : On applique la proposition 2.41 à $a = b = t$ puis à $a = b = t/2$. □

Proposition 2.44. *On rappelle que $V = \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Pour $(a,b) \in (\mathbb{R}\setminus V)^2$ tels que $a+b \in \mathbb{R}\setminus V$, $\tan a\cdot\tan b \neq 1$ et*

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\cdot\tan b}\,. \tag{2.6}$$

Démonstration : Pour $x \in \mathbb{R}\setminus V$, $(\tan x = 0) \Longleftrightarrow (\sin x = 0)$. On a vu que $(\sin x = 0) \Longleftrightarrow (x \in \{k\pi; k\in\mathbb{Z}\})$ (cf. proposition 2.40). Donc, si $a \in \{k\pi; k\in\mathbb{Z}\}$ et $b \in \mathbb{R}\setminus V$, $\tan a\cdot\tan b = 0 \neq 1$, $a+b \in \mathbb{R}\setminus V$, et, comme tangente est π-périodique, $\tan(a+b) = \tan b$. (2.6) est donc vraie dans ce cas.
Considérons l'autre cas : $(a,b) \in (\mathbb{R}\setminus V)^2$ tel que $a \notin \{k\pi; k\in\mathbb{Z}\}$ et $a+b \in \mathbb{R}\setminus V$. On a $\tan a \neq 0$. Pour montrer que $\tan a\cdot\tan b \neq 1$, on résoud l'équation $\tan x = 1/\tan a$, d'inconnue x. Soit $c = \pi/2 - a$. Si $c \in V$ alors $c = \pi/2 + k_0\pi$ pour un certain $k_0 \in \mathbb{Z}$. Donc $a = \pi/2 - c = -k_0\pi$, contradiction. Donc $c \in \mathbb{R}\setminus V$ et on a un $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $c \in]\pi/2 + (k_1-1)\pi; \pi/2 + k_1\pi[$ (en fait $k_1 = E((c-\pi/2)/\pi)$, où E désigne la fonction partie entière). De plus, $\tan c = (\sin(\pi/2-a))/(\cos(\pi/2-a)) = (\cos a)/(\sin a) = (\tan a)^{-1}$. On a donc une solution de l'équation $\tan x = 1/\tan a$. Comme tangente est strictement croissante sur chaque intervalle $]\pi/2 + (k-1)\pi; \pi/2 + k\pi[$, pour $k \in \mathbb{Z}$, l'équation y a au plus une solution. Comme $c + (k-k_1)\pi \in]\pi/2 + (k-1)\pi; \pi/2 + k\pi[$ en est une, c'est la seule. L'ensemble des solutions de l'équation $\tan x = 1/\tan a$, d'inconnue x, est donc $\{c + p\pi; p \in \mathbb{Z}\}$.
Si b appartenait à cet ensemble, on aurait, pour un $k_2 \in \mathbb{Z}$, $b = c + k_2\pi = \pi/2 - a + k_2\pi$ soit $a + b = \pi/2 + k_2\pi$, ce qui est exclu par hypothèse. Donc $\tan a\cdot\tan b \neq 1$.
Pour obtenir (2.6) dans le second cas, il suffit de montrer que $(1-\tan a\cdot\tan b)\tan(a+b) = \tan a + \tan b$. Par la proposition 2.41,

$$\begin{aligned}\big(1 - \tan a\cdot\tan b\big)\cdot\tan(a+b) &= \frac{\cos a\cdot\cos b - \sin b\cdot\sin a}{\cos a\cdot\cos b}\cdot\frac{\sin a\cdot\cos b + \sin b\cdot\cos a}{\cos a\cdot\cos b - \sin b\cdot\sin a}\\ &= \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \tan a + \tan b\,.\ \square\end{aligned}$$

Proposition 2.45. *On rappelle que* $V = \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. *Pour* $t \in \mathbb{R} \setminus V$ *tel que* $2t \in \mathbb{R} \setminus V$*,*

$$\tan(2t) \;=\; \frac{2 \cdot \tan t}{1 - \tan^2 t}$$

et si $(t, t/2) \in (\mathbb{R} \setminus V)^2$ *alors*

$$\tan t \;=\; \frac{2 \cdot \tan(t/2)}{1 \;-\; \tan^2(t/2)} \,.$$

Si $t/2 \in \mathbb{R} \setminus V$ *alors*

$$\sin t \;=\; \frac{2 \cdot \tan(t/2)}{1 \;+\; \tan^2(t/2)} \,, \qquad \cos t \;=\; \frac{1 \;-\; \tan^2(t/2)}{1 + \tan^2(t/2)} \,.$$

Démonstration : Les deux premières égalités sont des applications directes de la proposition 2.44. On a vu que $1 + \tan^2(u) = 1/\cos^2 u$, pour $u \notin V$. Pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $t/2 \notin V$, $\sin t = 2 \cdot \sin(t/2) \cdot \cos(t/2) = 2 \cdot \tan(t/2) \cdot \cos^2(t/2) = 2 \cdot \tan(t/2)/(1 + \tan^2(t/2))$. Pour ce même t, $\cos t = \cos^2(t/2) - \sin^2(t/2) = (1 - \tan^2(t/2)) \cos^2(t/2) = (1 - \tan^2(t/2))/(1 + \tan^2(t/2))$. $\square$

Chapitre 3

Applications.

Dans ce chapitre, on va considérer un certain nombre de phénomènes intéressants pour l'étude desquels les propriétés de régularité des fonctions (le fait d'être de classe $\mathcal{C}^k$, pour un certain entier k) sont utiles. Le premier phénomène dit que les fonctions régulières ressemblent à des polynômes ce qui conduit à la notion de développement limité. Ensuite, on s'intéressera au prolongement par continuité de fonctions régulières. Puis vient la notion de convexité où la régularité des fonctions facilitent les choses. Enfin, on s'intéressera aux suites récurrentes qui constituent un exemple de système dynamique.

3.1 Développements limités.

Les développements limités constituent une sorte d'amélioration de la notion d'équivalent introduite au paragraphe 1.2.4. Tandis que les sommes d'équivalents posent problème, les opérations sur les développements limités se comportent bien (cf. paragraphe 3.1.2). Il est donc utile de connaître les développements limités des fonctions usuelles (cf. paragraphe 3.1.3) pour en déduire, via ces bonnes propriétés d'opérations, ceux de fonctions construites à partir de ces fonctions usuelles. Au paragraphe 3.1.4, on verra les principales applications des développements limités, à savoir la levée d'indétermination dans l'étude des limites (qui est plus performante que celle fournie par les équivalents et que celle obtenue par la règle de l'Hospital), l'étude de branche infinie de fonction et une propriété de signe utilisée dans le MA1 pour l'étude des courbes paramétrées.

3.1.1 Définition et unicité.

L'idée de base est de dire qu'une fonction admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un polynôme de la variable $x - a$, de degré inférieur à n, tel que la différence soit négligeable devant $(x-a)^n$.

Définition 3.1. *Soit* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *accessible par* D. *Soit* $D_a = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in$

$D\}$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre *n en a s'il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction $\epsilon : D_a \longrightarrow \mathbb{R}$, tendant vers 0 en 0 (qui est bien accessible par D_a), tels que, pour $h \in D_a$,*

$$f(a+h) \; = \; \sum_{k=0}^{n} a_k h^k \; + \; h^n \epsilon(h) \, . \tag{3.1}$$

Le polynôme $a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n$ s'appelle la partie régulière *du développement limité. La différence entre $f(a+h)$ et la partie régulière du développement est bien un $o(h^n)$.*

Notons que, lorsque $n = 0$, cette définition veut dire exactement "f admet une limite finie en a". Pour $n = 1$ et $a \in D$, elle veut dire exactement "f est dérivable en a" (cf. définition 2.2). Pour $n > 1$, y-a-t-il des fonctions admettant un DL (développement limité) à l'ordre n en a ? Si D est un intervalle non réduit à un point, si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est $(n-1)$ fois dérivable sur D, si $a \in D$ et si $f^{(n)}(a)$ existe alors, par la formule de Taylor-Young à l'ordre n (cf. théorème 2.29), f admet un DL à l'ordre n en a dont la partie principale est le polynôme de Taylor de f à l'ordre n. Réciproquement, on peut se demander si un DL à l'ordre $n \geq 1$ en un point du domaine de définition est toujours donné par une formule de Taylor-Young.
C'est le cas pour $n = 1$. En effet, si $f(a+h) = a_0 + a_1 h + o(h)$ alors $a_0 = \lim_a f$ et, comme f est définie en a, $a_0 = f(a)$ (cf. proposition 1.6). De plus, $a_1 = \lim_{h \to 0, h \neq 0} (f(a+h) - f(a))/h$, donc f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.
C'est faux lorsque $n = 2$. Pour montrer cela, donnons un contre-exemple. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \neq 0$ associe $1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x)$ et à 0 associe 1. Comme $|x \sin(1/x)| \leq |x|$, $\lim_{x \to 0, x \neq 0} x \sin(1/x) = 0$, par le théorème des gendarmes (cf. proposition 1.16), donc $g(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$, près de 0. Cette fonction g a donc bien un DL en 0 à l'ordre 2. On montre maitenant qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0 (donc le DL en 0 à l'ordre 2 ne peut être celui donné par Taylor-Young car celui-ci contiendrait $g''(0)$).
Par somme, produit et composition, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ (cf. propositions 2.23 et 2.25). Comme, pour $x \neq 0$, $(g(x) - g(0))/x = 1 + x + x^2 \sin(1/x)$, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 1$. Pour $x \neq 0$, $(g'(x) - g'(0))/x = (1 + 2x + 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x) - 1)/x = 2 + 3x \sin(1/x) - \cos(1/x)$. Si g' était dérivable en 0 alors, comme $x \sin(1/x)$ tend vers 0, $\phi(x) := \cos(1/x)$ aurait une limite finie ℓ en 0. Par le théorème 1.19, les suites $(\phi((2n\pi)^{-1}))_{n>0}$ et $(\phi((\pi + 2n\pi)^{-1}))_{n>0}$ convergent vers ℓ. Or la première est constante égale à 1 et la seconde est constante égale à -1, contradiction. Donc g' n'est pas dérivable en 0 et g est bien un contre-exemple.
Introduisons une notation qui sera utile pour la suite.

Définition 3.2. *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$ un polynôme à coefficients réels. On appelle tronqué de P à l'ordre k, on note $T_k(P)$, le polynôme $\sum_{0 \leq j \leq \min(k,d)} a_j X^j$.*

Ainsi le tronqué à l'ordre 4 de $X^8 - X^4 - X$ est $-X^4 - X$, celui de X^8 est 0 et celui de $-X^4 - X$ est $-X^4 - X$.
Passons maintenant à deux propriétés importantes : quand un DL existe, il est unique et quand on en a un à un certain ordre, on a tous ceux aux ordres précédents.

Proposition 3.3. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ accessible par D, $n \in \mathbb{N}$, tels que f admette un développement limité en a à l'ordre n. Alors ce développement est unique. De plus, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, f admet un développement limité en a à l'ordre k dont la partie régulière est le tronqué à l'ordre k de la partie régulière du développement à l'ordre n.*

Démonstration : Montrons d'abord l'unicité par récurrence. Soit $\mathcal{P}(p)$ la propriété : "pour toute fonction $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un DL en a à l'ordre p, ce DL est unique". Si $g(a+h) = a_0 + o(h)$ alors $a_0 = \lim_0 g$. Par unicité de la limite (cf. proposition 1.4), on a unicité du DL de g à l'ordre 0 et $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(p-1)$ vraie, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $(a_0, \cdots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $(b_0, \cdots, b_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$, il existe deux fonctions ϵ et η, définies sur D_a et tendant vers 0 en 0, tels que, pour $h \in D_a$,

$$\sum_{k=0}^{p} a_k h^k \;+\; h^p \epsilon(h) \;=\; g(a+h) \;=\; \sum_{k=0}^{p} b_k h^k \;+\; h^p \eta(h)\,.$$

En passant à la limite, quand $h \to 0$, dans les égalités, on obtient $a_0 = \lim_0 g = b_0$. Donc, pour $h \in D_a^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{p} a_k h^{k-1} \;+\; h^{p-1} \epsilon(h) \;=\; (g(a+h) - a_0)/h \;=\; \sum_{k=1}^{p} b_k h^{k-1} \;+\; h^{p-1} \eta(h)$$

et $\ell := \lim_{h \to 0, h \neq 0} (g(a+h) - a_0)/h$ existe dans $\mathbb{R}$ (c'est $a_1 = b_1$). La fonction $G : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \in D \setminus \{a\}$ associe $(g(x) - a_0)/(x-a)$ et, si $a \in D$, associe à a la limite ℓ. On peut appliquer à G l'hypothèse de récurrence ce qui donne que, pour tout $k \in [\![1; p]\!]$, $a_k = b_k$. Comme on a déjà $a_0 = b_0$, on en déduit que le DL de g à l'ordre p est unique et $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. On peut donc appliquer $\mathcal{P}(n)$ à f.
Si, pour $h \in D_a$,

$$f(a+h) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j h^j \;+\; h^n \epsilon(h)\,,$$

pour $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $\epsilon : D_a \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0, alors, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$,

$$f(a+h) \;=\; \sum_{j=0}^{k} a_k h^j + \sum_{j=k+1}^{n} a_k h^j + h^n \epsilon(h) \;=\; \sum_{j=0}^{k} a_k h^j + h^k \left(\sum_{j=k+1}^{n} a_k h^{j-k} \;+\; h^{n-k} \epsilon(h) \right).$$

Comme le terme entre paranthèse tend vers 0 en 0, f admet bien un DL en a à l'ordre k de partie régulière $\sum_{j=0}^{k} a_k h^j$, qui n'est autre que le tronqué à l'ordre k de $\sum_{j=0}^{n} a_j h^j$, la partie régulière du DL à l'ordre n. $\square$

Il est utile de remarquer que l'on peut se contenter d'étudier les DL en 0 pour connaître ceux en a, pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque. On utilise pour cela la même idée que pour le corollaire 1.27. Soit $\tau_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\tau_a(x) = x + a$. On a vu, au paragraphe 1.1.6, que τ_a est bijective et $(\tau_a)^{-1} = \tau_{-a}$. De plus, τ_a est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, d'après le corollaire 2.11. Soit $D \subset \mathbb{R}$ tel que a soit accessible par D et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On peut construire l'application $g : \tau_{-a}(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $h \in \tau_{-a}(D)$ associe $f(\tau_a(h)) = f(a+h)$. Évidemment, $\tau_{-a}(D)$ n'est autre que le D_a introduit dans la définition 3.1. De plus, 0 est accessible par $\tau_{-a}(D)$ (cf. paragraphe 1.1.6). On a alors la

Proposition 3.4. *Dans les conditions précédentes, on prend un* $n \in \mathbb{N}$*. On a l'équivalence suivante : (*f *admet un développement limité en* a *à l'ordre* n*)* $\Longleftrightarrow$ *(*g *admet un développement limité en* 0 *à l'ordre* n*). Dans le cas où l'une des propriétés est vraie (donc les deux le sont), alors il existe* $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *et une fonction* $\eta : D_a = \tau_{-a}(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ *tendant vers* 0 *en* 0 *tels que, pour tout* $x \in D$*,*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k \;+\; (x-a)^n\eta(x-a) \tag{3.2}$$

d'une part, et, pour tout $h \in D_a = \tau_{-a}(D)$*,*

$$g(h) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k h^k \;+\; h^n\eta(h) \tag{3.3}$$

d'autre part.

Démonstration : On a (f admet un DL en a à l'ordre n) $\Longleftrightarrow$ (il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et une fonction $\epsilon : D_a \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0 tels que (3.1) soit valide pour $h \in D_a = \tau_{-a}(D)$). Par définition de g, cette dernière propriété est équivalente à l'existence d'un DL en 0 à l'ordre n pour g.
Lorsque f admet un DL en a à l'ordre n donné par (3.1), pour $h \in D_a = \tau_{-a}(D)$, alors on a (3.3), pour $h \in D_a = \tau_{-a}(D)$. En écrivant tout $h \in D_a = \tau_{-a}(D)$ comme $\tau_{-a}(x)$ pour un (unique) $x \in D$, (3.3) prend la forme de (3.2). □

Notons que l'on ne suppose pas, dans la définition 3.1, que $a \in D$. Ce n'est pas très étonnant puisque cette définition dit essentiellement qu'une certaine limite en a existe (et vaut 0) et on sait considérer des limites en $a \notin D$. Un autre avantage est que, dans le cadre de la définition 3.1, on peut sans difficulté considérer les DL en a de la restriction de f à $D \cap]a; +\infty[$. Pour illustrer ce dernier point, imaginons qu'on ait besoin de connaître le comportement près de 0 de la fonction $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui à t associe $\mathrm{ch}\, t$. Grâce à la définition 3.1, on peut considérer les DL de cette fonction en 0 qui seront les restrictions à $]0; +\infty[$ des DL de ch.
Pour terminer ce paragraphe, donnons un exemple de fonction qui n'admet en un point aucun DL. C'est l'objet de l'

Exercice 3.1. : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par l'absurde que le logarithme népèrien ln n'admet pas de DL en 0 à l'ordre n.

3.1.2 Opérations sur les développements limités.

Dans ce paragraphe, on va voir que le fait d'avoir un DL en un point se transmet bien par les opérations usuelles sur les fonctions (somme, produit, passage à l'inverse, composition et primitivation). De plus, le calcul explicite du DL du résultat se fait relativement bien. Afin de faciliter la présentation des résultats, on ne considère que des DL en 0 (ce qui n'est pas restrictif d'après la proposition 3.4).

Proposition 3.5 (Somme et produit). *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ telle que 0 soit accessible par D. Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour $x \in D$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ près de 0, avec*

$$P(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad et \quad Q(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} b_k x^k\,. \tag{3.4}$$

Alors $f+g$ et fg admettent un développement limité en 0 à l'ordre n. Ils sont donnés par, pour $x \in D$,

$$(f+g)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k \;+\; o(x^n) \;=\; (P+Q)(x) \;+\; o(x^n)\,, \tag{3.5}$$

$$(fg)(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k \;+\; o(x^n) \;=\; T_n(PQ)(x) \;+\; o(x^n)\,. \tag{3.6}$$

En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λf admet aussi un développement limité en 0 à l'ordre n donné par, pour $x \in D$,

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) x^k \;+\; o(x^n)\,.$$

Démonstration : Il existe deux fonctions $\epsilon, \eta : D \longrightarrow \mathbb{R}$, tendant vers 0 en 0, telles que $f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$ et $g(x) = Q(x) + x^n \eta(x)$.
Montrons (3.5). Comme, par somme (cf. proposition 1.23), $\eta + \epsilon$ tend vers aussi vers 0, on obtient (3.5). Passons à (3.6). On a, pour $x \in D$,

$$(fg)(x) \;=\; (PQ)(x) \;+\; x^n \cdot \big(P(x)\eta(x) \;+\; Q(x)\epsilon(x) \;+\; x^n \epsilon(x)\eta(x) \big)\,,$$

où le terme entre paranthèse tend vers 0 en 0, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 1.23). De plus,

$$\begin{aligned}
(PQ)(x) \;&=\; \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k \\
&=\; \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k \;+\; x^n \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^{k-n}\,,
\end{aligned}$$

où le dernier terme est un $o(x^n)$ en 0, grâce aux opérations sur les limites (cf. proposition 1.23). On a donc montré (3.6).
Pour le DL de λf, il suffit d'utiliser (3.6) pour la fonction f et la fonction g constante égale à λ, dont le DL à l'ordre n est $g(x) = \lambda + o(x^n)$. □

Voici maintenant une remarque dont il est utile de se souvenir dans les applications.

Corollaire 3.6. *La partie régulière du développement limité en 0 d'une fonction paire (resp. impaire) est un polynôme pair (resp. impair), c'est-à-dire que les coefficients des puissances impaires (resp. paires) de la variable sont nuls.*

Démonstration : On traite seulement le cas f paire et $n \geq 1$. Les petits o sont tous près de 0. Si l'on a

$$f(x) \; = \; \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \; + \; o(x^n) \quad \text{alors} \quad f(-x) \; = \; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + \; o(x^n)$$

et, par somme (cf. proposition 3.5),

$$f(x) \; = \; \frac{f(x) + f(-x)}{2} \; = \; \sum_{k=0}^{n} \frac{1 + (-1)^k}{2} a_k x^k \; + \; o(x^n) \; ,$$

où les coefficients des puissances impaires sont, pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $2p+1 \leq n$, de la forme $a_{2p+1}(1 + (-1)^{2p+1})/2 = a_{2p+1}(1 + (-1))/2 = 0$. □

Passons maintenant à la "primitivation" où le résultat est aussi particulièrement simple.

Proposition 3.7 (Intégration). *Soit I un* **intervalle** *de $\mathbb{R}$, non réduit à un point et contenant 0. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour $x \in I$,*

$$f(x) \; = \; \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \; + \; o(x^n)$$

près de 0 et si $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f (i.e. $F' = f$) alors F admet un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ donné par

$$F(x) \; = \; F(0) \; + \; \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k \; + \; o(x^{n+1}) \; .$$

Autrement dit, la partie régulière du développement limité à l'ordre $n+1$ d'une primitive est une primitive de la partie régulière du développement limité à l'ordre n.

Démonstration : Posons, pour $x \in I$,

$$B(x) \; = \; F(0) \; + \; \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k \quad \text{et} \quad G(x) \; = \; F(x) - B(x) \; .$$

G est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$G'(x) \; = \; F'(x) \; - \; \sum_{k=1}^{n+1} a_{k-1} x^{k-1} \; = \; x^n \epsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$, d'après l'hypothèse sur f. De plus, $G(0) = 0$. Donc, d'après le théorème des accroissement finis (cf. théorème 2.17), pour chaque $x \in I \setminus \{0\}$, il existe $\theta \in]0; 1[$, dépendant de x, tel que $G(x) = xG'(\theta x)$. Ainsi $G(x) = x(\theta x)^n \epsilon(\theta x) = x^{n+1} \theta^n \epsilon(\theta x)$. Il suffit de montrer que $\lim_{x \to 0} \theta^n \epsilon(\theta x) = 0$. Soit $\eta > 0$. Comme $\lim_0 \epsilon = 0$, on peut trouver

$\delta > 0$ tel que, pour $y \in I \cup]-\delta;\delta[$, $|\epsilon(y)| < \eta$. Pour $x \in I \cup]-\delta;\delta[$, $\theta x \in I \cup]-\delta;\delta[$ donc $|\theta^n \epsilon(\theta x)| \le |\epsilon(\theta x)| < \eta$. □

Qu'en est-il de la dérivation ? A-t-on une propriété du type : "si f admet un DL à l'ordre n alors f' admet un DL à l'ordre $n-1$ donc la partie régulière est la dérivée de la première partie régulière." ? La réponse est non car, en prenant pour f la fonction :

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & 1 + x + x^2 + x^3 \sin(1/x) & \text{si}\, x \neq 0 \\ & & 0 & \text{si}\, x = 0\,, \end{array}$$

vue au début du paragraphe 3.1.1, qui a bien un DL à l'ordre 2 mais dont la dérivée seconde en 0 n'existe pas, la fonction f' n'a pas de DL à l'ordre 1, puisque qu'elle n'est pas dérivable en 0. En revanche, si l'on suppose que f a un DL à l'ordre n et f' a un DL à l'ordre $n-1$ alors, par la proposition 3.7, la partie régulière du second est la dérivée de la partie régulière du premier.

Venons en à la composition de fonctions. Essentiellement, on veut, pour $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f a un DL en $a \in \mathbb{R}$ et g a un DL en $f(a)$, pouvoir établir que $g \circ f$ admet un DL en a et un moyen de calculer ce DL. Voyons tout d'abord comment, grâce à la proposition 3.4, on peut se ramener à des DL en 0. Soit $f_1(h) := f(a+h)$, elle a un DL en 0. Soit $g_1(k) := g(f(a)+k)$, elle a un DL en 0. On a $(g \circ f)(a+h) = g_1(f_1(h) - f(a))$ sachant que les fonctions g_1 et $h \mapsto f_1(h) - f(a)$ ont un DL en 0. Si, dans ce cas, la composée $h \mapsto g_1(f_1(h) - f(a))$ en a un en 0, alors $h \mapsto (g \circ f)(a+h)$ en a un aussi et, par la proposition 3.4, on récupère un DL de $g \circ f$ en a. Notons qu'il est **essentiel** ici de considérer la fonction $g_1(f_1(h) - f(a))$ et non pas $g_1(f_1(h))$, car si $f(a) \neq 0$, un DL de $g_1(f_1(h))$ ne nous donne pas d'information sur la fonction $g \circ f$ près de a.

Proposition 3.8 (Composition)**.** *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ telle que 0 soit accessible par D. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que* $\lim_0 f = 0$ *(si $0 \in D$, cela impose $f(0) = 0$). En particulier, 0 est accessible par $f(D)$. Soit $g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que, pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour $x \in D$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ près de 0 et, pour $y \in f(D)$, $g(y) = Q(y) + o(y^n)$ près de 0, avec*

$$P(x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \quad \textit{et} \quad Q(y) \;=\; \sum_{m=0}^{n} b_m y^m\,.$$

Alors $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n donné par, pour $x \in D$, $(g \circ f)(x) = T_n(Q \circ P)(x) + o(x^n)$, où

$$(Q \circ P)(x) \;=\; \sum_{m=0}^{n} b_m \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k \right)^m\,.$$

Démonstration : Lorsque $n = 0$, $(g \circ f)(x) = b_0 + o(1)$ est bien le DL en 0 de $g \circ f$ puisque $\lim_0 g \circ f = b_0$. On suppose désormais que $n \ge 1$. Soit $\epsilon : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\eta : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$ et $g(y) = Q(y) + y^n \eta(y)$. Comme $P(0) = 0$, on a, d'après les opérations sur les limites (cf. proposition 1.23), $\lim_{x\to 0} \eta(P(x)+x^n\epsilon(x)) = 0$. De plus, pour $x \in D$,

$$\big(P(x)+x^n\epsilon(x)\big)^n \;=\; x^n\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^{k-1} \;+\; x^{n-1}\epsilon(x)\right)^n .$$

Grâce aux opérations sur les limites (cf. proposition 1.23), pour $x \in D$,

$$\big(P(x)+x^n\epsilon(x)\big)^n\cdot\eta\big(P(x)+x^n\epsilon(x)\big) \;=\; o(x^n)$$

et

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(x) \;&=\; \sum_{m=0}^{n} b_m\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \;+\; x^n\epsilon(x)\right)^m \;+\; o(x^n)\\
&=\; \sum_{m=0}^{n} b_m \sum_{p=0}^{m} C_m^p\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^p\cdot\big(x^n\epsilon(x)\big)^{m-p} \;+\; o(x^n)\\
&=\; \sum_{m=0}^{n} b_m\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^m\\
&\quad\; + x^n\cdot\sum_{m=0}^{n} b_m \sum_{p=0}^{m-1} C_m^p\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)^p\cdot x^{n(m-p-1)}\big(\epsilon(x)\big)^{m-p} \;+\; o(x^n)\\
&=\; (Q\circ P)(x) \;+\; o(x^n)\,.
\end{aligned}$$

En reprenant la fin de la preuve de (3.6) (cf. la preuve de la proposition 3.5), on obtient $(g\circ f)(x) = T_n(Q\circ P)(x) + o(x^n)$. □

Comme on l'a dit avant l'énoncé de la proposition 3.8, il faut bien prendre garde à la condition $f(0) = 0$ quand on substitue. Par exemple, pour calculer le développement limité de $e^{\cos x}$ en 0 à l'ordre 3, si on écrit

$$e^{\cos x} = 1 + (1-x^2/2) + \frac{(1-x^2/2)^2}{2!} + \frac{(1-x^2/2)^3}{3!} + o(x^3) = \frac{8}{3} - \frac{5}{4}x^2 + o(x^3)\,,$$

ON A TOUT FAUX ! En effet, $\cos 0 = 1 \neq 0$. Correct est

$$e^{\cos x} \;=\; e\left(e^{\cos x - 1}\right) \;=\; e\big(1 + (-x^2/2) + o(x^3)\big) \;=\; e - ex^2/2 + o(x^3)\,.$$

On constate ici que l'on gagne même en précision : on a déjà le développement limité à l'ordre 3 en substituant $\cos x - 1$ dans le développement limité à l'ordre 1 de e^x. Ceci vient du fait que $\cos x - 1 = O(x^2)$ quand $x \to 0$. Dans le même ordre d'idée, la partie régulière du développement limité de $f(x^2)$ à l'ordre $2n+1$ en 0 s'obtient en substituant x^2 à x dans la partie régulière du développement limité de $f(x)$ à l'ordre n.

La dernière opération que l'on considère est le quotient. On va tout d'abord montrer, sous certaines conditions, l'existence du développement d'un quotient. Ensuite, pour le calcul pratique de ce développement, on verra qu'on dispose de deux méthodes, la première étant fournie par le résultat d'existence, la seconde effectuant un passage à l'inverse par composition. Pour le résultat d'existence, on a besoin du

Lemme 3.9. *Soit A, B deux polynômes à coefficients réels avec $B(0) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes à coefficients réels tel que le degré de Q soit inférieur à n et $A = BQ + X^{n+1}R$. On appelle Q le quotient et R le reste de cette division de A par B, dite division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A par B.*

Démonstration : En admettant l'existence (que l'on prouvera ci-dessous), on montre l'unicité du couple (Q, R). Si l'on a $A = BQ_1 + X^{n+1}R_1 = BQ_2 + X^{n+1}R_2$, avec Q_1 et Q_2 de degré inférieur à n, alors $B(Q_2 - Q_1) = X^{n+1}(R_1 - R_2)$. Comme $B(0) \neq 0$, 0 est racine $(n + 1)$ième de $Q_2 - Q_1$ qui est de degré inférieur à n. Forcément, $Q_2 = Q_1$ et $0 = X^{n+1}(R_1 - R_2)$. Cette dernière égalité est la division euclidienne de 0 par X^{n+1} qui est aussi $0 = X^{n+1} \cdot 0 + 0$. Donc, par unicité de la division euclidienne, $R_1 = R_2$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété "pour tous polynômes A et B avec $B(0) \neq 0$, il existe un couple (Q, R) de polynômes tel que le degré de Q soit inférieur à n et $A = BQ + X^{n+1}R$". On a $A = A(0) + (A - A(0)) = A(0) + XR_1$, pour un certain polynôme R_1, et $B = B(0) + (B - B(0)) = B(0) + XR_2$, pour un certain polynôme R_2. Comme $B(0) \neq 0$,

$$A = \frac{A(0)}{B(0)} \cdot B(0) + XR_1 = \frac{A(0)}{B(0)} \cdot \big(B - XR_2\big) + XR_1 = \frac{A(0)}{B(0)} \cdot B + X\left(-\frac{A(0)}{B(0)}R_2 + R_1\right).$$

Comme le polynôme constant $Q = A(0)/B(0)$ est de degré nul, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n-1)$ soit vraie. Soit A et B deux polynômes. Par hypothèse de récurrence, on a donc deux polynômes $\tilde{Q}$ et $\tilde{R}$ tels que le degré de $\tilde{Q}$ soit inférieur à $n - 1$ et $A = B\tilde{Q} + X^n\tilde{R}$. D'après $\mathcal{P}(0)$ pour les polynômes $\tilde{R}$ et B, il existe (Q_1, R_1) tel que Q_1 est un polynôme constant et $\tilde{R} = BQ_1 + XR_1$. Donc, $A = B\tilde{Q} + X^n\tilde{R} = B(\tilde{Q} + Q_1X^n) + X^{n+1}R_1$. Comme le degré de $\tilde{Q} + Q_1X^n$ est inférieur à n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n. $\square$

Le calcul pratique du couple (Q, R) suit la preuve précédente donc se fait en singeant la division euclidienne des polynômes mais en rangeant les puissances dans l'ordre croissant. Voir l'exemple traité au paragraphe 3.1.3.

Proposition 3.10 (Quotient)**.** *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ telle que 0 soit accessible par D. Soit $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour $x \in D$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ près de 0, avec*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad et \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k .$$

On suppose de plus que $b_0 = \lim_0 g \neq 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que f/g est définie sur $D_\delta = D \cap]-\delta; \delta[$ et admet un développement limité en 0 à l'ordre n donné par, pour $x \in D_\delta$, $(f/g)(x) = Q_1(x) + o(x^n)$, où Q_1 est le quotient du reste de la division à l'ordre n selon les puissances croissantes de P par Q.

Démonstration : Comme $\lim_0 g \neq 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $1/g$ soit définie sur D_δ (cf. proposition 1.20). Soit $P(x) = Q(x)Q_1(x) + x^{n+1}R_1(x)$ la division à l'ordre n, selon les puissances croissantes de P par Q. Pour $x \in D_\delta$ et des fonctions $\epsilon, \eta : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tendant vers 0 en 0,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{P(x)+x^n\epsilon(x)}{Q(x)+x^n\eta(x)} = \frac{Q(x)Q_1(x)+x^{n+1}R_1(x)+x^n\epsilon(x)}{Q(x)+x^n\eta(x)} \\
&= \frac{Q(x)Q_1(x)+x^n\eta(x)Q_1(x)}{Q(x)+x^n\eta(x)} + \frac{-x^n\eta(x)Q_1(x)+x^{n+1}R_1(x)+x^n\epsilon(x)}{Q(x)+x^n\eta(x)} \\
&= Q_1(x) + x^n \cdot \frac{-\eta(x)Q_1(x)+xR_1(x)+\epsilon(x)}{Q(x)+x^n\eta(x)} = Q_1(x)+o(x^n),
\end{aligned}$$

puisque la fraction tend vers 0, par les opérations sur les limites (cf. proposition 1.23). □

Esquissons maintenant l'autre méthode pour calculer les DL de quotient (voir paragraphe 3.1.3 pour des exemples). Dans les conditions de la proposition 3.10, on écrit, pour $x \in D_\delta$,

$$f(x)/g(x) = \frac{f(x)/g(0)}{1+(g(x)-g(0))/g(0)} .$$

Comme la fonction $(g(x)-g(0))/g(0)$ s'annule en 0, on peut effectuer la composition avec le DL en 0 de la fonction $y \mapsto 1/(1+y)$, en utilisant la proposition 3.8. Ensuite il suffit de multiplier le résultat par le DL de f en 0 selon la proposition 3.5.

3.1.3 Développements limités des fonctions usuelles.

À l'aide de formules de Taylor-Young (cf. paragraphe 2.3.3) et des opérations vues au paragraphe 3.1.2, on va établir un catalogue de développements limités en 0 pour les fonctions usuelles introduites dans la partie 2.4. Il est utile de les connaître par coeur ou de pouvoir les retrouver rapidement.

Commençons par les fonctions polynômes. Comme elles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut, en tout point $a \in \mathbb{R}$, appliquer la formule de Taylor-Young (cf. théorème 2.29). On a donc un DL à tout ordre. Faisons-le explicitement. Pour le polynôme nul, toutes les parties régulières des DL sont nulles. Soit

$$P = \sum_{p=0}^{d} a_p X^p$$

un polynôme à coefficients réels de degré $d \geq 0$ (on suppose donc $a_d \neq 0$). Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$P(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} h^k + h^n \epsilon_n(h)$$

pour une fonction ϵ_n définie sur $\mathbb{R}$ et tendant vers 0 en 0. Pour $n \geq d$, on a en fait $\epsilon_n = 0$! ! Pour voir cela, notons que $P(a+h)$ est un polynôme en h de degré inférieur à d car

$$P(a+h) = \sum_{p=0}^{d} a_p (a+h)^p = \sum_{p=0}^{d} a_p \cdot \sum_{q=0}^{p} C_p^q a^{p-q} h^q .$$

D'autre part, $P^{(k)}(a) = 0$ pour $k > d$ (cf. corollaire 2.11), donc le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} h^k$$

est au plus de degré d. La fonction $f(h) = h^n \epsilon_n(h)$, étant la différence de deux fonctions polynômes de degré inférieur à d, est elle-même une fonction polynôme de degré inférieur à d. 0 est racine de cette fonction polynôme. Soit s son ordre. Il existe donc une fonction polynôme g ne s'annulant pas en 0 telle que $f(h) = h^s g(h)$, pour tout h. Comme, en 0, ϵ_n tend vers 0 et g tend vers $g(0) \neq 0$, on a $s \neq n$. On montre que $s > n$. Comme $g(0) \neq 0$, on a par exemple $g(0) < 0$. Par produit (cf. proposition 1.23), $\lim_{h\to 0^+} f(h)/h^{s+1} = -\infty$ et $\lim_{h\to 0^-} f(h)/h^{s+1} = +\infty$, donc $\lim_{h\to 0} f(h)/h^{s+1}$ n'existe pas. Or $f(h)/h^{s+1} = h^{n-s-1}\epsilon_n(h)$ donc, si $s \leq n-1$ alors $\lim_{h\to 0} f(h)/h^{s+1}$ existe et vaut 0, par produit (cf. proposition 1.23). On arrive à une contradiction. On a donc montré que $s > n$. Or $n \geq d$ donc le polynôme $f(h)$ de degré au plus d a 0 pour racine de multiplicité $s > d$ donc ce polynôme est nul. Donc, pour $n \geq d$, on a la formule exacte

$$\boxed{P(a+h) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} h^k \;=\; \sum_{k=0}^{d} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} h^k\,.}$$

Bien sûr, tout ceci est valable en $a = 0$. Par unicité des DL, on trouve que, pour tout $p \in [\![0; d]\!]$, $a_p = P^{(k)}(0)/(p!)$.

Passons maintenant aux fonctions introduites dans la partie 2.4 et concentrons nous sur les DL en 0.

Pour $f(x) = e^x$ (qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), on a $f^{(k)}(x) = e^x$ et $f^{(k)}(0) = 1$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, et la formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit :

$$\boxed{e^x \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \;+\; o(x^n)\,.}$$

Comme $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ et $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$, on obtient par la proposition 3.5,

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{ch} x \;&=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \;+\; o(x^{2n+1})\,, \\ \operatorname{sh} x \;&=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \;+\; o(x^{2n+2})\,, \end{aligned}}$$

ce qui est bien en accord avec le corollaire 3.6. D'après l'étude des fonctions sinus et cosinus, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\cos)^{(2k)} = (-1)^k \cos$, $(\cos)^{(2k+1)} = (-1)^{k+1} \sin$, $(\sin)^{(2k)} = (-1)^k \sin$ et $(\sin)^{(2k+1)} = (-1)^k \cos$. On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(\cos)^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $(\cos)^{(2k+1)}(0) = 0$, $(\sin)^{(2k)}(0) = 0$, $(\sin)^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Par Taylor-Young,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) , \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) , \end{aligned}}$$

ce qui est aussi en accord avec le corollaire 3.6.

Soit α un nombre réel. Alors $f(x) = (1+x)^\alpha$ définit une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ donc $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$. La formule de Taylor avec reste de Young à l'ordre n en 0 s'écrit

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) .}$$

Ainsi, pour $\alpha = -1$,

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)}$$

et, par intégration (cf. proposition 3.7),

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) .}$$

Pour $\alpha = -1/2$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

on tire, encore par intégration,

$$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6) .$$

Exercice 3.2. : En partant du DL en 0 à l'ordre 4 de $(1+x^2)^{1/2}$, déterminer le DL en 0 à l'ordre 6 de Argsh.

De

$$\boxed{\begin{aligned}(1-x^2)^{-1} &= \sum_{k=0}^{n} x^{2k} + o(x^{2n+1}) , \\ (1+x^2)^{-1} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}) ,\end{aligned}}$$

on tire, par intégration,

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{Argth} x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) , \\ \operatorname{Arctan} x &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) .\end{aligned}}$$

Pour la fonction tangente, on dispose de trois méthode pour déterminer son DL en 0 à l'ordre 6. Premièrement, on peut utiliser la formule de Taylor-Young (c'est un calcul assez lourd). On peut aussi utiliser les DL de sinus et cosinus et appliquer la proposition 3.10, comme on va le voir. Enfin, on peut utiliser pour ce quotient la méthode qui utilise une composition (cf. Exercice 3.3).
On se souvient que tan est impaire (il y aura des termes en x, x^3 et x^5 uniquement). Quand on effectue la division suivant les puissances croissantes, on n'a pas à s'embarrasser des termes de degré dépassant celui qu'on cherche, ici 5 (le reste ne nous intéresse pas).

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
x & - & x^3/6 & + & x^5/120 & 1 & - & x^2/2 & + & x^4/24 \\
x & - & x^3/2 & + & x^5/24 & x & + & x^3/3 & + & 2x^5/15 \\
\hline
 & & x^3/3 & - & x^5/30 & & & & & \\
 & & x^3/3 & - & x^5/6 & & & & & \\
\hline
 & & & & 2x^5/15 & & & & &
\end{array}$$

De cette division, on tire, par la proposition 3.10, la formule (qu'il n'est pas mauvais de connaître par coeur)

$$\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6) .}$$

Exercice 3.3. : Retrouver le DL de tangente en 0 à l'ordre 6 en utilisant le DL en 0 à l'ordre 6 de $1/(1-y)$.

Notons que l'on peut traiter de manière analogue la fonction tangente hyperbolique.

Exercice 3.4. : Déterminer le DL en 0 à l'ordre 6 de la tangente hyperbolique.

Quand on est au voisinage de a, on fait le changement de variables $x = a + h$ et on écrit des développements limités en 0 pour la variable h. Par exemple, pour obtenir le développement limité de $\tan x$ en $\pi/4$ à l'ordre 2, on écrit

$$\begin{aligned}
\tan(\pi/4 + h) &= \Big(\tan(\pi/4) + \text{tanh}\Big) / \big(1 - \tan(\pi/4)\tan h\big) = \frac{1 + \tan h}{1 - \tan h} \\
&= \frac{1 + h + o(h^2)}{1 - h + o(h^2)} = \big(1 + h + o(h^2)\big) \cdot \big(1 + h + h^2 + o(h^2)\big) \\
&= 1 + 2h + 2h^2 + o(h^2),
\end{aligned}$$

lorsque $h \to 0$. On peut aussi écrire

$$\tan x = 1 + 2(x - \pi/4) + 2(x - \pi/4)^2 + o\left((x - \pi/4)^2\right),$$

lorsque $x \to \pi/4$.

Les règles de calcul sur les développements limités sont mécaniques, et on peut les programmer : les systèmes de calcul formel permettent de calculer des développements limités sans effort !

Quand on fait les calculs à la main, il y a des pièges classiques dans lesquels il vaut mieux ne pas tomber. On a signalé plus haut une erreur à éviter dans le cas de substitutions. Un point important à garder à l'esprit est : *à quel ordre sont les développements limités ?* Il faut *toujours écrire les restes*, pour garder l'ordre en mémoire. Par exemple une écriture du genre

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

EST ABSOLUMENT A PROSCRIRE. Elle conduit inévitablement à des calculs comme

$$\sin^2 x \approx x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}$$

qui font croire que l'on a comme ceci le développement limité de $\sin^2 x$ à l'ordre 6 (que vaut-il, pour de vrai ?).

3.1.4 Utilisation des développements limités.

Dans ce paragraphe, on donne des exemples d'applications des développements limités. Tout d'abord, ils servent à lever certaines indéterminations dans les études de limites (cf. paragraphe 1.1.6). On étudie aussi le cas de limites à l'infini pour lequel on effectue des "développements limités à l'infini". Ensuite, on considère deux autres applications, vues en MA1 : à la position des courbes paramétrées par rapport à leur tangente et aux branches infinies de fonction.

Pour l'étude de limite en $a \in \mathbb{R}$, on peut toujours se ramener au cas où $a = 0$ en changeant de fonction (cf. corollaire 1.27) donc on se concentre sur l'étude de limites en 0. On développe une stratégie d'étude des indéterminations du type "0/0", que l'on compare

avec la règle de l'Hospital (cf. proposition 2.20).
Afin de ne pas compliquer inutilement la situation, considérons deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, tendant vers 0 en 0, g ne s'annulant qu'en 0. On veut étudier $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x)/g(x)$ en utilisant les DL en 0 de f et g.
Notons que si l'on a $f(x) = o(x^2)$ et $g(x) = o(x^2)$, ces DL ne nous permettent pas de lever l'indétermination. Il en va de même si $f(x) = o(x^2)$ et $g(x) = o(x^3)$. Ce qui gêne est l'imprécision causé par un DL de partie régulière nulle. C'est pourquoi, on introduit la notion suivante : on dit que f a *une partie principale en* 0 s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que la partie régulière du DL de f à l'ordre n est non nulle. Dans ce cas, *la partie principale de f en* 0 est la partie régulière du DL du plus petit de ces n. Par exemple, les parties régulières des DL de $1 - \cos x$ en 0 aux ordres 0 et 1 sont nulles. En revanche, celle du DL en 0 à l'ordre 2 n'est pas nulle donc c'est la partie principale de $1 - \cos x$ en 0.
On suppose maintenant que $a_k x^k$ et $b_j x^j$, avec $(k, j) \in \mathbb{N}^2$ et $(a_k, b_j) \in (\mathbb{R}^*)^2$, sont les parties principales de f et g, respectivement. Pour $x \neq 0$, on a donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{k-j} \cdot \frac{a_k + o(1)}{b_j + o(1)},$$

où la fraction tend vers le réel a_k/b_j. Il y a donc trois cas : lorsque $k > j$, f/g tend vers 0 ; lorsque $k = j$, f/g tend vers a_k/b_j ; lorsque $k < j$, les limites à droite et à gauche de f/g en 0 existent et sont infinies. Dans ce dernier cas, si $j - k$ est pair, elles sont égales et la limite en 0 de f/g existe et si $j - k$ est impair, elles sont différentes et la limite en 0 de f/g n'existe pas. Dans chaque cas, on a utilisé les opérations sur les limites (cf. proposition 1.23).
L'avantage de la méthode précédente par rapport à l'utilisation des équivalents (cf. paragraphe 1.2.4) est que l'on peut l'appliquer quand la fonction f est une somme de fonctions simples, ce qui pose problème pour trouver un équivalent de f. D'autre part, on a remarqué que, lorsqu'on utilise la règle de l'Hospital, il faut parfois l'utiliser plusieurs fois et cela peut rendre les calculs compliqués (cf. exercice 2.11) et même plus compliqués que les calculs de DL de la méthode précédente.

Exercice 3.5. : Utiliser la stratégie précédente pour étudier les limites des exercices 2.4 et 2.11, à savoir

$$\lim_{\substack{x\to\pi \\ x\neq\pi}} \frac{1+\cos x}{x-\pi}, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{sh} x}{\sin x}, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{x^2 \sin 1/x}{\sin x},$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{\tan x - x}{(\operatorname{sh} x)^2}, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\ln(1+x) - \sin x}, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{\operatorname{sh} x - \sin x}{\ln(1+x^2) - x\sin x}.$$

Peut-on adapter la stratégie précédente lorsque $a = +\infty$, par exemple ? Si l'on pose, pour $t > 0$, $f_1(t) = f(1/t)$ et $g_1(t) = g(1/t)$, on peut étudier $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x)$ à partir de l'étude de $\lim_{t\to 0} f_1(t)/g_1(t)$. En effet, si cette dernière existe et vaut $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim_{t\to 0^+} f_1(t)/g_1(t) = \ell$ et, par composition (cf. proposition 1.23), $\lim_{x\to+\infty} f(x)/g(x) = \ell$. Maintenant l'étude de $\lim_{t\to 0} f_1(t)/g_1(t)$ peut se faire par la méthode précédente.

Exercice 3.6. : Utiliser la méthode précédente pour étudier

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh}(1/x) - \tan(1/x)}{\ln(1+1/x)}.$$

On a utilisé dans le MA1 des DL “vectoriels” afin de préciser la position d’une courbe paramétrée par rapport à sa tangente en un point. En particulier, on a utilisé une propriété de signe qui est la suivante.

Proposition 3.11. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ telle que 0 soit accessible par D. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que, pour $x \in D$, $f(x) = P(x) + o(x^n)$ près de 0, avec $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On suppose que P n’est pas le polynôme nul. Soit $v = \min\{k \in [\![0; n]\!]; a_k \neq 0\}$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap] - \delta; \delta[$, $f(x)$ est non nul et de même signe que $a_v x^v$.*

Démonstration : On traite le cas où $a_v < 0$. On a $f(x) = (a_v + \eta(x))x^v$, pour une certaine fonction η tendant vers 0 en 0. Comme $\lim_0 (a_v + \eta(x)) < 0$, il existe, par la proposition 1.20, $\delta > 0$ tel que, pour $x \in D \cap] - \delta; \delta[$, $a_v + \eta(x) < 0$ donc $a_v + \eta(x)$ est du signe de a_v et $f(x)$ est du signe de $a_v x^v$. □

Dans le cadre de cette proposition 3.11, la restriction de f à $D \cap] - \delta; \delta[$ est du signe de a_v, lorsque v est pair, et, lorsque v est impair, la restriction de f à $D \cap [0; \delta[$ est du signe de a_v tandis que la restriction de f à $D \cap] - \delta; 0]$ est du signe opposé.

Enfin, on a aussi vu dans le MA1 que l’on peut utiliser les DL pour étudier des branches infinies de fonction. Par exemple, on veut étudier la branche infinie quand $x \to -\infty$ de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) \;=\; \sqrt[3]{x^3 + x + 1} \;-\; \sqrt{x^2 - x - 1}\,.$$

Pour $x < -1$, on a (attention aux signes !)

$$f(x) \;=\; x \cdot \sqrt[3]{1 \,+\, (1/x^2) \,+\, (1/x^3)} \,+\, x \cdot \sqrt{1 \,-\, (1/x) \,-\, (1/x^2)}\,.$$

On pose $t = 1/x < 0$ et on écrit le développement limité à l’ordre 2 en 0 de $g(t) = f(1/t) = \sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} + \sqrt{1 - t - t^2}$. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{1 + t^2 + t^3} &= 1 + \frac{1}{3}(t^2 + t^3) + o(t^2) \;=\; 1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)\,,\\
\sqrt{1 - t - t^2} &= 1 + \frac{1}{2}(-t - t^2) - \frac{1}{8}(-t - t^2)^2 + o(t^2) = 1 - \frac{t}{2} - \frac{5t^2}{8} + o(t^2)\,,\\
g(t) &= 2 - \frac{t}{2} - \frac{7t^2}{24} + o(t^2)
\end{aligned}$$

et donc, en $-\infty$,

$$f(x) \;=\; x \cdot \left(2 - \frac{1}{2x} - \frac{7}{24x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \;=\; 2x - \frac{1}{2} - \frac{7}{24x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\,.$$

La droite $y = 2x - 1/2$ est asymptote et la courbe est au dessus de l’asymptote car $-7/(24x) + o(1/x) > 0$ quand x est “proche de $-\infty$”.

3.2 Problèmes de prolongement.

L'objet de cette partie est de s'attaquer à deux questions assez proches. Pour illustrer la première, prenons un exemple concret. La fonction $\mathbb{R}^* \ni x \mapsto (\sin x)/x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (cf. proposition 2.23) et admet un prolongement par continuité en 0 car $\lim_{x\to 0, x\neq 0}(\sin x)/x = 1$ (cf. paragraphe 2.4.3). On se demande si ce prolongement est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, si oui, comment on peut le démontrer (réponse dans l'exercice 3.7). Illustrons aussi l'autre question par un exemple. L'équation différentielle $xy' = 1$ peut être considérée pour des fonction y définie sur $\mathbb{R}$ mais la méthode de résolution vue en MA1 ne nous permet de la résoudre que là où x ne s'annule pas, c'est-à-dire sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Peut-on à partir de ses solutions à gauche et à droite de 0 retrouver toutes les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$? On abordera cette question sur des exemples et on verra que la question précédente aide à y répondre.

3.2.1 Prolongement par continuité de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$.

Étant donnés un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ (avec $k \in \overline{\mathbb{N}}$) et prolongeable par continuité en a, on se demande à quelle condition le prolongement par continuité est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.
Voyons tout de suite que cela ne marche pas à tous les coups. Étant donné $c \in \mathbb{R}$, la fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x < 0$, associe c et, à $x > 0$, associe x, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, se prolonge par continuité en 0 uniquement lorsque $c = 0$. Dans ce cas, le prolongement par continuité est la fonction $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \leq 0$, associe 0 et, à $x > 0$, associe x. Ce prolongement n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $\lim_{x\to 0, x\neq 0} G'(x)$ n'existe pas. En effet, comme $g'(x) = 1$ si $x > 0$ et $g'(x) = 0$ si $x < 0$, on a $\lim_{x\to 0, x>0} G'(x) = 1$ et $\lim_{x\to 0, x<0} G'(x) = 0$. Donc, si G' est définie en 0, elle ne peut y être continue et donc G n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Notons que si la fonction f précédente admet un prolongement par continuité F qui est $\mathcal{C}^k$ sur I alors les limites $\lim_{x\to a, x\neq a} f^{(i)}(x)$, pour $i \in [\![0; k]\!]$, existent dans $\mathbb{R}$ puisqu'elles valent $F^{(i)}(x)$, respectivement. La proposition 3.12 suivante montre que cette condition nécessaire est aussi suffisante pour qu'il en soit ainsi.

Proposition 3.12. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ et une fonction $f : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^k$, telle que, pour tout $i \in [\![0; k]\!]$, $\ell_i := \lim_{x\to a, x\neq a} f^{(i)}(x)$ existe dans $\mathbb{R}$. Alors la fonction f admet un prolongement F en a qui est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a , pour tout $i \in [\![0; k]\!]$, $F^{(i)}(a) = \ell_i$.*
Lorsque $k = \infty$, il faut lire, à la place de $[\![0; k]\!]$, $[\![0; \infty[\![= \mathbb{N}$.

Démonstration : Comme on suppose que $\ell_0 := \lim_{x\to a, x\neq a} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, F existe (cf. définition 1.11) et $F(0) = \ell_0$.
Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(k)$ la propriété "la proposition est vraie pour k". On va montrer par récurrence que cette propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Par la définition 1.11, $\mathcal{P}(0)$ est vraie . Supposons que, pour un $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. On prend f vérifiant les hypothèses de la proposition pour $k + 1$ et on applique l'hypothèse

de récurrence à f', puisque, pour tout $i \in [\![0;k]\!]$, $\lim_{x\to a, x\neq a}(f')^{(i)}(x) = \ell_{i+1}$ existe dans $\mathbb{R}$. La fonction f' admet donc un prolongement g par continuité en a qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I vérifiant, pour tout $i \in [\![0;k]\!]$, $g^{(i)}(a) = \ell_{i+1}$. Pour montrer que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, il suffit d'avoir $F' = g$ car alors F est $\mathcal{C}^{k+1}$ sur I (cf. proposition 2.22) et on a, pour tout $i \in [\![0;k]\!]$, $F^{(i+1)}(a) = g^{(i)}(a) = \ell_{i+1}$ (on a déjà vu que $F(0) = \ell_0$). Pour $x \in I \setminus \{a\}$, on a par définition $g(x) = f'(x) = F'(x)$. Il reste à montrer que F est dérivable en a et que $F'(a) = g(a)$. Pour cela, on utilise le théorème des accroissements finis (cf. théorème 2.17). Pour $x \in I \setminus \{a\}$, il existe c, strictement compris entre a et x, tel que $F(x) - F(a) = F'(c)(x-a) = g(c)(x-a)$. Soit $\epsilon > 0$. Comme g est continue en a, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $y \in I\cap]a-\delta; a+\delta[$, $|g(y) - g(a)| < \epsilon$. Donc, pour $x \in I\cap]a-\delta; a+\delta[$, le c précédent appartient aussi à $I\cap]a-\delta; a+\delta[$ donc

$$\left|\frac{F(x)-F(a)}{x-a} - g(a)\right| \;=\; |g(c) - g(a)| \;<\; \epsilon\,.$$

On a donc bien $F'(a) = g(a)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. On a donc montré que $\mathcal{P}(k)$ est héréditaire. Par le théorème de récurrence, elle est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Exercice 3.7. : Montrer que la fonction $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \neq 0$, associe $(\sin x)/x$ et, à 0, associe 1, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (elle est en fait de classe $\mathcal{C}^\infty$, cf. TD).

Exercice 3.8. : Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \leq 0$ associe 0 et, à $x > 0$, associe $e^{-1/x}$.

1. Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_k de degré inférieur ou égal à $2k$ tel que, pour tout $x > 0$, $g^{(k)}(x) = P_k(1/x)e^{-1/x}$. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0, x>0} g^{(k)}(x) = 0$.
3. Montrer que g est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)}(0) = 0$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $g(x) = Q_n(x) + x^n\epsilon_n(x)$ le développement de Taylor-Young de g en 0 à l'ordre n. Qui est le polynôme Q_n ? Montrer que, pour $x \neq 0$, le reste $x^n\epsilon_n(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On constate que g et la fonction nulle ont les mêmes parties régulières en 0 à tous les ordres ! Deux fonctions différentes peuvent donc avoir les mêmes DL en 0 à tous les ordres.

3.2.2 Recollement de solutions d'équations différentielles.

On s'intéresse maintenant à la deuxième question soulevée dans cette partie. Si l'on revient sur l'exemple donné au début de cette partie, on voit que notre problème est un problème de "recollement" en 0 de solutions de l'équation sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, respectivement, en une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, on veut résoudre des équations différentielles du type $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sur $\mathbb{R}$, où les fonctions a, b, c sont définies sur $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}^*$ et a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Sur $]-\infty;0[$ (resp. $]0;+\infty[$), l'équation est donc équivalente à une équation du type $y' + A(x)y = B(x)$, pour des fonctions continues A et B. Or, d'après le MA1, on sait résoudre ce dernier type d'équations. Il est naturel de se demander si l'on peut

en déduire l'ensemble des solutions de la première équation différentielle. On va aborder cette question sur des exemples.
Avant de traiter la question, il est utile de rappeler que “résoudre l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sur un intervalle I” signifie trouver **toutes** les fonctions $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que l'égalité $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ ait lieu pour tout $x \in I$. Ici, on se concentrera sur les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ (éventuellement $\mathcal{C}^k$ avec $k > 1$) de l'équation. On veut donc trouver **toutes** les fonctions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que l'égalité $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ ait lieu pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Soit $s_0 \in \mathbb{R}$ et $s : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction qui, à $x < 0$, associe -1, à $x > 0$, associe 1 et, à 0, associe s_0. On considère l'équation sur $\mathbb{R}$, $sy' - 2xy = 0$. Même si s ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (c'est le cas si $s_0 \neq 0$), on ne peut pas ramener cette équation à une équation du type $y' + A(x)y = B(x)$ avec A et B continues sur $\mathbb{R}$. En revanche, on peut le faire sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.
Comme on ne sait pas encore ce que l'on va trouver, il est utile de commencer par supposer qu'on a une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation, de classe $\mathcal{C}^1$, et de voir ce que l'on peut en déduire. Appelons z cette solution. Clairement la restriction de z à $]0; +\infty[$ est une solution de l'équation sur $]0; +\infty[$. Or, sur cet intervalle, le MA1 nous permet de trouver toutes les solutions de l'équation $y' - 2xy = 0$: ce sont les $y_{k,+} :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui, à $x > 0$, associe $y_{k,+}(x) = k \exp(x^2)$, lorsque k décrit $\mathbb{R}$ (l'indice + est là pour rappeler que la fonction est définie sur $]0; +\infty[$ seulement). Notons qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$. Donc, forcément, il existe un $k_+ \in \mathbb{R}$ tel que $z_{|]0;+\infty[} = y_{k_+,+}$. De même, les solutions sur $]-\infty; 0[$ de l'équation $-y' - 2xy = 0$ sont les $y_{k,-} :]-\infty; 0[\longrightarrow \mathbb{R}$, qui, à $x < 0$, associe $y_{k,-}(x) = k \exp(-x^2)$, lorsque k décrit $\mathbb{R}$, et il existe un $k_- \in \mathbb{R}$ tel que $z_{|]-\infty;0[} = y_{k_-,-}$. On voit donc que z ne peut pas faire n'importe quoi en dehors de 0. Comme, de plus, z doit être de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on a vu, au paragraphe 3.2.1 précédent, que cela impose que $\lim_{x \to 0, x<0} z(x) = z(0) = \lim_{x \to 0, x>0} z(x)$ et $\lim_{x \to 0, x<0} z'(x) = z'(0) = \lim_{x \to 0, x>0} z'(x)$. De la première contrainte, on tire $k_- = k_+ = z(0)$ et, de la seconde, $z'(0) = 0$ mais aucune contrainte supplémentaire sur $(k_-; k_+)$. On a donc établi que, si z est une solution de l'équation sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que, pour $x > 0$, $z(x) = y_{k,+}(x)$, pour $x < 0$, $z(x) = y_{k,-}(x)$ et $z(0) = k$. Si, pour tout $k \in \mathbb{R}$, on définit $y_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $y_k(x) = y_{k,+}(x)$, si $x > 0$, $y_k(x) = y_{k,-}(x)$, si $x < 0$, et $y_k(0) = k$, alors on a montré que $z \in \{y_k; k \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est contenu dans $\{y_k; k \in \mathbb{R}\}$.
Voyons maintenant si toute fonction de cette ensemble est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{R}$, y_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, par composition. De plus, on a $\lim_{x \to 0, x<0} y_k(x) = k$, $\lim_{x \to 0, x>0} y_k(x) = k$, $\lim_{x \to 0, x<0} (y_k)'(x) = 0$, $\lim_{x \to 0, x>0} (y_k)'(x) = 0$, donc, d'après la proposition 3.12, y_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $(y_k)'(0) = 0$. De plus, elle vérifie l'équation sur $]0; +\infty[$, sur $]-\infty; 0[$, et on a $s(0)(y_k)'(0) - 2 \cdot 0 \cdot y_k(0) = 0$. Donc y_k est bien une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est $\{y_k; k \in \mathbb{R}\}$.
On peut légèrement simplifier la preuve précédente en retirant $\lim_{x \to 0, x<0} z'(x) = z'(0) = \lim_{x \to 0, x>0} z'(x)$ et $z'(0) = 0$. Notons, de plus, que si l'on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (pas seulement celles qui sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), on peut reprendre les arguments précédents pour montrer qu'une telle solution (qui est forcément continue en 0) appartient à $\{y_k; k \in \mathbb{R}\}$. On obtient ainsi que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ coïncide avec celui des

solutions sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, qui est donc $\{y_k; k \in \mathbb{R}\}$. Que se passe-t-il si l'on cherche les solutions sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$? Reprenons la stratégie précédente. Soit z une telle solution. C'est une solution sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $z = y_k$. Mais on a aussi $\lim_{x\to 0, x<0} z''(x) = z''(0) = \lim_{x\to 0, x>0} z''(x)$, ce qui impose $-2k = 2k$ donc $k = 0$! Donc $z = y_0$. Comme la fonction nulle y_0 est bien solution sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, est $\{y_0\}$.

Cherchons les solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^3y' - 2y = 0$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Si l'on restreint l'équation à des fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$, l'équation équivaut à $y' - (2/x^3)y = 0$. D'après le MA1, les solutions de cette équation sont les fonctions $\mathcal{C}^1 : 0 < x \mapsto K \exp(-1/x^2)$, pour K décrivant $\mathbb{R}$. De même, les solutions de cette équation $x^3y' - 2y = 0$ sur $] - \infty; 0[$, sont les fonctions $\mathcal{C}^1 : 0 > x \mapsto L \exp(-1/x^2)$, pour L décrivant $\mathbb{R}$.
Si z est une solution sur $\mathbb{R}$ de $x^3y' - 2y = 0$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors, par le même raisonnement que dans l'exemple précédent, il existe $(K_0; L_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z(x) = K_0 \cdot \exp(-1/x^2)$, si $x > 0$, et $z(x) = L_0 \cdot \exp(-1/x^2)$, si $x < 0$. Comme $\lim_{x\to 0, x\neq 0} e^{-1/x^2} = 0$, on a aussi $z(0) = 0$. Pour $(K; L) \in \mathbb{R}^2$, soit

$$\begin{array}{rcll} y_{K,L} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & K \cdot e^{-1/x^2} & si \quad x > 0 \\ & & L \cdot e^{-1/x^2} & si \quad x < 0 \\ & & 0 & si \quad x = 0\,. \end{array}$$

On a donc montré que $z \in \{y_{K,L}; (K; L) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrons que c'est l'ensemble des solutions cherchées. D'après les propositions 1.23 et 2.33,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y_{K,L}(x) = 0\,, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} y_{K,L}(x) = 0\,, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (y_{K,L})'(x) = 0\,, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (y_{K,L})'(x) = 0\,.$$

Donc, par la proposition 3.12, $y_{K,L}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, elle satisfait l'équation sur $\mathbb{R}^*$ et on a $0^3 \cdot (y_{K,L})'(0) - 2 \cdot y_{K,L}(0) = 0$. Donc $y_{K,L}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^3y' - 2y = 0$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, est donc $\{y_{K,L}; (K; L) \in \mathbb{R}^2\}$.
Là encore, le raisonnement précédent montre qu'une solution sur $\mathbb{R}$ de $x^3y' - 2y = 0$ doit appartenir $\{y_{K,L}; (K; L) \in \mathbb{R}^2\}$. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^3y' - 2y = 0$ est donc aussi $\{y_{K,L}; (K; L) \in \mathbb{R}^2\}$.
Pour les équations du type $y' + A(x)y = B(x)$, avec A et B continues sur un intervalle ouvert I, on a vu dans le MA1, que, pour tout $(a, b) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution z_0 de l'équation sur I telle que $z_0(a) = b$. Dans le cas présent, il se passe la même chose pour l'équation $x^3y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ si l'on prend $a \neq 0$, car les solutions de $x^3y' - 2y = 0$ près de a sont aussi solution de $y' - (2/x^3)y = 0$ près de a. Cependant, pour $a = 0$, la situation est bien différente. En effet, si $b \neq 0$, il n'y a aucune solution de $x^3y' - 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = b$, et si $b = 0$, il en existe une infinité !

Considérons un autre exemple. On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $xy' = 1$. Soit z une telle solution. La restriction de z à $]0; +\infty[$ est l'une des solutions sur $]0; +\infty[$ de l'équation $y' = 1/x$. Donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $z(x) = k + \ln x$, pour $x > 0$. De même, il existe $k' \in \mathbb{R}$ tel que $z(x) = k' + \ln(-x)$, pour $x < 0$. Or z est continue en 0 (puisque

$z'(0)$ est bien défini) donc on doit avoir $\lim_{x\to 0, x<0} z(x) = z(x) = \lim_{x\to 0, x>0} z(x)$. Or $\lim_{x\to 0, x<0}(k' + \ln(-x)) = -\infty$ donc on aboutit à une contradiction. Il n'y a donc aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Pour terminer, notons que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ ne coïncide pas toujours avec l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par définition, le premier contient toujours le second mais ils sont différents dans le cas suivant.

Exercice 3.9. : Soit $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $b(0) = 0$ et par $b(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x) = (x^2\sin(1/x))'(x)$, pour $x \neq 0$.

1. Montrer que $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $a(x) = x^2\sin(1/x)$, pour $x \neq 0$, et par $a(0) = 0$, est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, dérivable en 0 mais pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Vérifier que a est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = b$.
2. Montrer que l'équation $y' = b$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3.3 Fonctions convexes.

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions, définies sur un intervalle, dont le graphe a une propriété géométrique particulière, les fonctions convexes. Même si, de prime abord, cette propriété ne semble pas être reliée à la régularité de la fonction, il se trouve que les fonctions convexes sont continues (cf. paragraphe 3.3.2). Si l'on se restreint à des fonctions dérivables, on montre que la convexité est équivalente à la croissance de la dérivée. On verra aussi quelques applications de cette propriété de convexité.

3.3.1 Notion de convexité.

Une partie A du plan est dite *convexe* quand elle vérifie la propriété suivante : si M et N sont deux points de A, alors le segment $[MN]$ est tout entier contenu dans A. Une fonction définie sur un intervalle I est convexe si la partie du plan située au-dessus de son graphe est convexe. Ceci se traduit par la définition suivante :

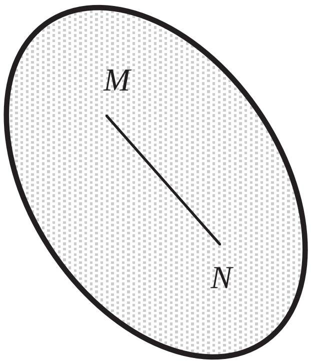
Définition 3.13. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est* convexe *(sur I) si, pour tout $(a;b) \in I^2$ avec $a < b$, pour tout $t \in [0;1]$, on a*

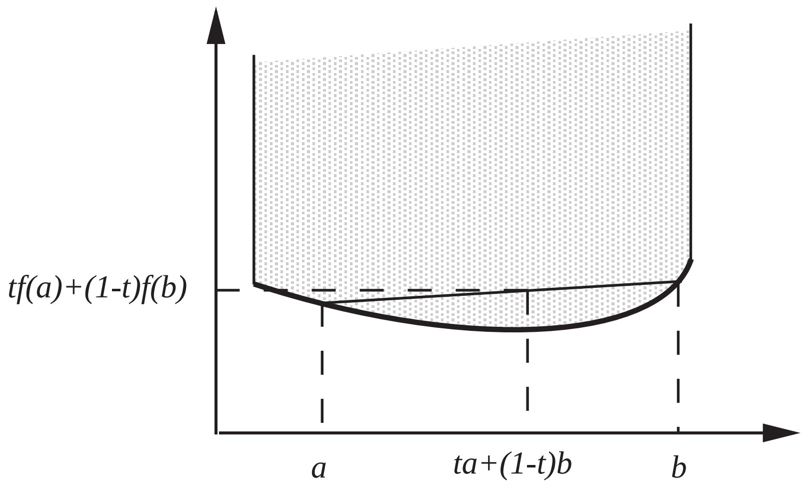
$$f\big(ta + (1-t)b\big) \ \leq \ tf(a) \, + \, (1-t)f(b)\,.$$

On dit que f est concave *si $-f$ est convexe, c'est-à-dire si, pour tout $(a;b) \in I^2$ avec $a < b$, pour tout $t \in [0;1]$, on a*

$$f\big(ta + (1-t)b\big) \ \geq \ tf(a) \, + \, (1-t)f(b)\,.$$

Voyons tout de suite une caractérisation de la convexité en termes de pentes de “cordes”.





Un ensemble convexe

Le graphe d'une fonction convexe

Proposition 3.14. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est convexe sur I, c'est-à-dire*
$$\forall (a,b) \in I^2 \,,\ a < b \,,\ \forall t \in [0;1] \,,\ f\big(ta + (1-t)b\big) \ \leq\ tf(a) \ +\ (1-t)f(b)\,. \quad (3.7)$$
2. *Pour tout $(x, y, z) \in I^3$, avec $x < y < z$, on a*
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \ \leq\ \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \ \leq\ \frac{f(z) - f(y)}{z - y}\,. \quad (3.8)$$
3. *Pour tout $a \in I$, la fonction*
$$\phi_a \ :\ I \setminus \{a\} \ni t \ \mapsto\ \frac{f(t) - f(a)}{t - a} \quad (3.9)$$
est croissante.

Démonstration : Supposons que 3 est vraie et montrons 2. En utilisant la croissance de ϕ_x on obtient la première inégalité de (3.8) et avec celle de ϕ_z, on obtient la deuxième inégalité. Réciproquement, si 2 est vraie, montrons que 3 est vraie. Soit $a \in I$ et $(s,t) \in (I \setminus \{a\})^2$ avec $s < t$. On montre que $\phi_a(s) \leq \phi_a(t)$. On a trois cas : $s < t < a$ ou $s < a < t$ ou $a < s < t$. Dans le premier cas, la deuxième inégalité de (3.8) appliquée à $(x, y, z) = (s, t, a)$ donne $\phi_a(s) \leq \phi_a(t)$. Dans le deuxième cas, les deux inégalités de (3.8), pour $(x, y, z) = (s, a, t)$, donnent $\phi_a(s) \leq \phi_a(t)$. Dans le dernier cas, la première inégalité de (3.8), pour $(x, y, z) = (a, s, t)$, donne $\phi_a(s) \leq \phi_a(t)$. Donc 3 est vraie. On a donc montré 2 $\Longleftrightarrow$ 3.
Supposons 2 vraie et montrons (3.7) pour $x < z$. Pour $t = 0$ ou $t = 1$, (3.7) est vraie. Prenons $t \in]0; 1[$ et posons $y = tx + (1-t)z \in]x; z[$. Comme $y - x = (1-t)(z - x)$ avec

$z-x>0$, la première inégalité de (3.8) donne $f(y)-f(x)\leq(1-t)(f(z)-f(x))$ c'est-à-dire (3.7) pour $x<z$. Réciproquement, supposons 1 vraie et montrons 2. Comme $y\in]x;z[$, il existe $t\in]0;1[$ tel que $y=tx+(1-t)z$. (3.7) donne $f(y)-f(x)\leq(1-t)(f(z)-f(x))$ et, en divisant partout par $z-x$, on obtient la première inégalité de (3.8), puisque $y-x=(1-t)(z-x)$. (3.7) donne aussi $f(y)-f(z)\leq t(f(x)-f(z))$ et, en divisant partout par $x-z<0$, on obtient la deuxième inégalité de (3.8), puisque $y-z=t(x-z)$. Donc 2 est vraie. On a montré que $1\Longleftrightarrow 2$. $\square$

Voyons tout de suite un exemple très particulier de fonction convexe. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\alpha x+\beta$. Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$ et $t>0$, on a $g(ta+(1-t)b)=tg(a)+(1-t)g(b)$. Donc, par définition (cf. définition 3.13), g est convexe. Mais $-g$ est aussi convexe ! La fonction g est donc à la fois convexe et concave. Comme, pour $t\neq a$, $(g(t)-g(a))/(t-a)=\alpha$, le critère précédent (cf. proposition 3.14) montre que g et $-g$ sont convexes.

Exercice 3.10. : Montrer que la fonction $\mathbb{R}\ni x\mapsto|x|$ est convexe. La fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, qui à $x\leq 0$ associe 0 et à $x>0$ associe x^2, est-elle convexe ? concave ? Mêmes questions pour la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, qui à $x<-1$ associe $x+1$, à $x\in[-1;1]$ associe 0 et à $x>1$ associe $1-x$. Mêmes questions pour la fonction $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, qui à $x<-1$ associe $x+1$, à $x\in[-1;1]$ associe $x/2$ et à $x>1$ associe $3x/2-1$.

Lorsque la fonction considérée est **dérivable**, on peut caractériser la convexité par une propriété de la dérivée.

Théorème 3.15. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable sur I. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe sur I,*
2. *la dérivée f' est croissante sur I.*

Démonstration : Supposons vérifiée la propriété 1. Soient $a<b$ deux éléments de I. On veut montrer que $f'(a)\leq f'(b)$. Soit $c\in]a;b[$. La convexité de f entraîne les inégalités (3.8) pour $x=a$, $y=c$ et $z=b$. Comme f est dérivable en a, on peut passer à la limite $c\to a$ dans l'inégalité de gauche et, comme f est dérivable en b, on peut passer à la limite $c\to b$ dans l'inégalité de droite. On obtient

$$f'(a)\ \leq\ \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ \leq\ f'(b)\,.$$

La fonction f' est donc bien croissante.
Réciproquement, supposons la propriété 2 vérifiée. Soit $a<b$ deux éléments de I. Soit $c\in]a;b[$. Le théorème des accroissements finis (cf. théorème 2.17) nous dit qu'il existe $d_1\in]a,c[$ et $d_2\in]c,b[$ tels que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\ =\ f'(d_1)\quad\text{et}\quad\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\ =\ f'(d_2)\,.$$

Comme f' est croissante et que $d_1 < d_2$, on en déduit que

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b} .$$

En écrivant $c = ta + (1-t)b$ avec $t \in]0;1[$, on en déduit que

$$t(b-a)\big(f(c)-f(a)\big) \leq (1-t)(b-a)\big(f(b)-f(c)\big) .$$

En simplifiant par $b-a$ et en regroupant les $f(c)$ à gauche de l'inégalité, on voit apparaître (3.7). Donc f est convexe. □

La plupart du temps, on considère des fonctions deux fois dérivables. Pour montrer qu'elles sont convexes, il suffit donc de montrer que leur dérivées secondes sont positives et appliquer le résultat précédent. Par exemple, la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2$ est deux fois dérivable et la dérivée seconde est la fonction constante égale à 2. La dérivée est donc croissante et, par le critère précédent (cf. théorème 3.15), la fonction est convexe. De même la fonction affine g précédente, qui admet pour dérivée seconde la fonction nulle, est convexe et comme ce raisonnement marche encore pour $-g$, on retrouve le fait que g est aussi concave.
Bien entendu, on a un résultat similaire pour la concavité de fonctions dérivables. Une fonction dérivable sur I y est concave si et seulement si la dérivée y est décroissante.

Exercice 3.11. : Vérifier ce critère de concavité.

Une propriété remarquable des fonctions dérivables convexes est que, dès que la dérivée s'annule, c'est en un minimum global de la fonction (à comparer avec le paragraphe 2.2.1, en particulier avec la proposition 2.15).

Proposition 3.16. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et convexe sur I. S'il existe $x_0 \in I$, tel que $f'(x_0) = 0$, alors x_0 est le minimum de f sur I.*

Démonstration : Par convexité, f' est croissante (cf. théorème 3.15). Soit $x \in I$. Comme $f'(x_0) = 0$, on sait que $f'(x) \leq 0$, si $x \leq x_0$, et que $f'(x) \geq 0$, si $x \geq x_0$. Donc f est décroissante à gauche de x_0 et croissante à droite de x_0, ce qui montre bien que $f(x_0)$ est le minimum de f sur I. □

Bien sûr, si f est dérivable et concave sur un intervalle I et si $f'(x_0) = 0$ avec $x_0 \in I$, alors x_0 est le maximum de f sur I.
Dans le cadre de la proposition 3.16 pour un intervalle **ouvert** I, si la dérivée ne s'annule pas alors il n'y a pas d'extremum sur I (pourquoi ?).

Exercice 3.12. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe x^2. Quels sont les minima de f, de la restriction de f à l'intervalle $[0;1]$, de la restriction de f à $]0;1]$, de la restriction de f à $[1;2]$?

Le résultat de cette proposition 3.16 est un cas particulier du résultat suivant, qui dit qu'une fonction dérivable convexe est toujours au-dessus de ses tangentes.

Proposition 3.17. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et convexe sur I. Pour tout $x_0 \in I$, f est au-dessus de sa tangente en x_0, c'est-à-dire*

$$\forall x \in I\ ,\ f(x)\ \geq\ f(x_0)\ +\ f'(x_0)\cdot(x-x_0)\ . \tag{3.10}$$

Démonstration : Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)$. Comme f est dérivable sur I, g l'est aussi par somme et on a $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Comme f est convexe, f' est croissante, par le théorème 3.15. Donc g' est aussi croissante ce qui veut dire que g est convexe (cf. théorème 3.15). Or $g'(x_0) = 0$, la proposition 3.16 montre donc que g est minimale en x_0, ce qui établit (3.10) car $g(x_0) = 0$. □

La convexité permet aussi de d'établir des inégalités utiles. Prenons un exemple simple. On va utiliser les notions et les propriétés du paragraphe 2.4.1. La fonction ln est concave sur $]0, +\infty[$. En effet, elle est deux fois dérivable et $\ln''(x) = -1/x^2 \leq 0$. On a donc, pour $b > a > 0$ et $t \in [0; 1]$,

$$\ln\big(ta + (1-t)b\big)\ \geq\ t\ln a\ +\ (1-t)\ln b\ . \tag{3.11}$$

Soit $(p; q) \in [1; +\infty[^2$ tel que $1/p + 1/q = 1$. On peut prendre $t = 1/p$ et donc $1 - t = 1/q$ dans (3.11). On obtient

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right)\ \geq\ \frac{\ln a}{p}\ +\ \frac{\ln b}{q}\ ,$$

d'où, en transformant cette inégalité par la fonction exponentielle, qui est croissante,

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\ \geq\ a^{1/p}\cdot b^{1/q}\ .$$

Cette inégalité est encore vraie pour $a > b > 0$, par le raisonnement précédent en changeant le rôle de a et b. Elle est aussi vraie si $a = b > 0$.
Comme, pour tout $(\alpha; \beta) \in]0; +\infty[^2$, il existe $(a; b) \in]0; +\infty[^2$ tel que $\alpha^p = a$ et $\beta^q = b$. On a donc

$$\frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}\ \geq\ \alpha\beta\ .$$

Cette dernière inégalité est encore vraie pour $(\alpha; \beta) \in [0; +\infty[^2$. Elle généralise l'inégalité bien connue : pour tout $(\alpha; \beta) \in [0; +\infty[^2$, $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$ (qui se déduit de la première en choisissant $p = q = 2$).

Exercice 3.13. : Soit $(a; b; c) \in]0; +\infty[^3$. Montrer que $(a + b + c)/3 \geq \sqrt[3]{a\,b\,c}$ (on pourra utiliser la concavité du logarithme népèrien).

Une autre application de la convexité est illustrée dans l'exercice 1.22.

3.3.2 Compléments sur la convexité.

On se propose d'établir ici des propriétés supplémentaires sur les fonctions convexes sur un intervalle ouvert. En particulier, on va voir qu'une telle fonction est forcément continue !

En plus, elle est “presque dérivable”. Ces propriétés sont hors du programme de MA4. Leur connaissance ne sera donc pas exigée aux examens et on ne pourra s'en servir sans redémonstration.

Proposition 3.18. *Si I est un intervalle* **ouvert** *et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe alors*

1. *f est continue sur I,*
2. *pour tout $a \in I$, f admet une dérivée à droite (respectivement à gauche) en a, notée $f'_d(a)$ (respectivement $f'_g(a)$),*
3. *les fonctions f'_d et f'_g sont croissantes sur I et, pour tout $a \in I$, $f'_g(a) \leq f'_d(a)$.*

Démonstration : On démontre tout d'abord le 2. D'après le 3 de la proposition 3.14, ϕ_a est croissante donc, si $s_0 \in I$ avec $s_0 > a$ alors $\phi_a(s_0)$ majore la restriction de ϕ_a à $I \cap]-\infty; a[$. Cette dernière est donc croissante majorée donc sa limite en a existe dans $\mathbb{R}$ (cf. proposition 1.17), c'est-à-dire $f'_g(a)$ existe. De manière analogue, on montre que $f'_d(a)$ existe. On a donc montré le 2.
En faisant $x \to y^-$ et $z \to y^+$ dans (3.8), on trouve à la limite $f'_g(y) \leq f'_d(y)$. Soit $w < x < y < z$ dans I. En appliquant (3.8) à $w < x < y$ et à $x < y < z$, on obtient

$$\frac{f(x) - f(w)}{x - w} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

En faisant $w \to x^-$ et $y \to z^-$, on trouve $f'_g(x) \leq f'_g(z)$. Avec les inégalités précédentes et en faisant $x \to w^+$ et $z \to y^+$, on obtient $f'_d(w) \leq f'_d(y)$. On a donc montré 3.
Pour $x > a$, on a

$$f(x) - f(a) = (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

donc, comme le rapport tend vers $f'_d(a)$, f tend vers $f(a)$ quand $x \to a^+$, par produit (cf. proposition 1.23). De même, l'existence de $f'_g(a)$ implique que f tend vers $f(a)$ quand $x \to a^-$. Par conséquent, f admet $f(a)$ pour limite en a et f est donc continue en a. On a montré 1. □

Signalons que le résultat précédent n'est plus vrai si l'intervalle I n'est pas ouvert. En effet, la fonction $g : [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x > 0$, associe x^2 et, à 0, associe 1, est convexe par la proposition 3.14. Mais elle n'est pas continue en 0.

3.4 Suites récurrentes.

L'objet de cette partie est l'étude d'un type particulier de suite réelle : la suite récurrente (réelle). On a vu dans le MA2 qu'une suite réelle n'est autre qu'une application (d'une partie infinie) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Une suite récurrente est donnée par son premier terme (l'image de 0) et par une “procédure” pour calculer le deuxième terme à partir du premier, le troisième à partir du deuxième, et ainsi de suite. Il se peut que la procédure précédente bloque mais, lorsque ce n'est pas le cas, la suite est bien définie et on s'intéresse à sa convergence. Le théorème 3.25 donne des conditions dans lesquelles une suite récurrente est bien définie et converge. Cependant il arrive que l'on ne peut appliquer ce théorème et on verra des méthodes alternatives sur des exemples. Ensuite, on abordera une application des suites récurrentes (la méthode de Newton) qui permet de calculer des valeurs approchées de zéros de fonction.

L'étude présente des suites récurrentes est certes ancienne mais n'est pas démodée. C'est un premier pas vers la théorie du chaos, une branche active des mathématiques actuelles. De plus, les suites récurrentes de nombres complexes possèdent des propriétés étonnantes que l'on peut traduire en terme d'ensemble fractal (cf. l'ensemble de Julia), qui constitue aussi une notion récente et activement étudiée.

3.4.1 Limites de suites récurrentes et points fixes.

Tout d'abord, on traite le problème de l'existence d'une suite récurrente (réelle). Ensuite, en cas d'existence et sous une condition de continuité, on montre que l'éventuelle limite de la suite doit respecter une contrainte. Cela nous amène à dégager une stratégie pour étudier la convergence des suites récurrentes.

On commence par considérer la définition intuitive d'une suite récurrente, donnée ci-dessus, et on essaye de comprendre ce que l'on veut dire par "la procédure précédente bloque", en traitant deux exemples. La première suite commence par $u_0 = 2$ et la procédure de calcul de u_{n+1} à partir de u_n est donnée par $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. La seconde suite commence par $v_0 = 2$ et la procédure de calcul de v_{n+1} à partir de v_n est donnée par $v_{n+1} = \sqrt{v_n - 1}$. On calcule les premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = (\sqrt{3}+1)^{1/2}$ et il semble que l'on peut continuer sans difficulté car les termes de la suite sont positifs. Passons à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $v_1 = 1$, $v_2 = 0$, v_3 n'a pas de sens ! La procédure bloque.
Venons-en à la définition précise. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in D$. On considére la proposition $P((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$, dépendant d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par

$$\big(x_0 = \alpha\big) \text{ et } \big(\forall n \in \mathbb{N}\,, x_{n+1} = f(x_n)\big)\,.$$

On cherche à résoudre l'équation d'inconnue $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par "$P((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est vraie". Notons tout de suite que cette équation a au plus une solution. En effet, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des solutions. On a donc $x_0 = \alpha = y_0$. Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$, on ait montré que $x_n = y_n$, alors on a $x_{n+1} = f(x_n) = f(y_n) = y_{n+1}$. Par le théorème de récurrence, on en déduit que les suites sont égales.

Définition 3.19. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in D$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **donnée** *par $u_0 = \alpha$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si elle est solution du problème d'inconnue $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $(x_0 = \alpha)$ et $(\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = f(x_n))$ sont vraies.*
Comme ce problème a au plus une solution, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **n'est pas définie** *lorsque le problème n'a pas de solution et, dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **bien définie** *et c'est l'unique solution du problème.*

En particulier, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédente n'est pas définie. Il y a un cas simple où l'on est sûr que la suite récurrente est bien définie.

Proposition 3.20. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset D$. Pour tout $\alpha \in D$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie.*

Démonstration : On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ donnée par (u_n est bien défini et $u_n \in D$). $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque u_0 vaut $\alpha \in D$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n \in D$ et on peut calculer $f(u_n)$. Donc u_{n+1} est bien défini par $u_{n+1} = f(u_n)$ et appartient à $f(D)$. Comme $f(D) \subset D$, on a $u_{n+1} \in D$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie. □

Cette proposition s'applique au cas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du début du paragraphe. En effet la fonction $f : [-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \geq -1$ associe $\sqrt{x+1}$ vérifie $f([-1; +\infty[) \subset \mathbb{R}^+ \subset [-1; +\infty[$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien définie.
Notons de plus que la preuve par récurrence précédente est typique pour montrer qu'une suite récurrente est bien définie (d'où le nom de suite récurrente).

Exercice 3.14. : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n - 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est-elle bien définie ? Même question la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 = 5/4$ et $v_{n+1} = 2\sqrt{v_n - 1}$.

Après avoir discuté de l'existence des suites récurrentes, passons à l'étude de la convergence de celles qui sont bien définies. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in D$ tels que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit bien définie. En voyant l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on a envie de passer à la limite quand $n \to \infty$ (cf. MA2).

Proposition 3.21. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\alpha \in D$. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et converge vers un réel ℓ, où la fonction f est continue. Alors $f(\ell) = \ell$.*

Démonstration : Comme f est continue en ℓ, on peut appliquer le théorème 1.19 qui montre que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$. D'autre part, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, comme sous-suite d'une suite convergeant vers ℓ (cf. MA2). En passant à la limite dans les égalités $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $f(\ell) = \ell$. □

Définition 3.22. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est un* point fixe *de f si $\ell \in D$ et $f(\ell) = \ell$.*

La proposition 3.21 est très utile pour deviner la limite (si elle existe !) d'une suite récurrente construite à partir d'une fonction continue, puisque les limites possibles sont les points fixes de la fonction. Ceci nous donne une stratégie souvent efficace pour étudier la convergence et rechercher la limite d'une telle suite récurrente. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, $\alpha \in D$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha$ et par $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (supposée bien définie),
- trouver le ou les points fixes de f, qui sont les candidats à être limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
- ensuite, si ℓ est un candidat, essayer de montrer que $|u_n - \ell|$ tend vers 0.

Pour le deuxième point, si on peut trouver un réel $r \in [0;1[$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - \ell| \leq r|u_n - \ell|$, alors on a gagné. En effet, dans ce cas, on montre par récurrence que, pour $n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq r^{n-n_0}|u_{n_0} - l|$ (à vérifier), et, comme la suite $(r^{n-n_0})_{n \geq n_0}$ tend vers 0, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Voyons par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : [-1/2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{2x+1}$. Elle est continue sur $[-1/2, +\infty[$ et on a $f([-1/2, +\infty[) \subset \mathbb{R}^+ \subset [-1/2, +\infty[$. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, par la proposition 3.20.
En résolvant l'équation $f(x) = x$, pour $x \in [-1/2, +\infty[$, on trouve une solution unique $1 + \sqrt{2}$ (à vérifier), qu'on appelle ℓ. On calcule, en se souvenant que $\ell^2 = 2\ell + 1$:

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &= |\sqrt{2u_n + 1} - \ell| = \frac{|(2u_n + 1) - \ell^2|}{|\sqrt{2u_n + 1} + \ell|} \\ &= \frac{|(2u_n + 1) - (2\ell + 1)|}{|\sqrt{2u_n + 1} + \ell|} = \frac{2}{|\sqrt{2u_n + 1} + \ell|} |u_n - \ell| \,. \end{aligned}$$

Pour tout n, $u_n \geq 0$ donc $\sqrt{2u_n + 1} \geq 1$ et donc $\ell + \sqrt{2u_n + 1} \geq 2 + \sqrt{2}$. Donc

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \cdot |u_n - \ell|$$

et comme $2/(2+\sqrt{2}) < 1$ on en conclut, par le raisonnement précédent avec $r = 2/(2+\sqrt{2})$, que $\lim u_n$ existe et vaut $\ell = 1 + \sqrt{2}$.

3.4.2 Fonction contractante.

On va dégager des conditions sur la fonction f qui permettent d'affirmer que f a un point fixe et qu'une suite définie par récurrence au moyen de f converge vers ce point fixe. Ce sera l'objet du théorème 3.25.

Définition 3.23. *Soit $k \in [0; +\infty[$. Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite $k-$*lipschitzienne *sur D si*

$$\forall (x, y) \in D^2 \,, \quad |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y| \,.$$

Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne *sur D s'il existe un $k \in [0; +\infty[$ tel que f soit $k-$lipschitzienne.*
Une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite contractante *sur D s'il existe $k \in [0;1[$ tel que f soit $k-$lipschitzienne.*

On peut remarquer que la fonction identité $id : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe x, est $1-$lipschitzienne. Plus généralement, pour tout $k \in [0; +\infty[$, la fonction $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = k{\cdot}x$, est $k-$lipschitzienne. D'autres remarques et exemples élémentaires sont dans l'

Exercice 3.15. : Montrer que si $0 \leq k \leq k'$ et si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ est $k-$lipschitzienne, alors f est $k'-$lipschitzienne. Montrer que les fonctions $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont $0-$lipschitziennes sur D sont les fonctions constantes sur D. Montrer que la fonction sinus est $1-$lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser le théorème des accroissements finis, cf. théorème 2.17).

Les fonctions lipschitziennes sont automatiquement continues comme le montre la

Proposition 3.24. *Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne. Alors f est uniformément continue sur D (cf. définition 1.42 au paragraphe 1.3.3). En particulier, elle est continue sur D.*

Le paragraphe 1.3.3 étant un complément, il en est de même du résultat d'uniforme continuité et de la preuve que l'on va en donner. En revanche, on se servira du résultat de continuité dont on donne une preuve indépendante du paragraphe 1.3.3.

Démonstration : Par hypothèse, il existe $k \in [0; +\infty[$ tel que f soit $k-$lipschitzienne.
– Montrons l'uniforme continuité. Si $k = 0$, f est constante (cf. exercice 3.15) donc f est uniformément continue (cf. définition 1.42). Passons au cas où $k > 0$. Soit $\epsilon > 0$, on pose $\delta = \epsilon/k$. Pour $(x, x') \in D^2$ tel que $|x - x'| < \delta$, on a

$$\big|f(x) - f(x')\big| \ \leq \ k|x - x'| \ < \ k\delta \ = \ \epsilon \, .$$

– Montrons la continuité directement. Pour $k = 0$, f est constante (cf. exercice 3.15) donc f est continue. Pour $k > 0$, montrons que f est continue en tout point $a \in D$. Soit $\epsilon > 0$, on pose $\delta = \epsilon/k$. Soit $x \in D$ tel que $|x - a| < \delta$. On a

$$\big|f(x) - f(a)\big| \ \leq \ k|x - a| \ < \ k\delta \ = \ \epsilon \, . \ \square$$

Revenons aux suites récurrentes. Le résultat principal est le suivant.

Théorème 3.25. *Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$, contractante sur $[a; b]$ et telle que $f([a; b]) \subset [a; b]$. Alors f a un unique point fixe $\ell \in [a, b]$. De plus, pour tout $\alpha \in [a; b]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et converge vers ℓ.*

Démonstration : D'après l'hypothèse, il existe $k \in [0; 1[$ tel que f soit $k-$lipschitzienne sur $[a; b]$. Par la proposition 3.24, elle est continue sur $[a; b]$. Comme, de plus, $f([a; b]) \subset [a; b]$, on déduit de la proposition 1.37 que f admet au moins un point fixe. Si x et y sont des points fixes de f alors on a $|x - y| = |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ soit $(1 - k)|x - y| \leq 0$. Comme $1 - k > 0$, on doit avoir $|x - y| = 0$ soit $x = y$. f a donc un unique point fixe que l'on appelle ℓ.
Soit $\alpha \in [a; b]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $f([a; b]) \subset [a; b]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par la proposition 3.20. Il reste à montrer qu'elle converge vers ℓ. Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition

$$\big(|u_n - \ell| \ \leq \ k^n \, |u_0 - \ell|\big) \, .$$

Clairement, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|u_{n+1} - \ell| \ = \ |f(u_n) - f(\ell)| \ \leq \ k \cdot |u_n - \ell| \ \leq \ k \cdot k^n \, |u_0 - \ell| \ = \ k^{n+1} \, |u_0 - \ell| \, ,$$

par hypothèse de récurrence, et $\mathcal{P}(n+1)$ vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $k \in [0;1[$, la suite $(k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par le théorème des gendarmes pour les suites (cf. MA2), on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. $\square$

Un moyen commode pour s'assurer qu'une fonction $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable sur $[a,b]$, est contractante sur ce segment, est de vérifier que la valeur absolue de sa dérivée est majorée sur $[a,b]$ par un $k \in [0;1[$. Si c'est le cas, l'inégalité des accroissements finis (cf. corollaire 2.18) nous montre que f est $k-$lipschitzienne donc contractante.
On a donc démontré la conséquence suivante du théorème 3.25.

Proposition 3.26. *Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([a;b]) \subset [a;b]$. On suppose que f est dérivable sur $[a;b]$ et qu'il existe $k \in [0;1[$ tel que, pour tout $x \in [a;b]$, $|f'(x)| \leq k$. Alors la conclusion du théorème 3.25 est vraie.*

Remarque 3.27. *Il est utile de noter que les conclusions du théorème 3.25 et de la proposition 3.26 sont encore vraies si, dans les hypothèses correspondantes, on remplace la phrase "$u_0 = \alpha \in [a;b]$" par la phrase "il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in [a;b]$".*

La difficulté pour appliquer le théorème 3.25 (ou la proposition 3.26) dans la pratique réside dans le fait que c'est l'intervalle $[a;b]$ que l'on cherche. Il doit être choisi de sorte que (si c'est possible) toutes les hypothèses (éventuellement modifiées selon la remarque 3.27) du théorème 3.25 (ou de la proposition 3.26) soient remplies. Illustration :

Exercice 3.16. : On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 + (1/4)\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$. Trouver un segment $[a,b]$ tel que $f(\mathbb{R}\setminus\{0\}) \subset [a,b]$ et sur lequel $|f'(x)|$ est majorée par une constante strictement plus petite que 1. En déduire que, pour $\alpha \neq 0$, toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et converge.

Il y a deux situations dans lesquelles il n'est pas trop difficile de deviner sur quel intervalle on va pouvoir appliquer l'un des résultats précédents. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ admettant un point fixe $\ell \in I$. On suppose de plus que f est dérivable sur I et que

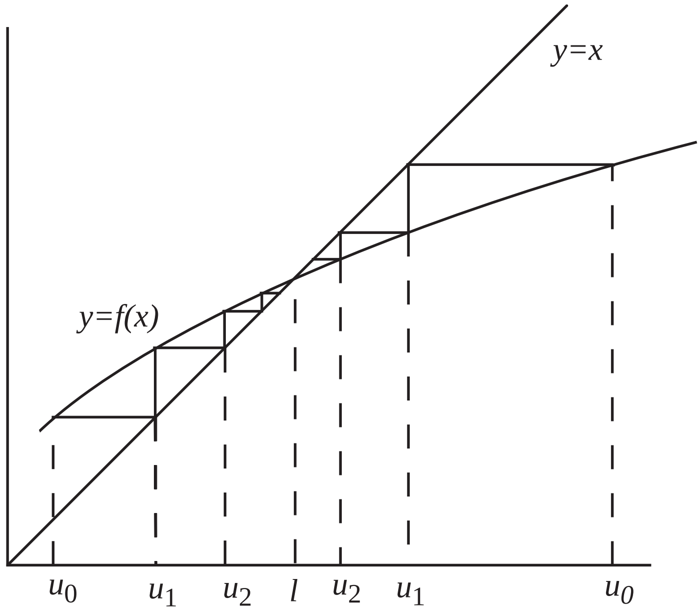
$$k \;:=\; \sup_{x\in I} |f'(x)| \;<\; 1\,.$$

Pour pouvoir appliquer la proposition 3.26, il suffit de trouver un intervalle $[a;b] \subset I$ tel que $\ell \in [a;b]$ et $f([a;b]) \subset [a;b]$.
Première situation. On suppose que f' est positive. Il est utile de dessiner le graphe de la fonction f pour comprendre ce qui se passe. La représentation graphique de la suite récurrente donne un "escalier montant si on prend u_0 dans I en dessous de ℓ et un "escalier descendant" si on prend u_0 dans I au dessus de ℓ.

Exercice 3.17. : Vérifier dans le cas de l'escalier montant (resp. de l'escalier descendant) que le segment $[u_0, \ell]$ (resp. $[\ell, u_0]$) est envoyé dans lui-même par f, ce qui permet d'appliquer le théorème des fonctions contractantes.

Seconde situation. On suppose f' est négative. La représentation graphique de la suite récurrente donne alors un "escargot", si on prend u_0 dans I tel que $u_1 = f(u_0) \in I$.

Figure 1



Exercice 3.18. : Vérifier que le segment $[u_0, f(u_0)]$ (ou $[f(u_0), u_0]$) est envoyé dans lui-même par f, ce qui permet d'appliquer le théorème des fonctions contractantes.

Reprenons l'exemple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \alpha \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où la fonction f est donnée par$f(x) = \sqrt{2x+1}$. On sait qu'elle a un point fixe $\ell = 1+\sqrt{2}$. On a $f'(x) = 1/\sqrt{2x+1}$, donc pour tout $x \geq 1$ on a $0 \leq f'(x) \leq 1/\sqrt{3}$. Si $0 \leq u_0 < \ell = 1+\sqrt{2}$ alors on a $1 \leq u_1 \leq \ell$ et on est dans la situation de l'escalier montant pour la suite qui commence à u_1. Si $u_0 > \ell$, on est dans la situation de l'escalier descendant. Par l'exercice 3.17, la suite converge vers $\ell = 1+\sqrt{2}$.

Il arrive cependant qu'on ne puisse pas utiliser les résultats précédents (théorème 3.25 et proposition 3.26), parce que l'une de leurs hypothèses est fausse ou parce que l'on ne sait pas montrer que l'une d'elles est vraie. Dans cette situation, on essaye une méthode alternative (à trouver !). Il est utile de penser aux théorèmes généraux concernant les suites (sur les suites monotones, adjacentes, etc ...). Un exemple est donné dans l'

Exercice 3.19. : Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha \geq 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, où f est définie par $f(x) = 2\sqrt{x-1}$ pour $x \geq 1$.
Montrer que f a un seul point fixe que l'on note ℓ. Que vaut $f'(\ell)$? Pourquoi ne peut-on pas appliquer la proposition 3.26 sur le segment $[\ell, u_0]$?
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq 2$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Conclure.

Dans la situation décrite plus haut, il se peut qu'on ait

$$k \;:=\; \sup_{x\in I} |f'(x)| \;=\; 1\,. \tag{3.12}$$

Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $u_0 = \alpha \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ne peut pas appliquer la proposition 3.26 mais, en s'inspirant des exercices 3.17 et 3.18, on a

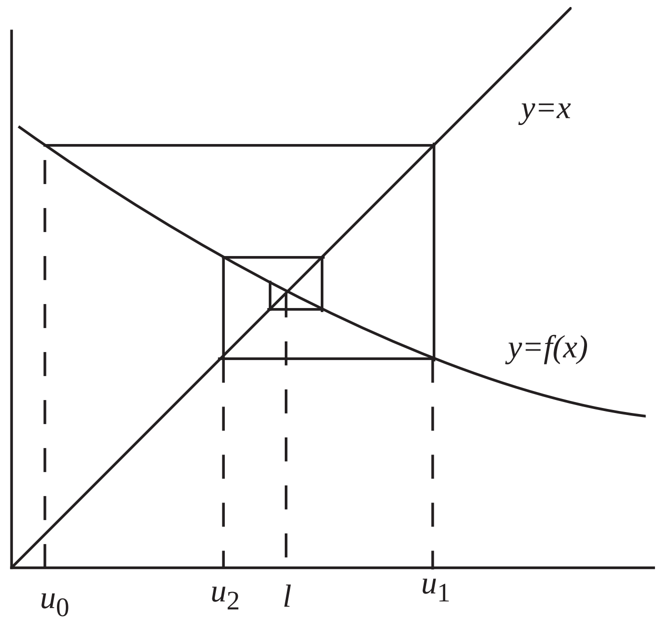


Figure 2

Exercice 3.20. : On se place dans le cas où (3.12) est vérifiée. Si f' est positive, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Si f' est négative, montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposés.

On verra sur des exemples concrets (cf. TD) comment on peut utiliser l'exercice 3.20.

3.4.3 Vitesse de convergence et méthode de Newton.

Dans ce paragraphe, on essaye d'abord de décrire la "vitesse de convergence" d'une suite convergente vers sa limite. On introduit pour cela les notions de convergence linéaire et convergence quadratique (la seconde étant "plus rapide" que la première). Ensuite, on s'intéresse au problème de trouver de bonnes approximations de nombres qui sont racines d'un polynôme (comme $\sqrt{2}$). Si α est un tel nombre, il est assez facile de construire une suite récurrente qui converge vers α. Les termes de la suite fournissent des approximations aussi bonnes que l'on veut de α. Mais s'il faut calculer le 1250-ième terme de la suite pour avoir 5 décimales exactes de α, ce n'est pas très intéressant. C'est pourquoi on aimerait disposer d'une suite qui converge "vite" vers α. C'est ce que réalise la méthode de Newton puisqu'elle fournit une suite récurrente convergeant quadratiquement vers α (ce qui est déjà mieux qu'une convergence linéaire).

Considérons deux suites récurrentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui sont bien définies et ont toutes les deux $\sqrt{2}$ pour limite, comme l'établit l'exercice 3.21. Elles sont données par

$$u_0 = v_0 = 3/2\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} \ = \ (1/2)\big(u_n + 2/u_n\big)\,,\ v_{n+1} \ = \ (9/20)v_n + (11/20)(2/v_n)\,.$$

Exercice 3.21. : Soient $f, g :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) \ = \ (1/2)\big(x + 2/x\big)\,, \quad g(x) \ = \ (9/20)x + (11/20)(2/x)\,.$$

Vérifier que $f([1;2]) \subset [1;2]$ et $g([1;2]) \subset [1;2]$. Majorer $|f'(x)|$ et $|g'(x)|$ sur $[1;2]$. En déduire la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sqrt{2}$.

Jusqu'ici, les deux suites semblent avoir un comportement tout à fait semblable. Mais, expérimentalement, on constate qu'il n'en est rien. On donne ci-dessous les sept premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en indiquant en gras les décimales exactes (qui coincident avec celles de $\sqrt{2}$).

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
u_0 & = & \mathbf{1},5 \\
u_1 & = & \mathbf{1.416}\ldots \\
u_2 & = & \mathbf{1,41421}5\ldots \\
u_3 & = & \mathbf{1.414213562373}46\ldots \\
u_4 & = & \mathbf{1,41421356237309504880168}962\ldots \\
u_5 & = & \mathbf{1,4142135623730950488016887242096980785696718753}772\ldots \\
u_6 & = & \mathbf{1,4142135623730950488016887242096980785696718753769480731} \\
 & & \mathbf{76679737990732478462107038850387534327641}60\ldots
\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcl}
v_0 & = & \mathbf{1},5 \\
v_1 & = & \mathbf{1},408333\ldots \\
v_2 & = & \mathbf{1,414}815\ldots \\
v_3 & = & \mathbf{1,414}153\ldots \\
v_4 & = & \mathbf{1,41421}9\ldots \\
v_5 & = & \mathbf{1,41421}2962\ldots \\
v_6 & = & \mathbf{1,414213}622\ldots
\end{array}}$$

On constate que les deux suites ont un comportement différent. On a envie de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge beaucoup plus vite que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: à chaque étape, le nombre de décimales exactes de u_n double approximativement (2, 5, 11, 23, 47, 96). Autrement dit si l'erreur à une étape est de l'ordre de 10^{-k}, à l'étape suivante elle est approximativement de l'ordre de 10^{-2k}. Ce comportement constaté expérimentalement se retrouve par un petit calcul. On a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - \sqrt{2} &= (1/2)\big(u_n + 2/u_n\big) - \sqrt{2} \\
&= \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}\,u_n + 2}{2u_n} = \big(u_n - \sqrt{2}\big)^2 \frac{1}{2u_n}\,.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Cette égalité permet de vérifier par récurrence que $u_n \geq \sqrt{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient

$$0 \leq u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}\big(u_n - \sqrt{2}\big)^2\,,$$

ce qui correspond bien au comportement constaté. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une *convergence quadratique* : l'erreur au rang $n{+}1$ est majorée par une constante (indépendante de n) fois le carré de l'erreur au rang n.

Pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on constate qu'on est dans la situation de l'escargot (cf. exercice 3.18) puisque $g'(x) < 0$ pour $x < (22/9)^{1/2} \approx 1,56$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [7/5; 3/2]$ sur lequel on peut majorer $|g'(x)|$ par $(109/980) < (12/100)$. On obtient donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|v_{n+1} - \sqrt{2}\right| \;\leq\; \frac{12}{100}\left|v_n - \sqrt{2}\right| .$$

L'erreur est en gros divisée par 10 à chaque étape, comme on le constate expérimentalement. On dit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une *convergence linéaire* : l'erreur au rang $n+1$ est majorée par une constante (< 1 et indépendante de n) fois l'erreur au rang n.

Exercice 3.22. : Si l'on veut 1000 décimales de $\sqrt{2}$, combien de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suffit-il de calculer ? Combien pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Remarque 3.28. *Concernant ces notions de vitesse de convergence, il convient de bien voir les choses suivantes. Tout d'abord, une suite convergeant quadratiquement converge aussi linéairement. Ensuite, le fait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge linéairement et qu'on ne voit pas comment montrer une convergence quadratique, ne signifie pas qu'une telle convergence quadratique est exclue. Pour bien comprendre ce dernier point, revenons à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et supposons que l'on n'ait pas vu l'astuce (3.13). On pourrait cependant montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge linéairement (comme on l'a fait ci-dessus pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$). On aurait l'impression que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas très vite. Mais c'est oublié que le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge linéairement signifie en fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* **au moins** *linéairement !*

Pour estimer les "vitesses" de convergence de suites récurrentes, l'application du théorème des accroissements finis (cf. théorème 2.17) ne peut donner autre chose qu'une convergence linéaire. Pour pouvoir détecter des phénomènes de convergence quadratique, il nous faut un outil plus puissant. C'est la formule de Taylor avec reste de Lagrange (cf. théorème 2.27).

Reprenons l'étude de la "vitesse" de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la lumière de cette formule de Taylor avec reste de Lagrange. Avec les notations de l'exercice 3.21, pour $x \in [1, 2]$, écrivons la formule de Taylor-Lagrange pour f, qui est de classe C^∞ sur $]0.+\infty[$, à l'ordre 1 entre $\sqrt{2}$ et x. Il existe c entre $\sqrt{2}$ et x tel que

$$f(x) \;=\; f\big(\sqrt{2}\big) \;+\; \big(x-\sqrt{2}\big)\cdot f'\big(\sqrt{2}\big) \;+\; \frac{\big(x-\sqrt{2}\big)^2}{2}\cdot f''(c)\,.$$

Comme $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $f'(\sqrt{2}) = 0$, $f''(t) = -2/t^3$, on obtient

$$f(x) \;=\; \sqrt{2} + \frac{\big(x-\sqrt{2}\big)^2}{2}\cdot\frac{-2}{c^3}\,.$$

Puisqu'on a supposé $x \in [1, 2]$, on a aussi $c \in [1, 2]$ et on peut majorer $2/c^3$ par 2. On obtient ainsi $|f(x) - \sqrt{2}| \leq (x - \sqrt{2})^2$, et par conséquent $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq (u_n - \sqrt{2})^2$. Cette majoration est un peu moins bonne que celle que l'on avait obtenu par le calcul direct en (3.13). Mais ce qui compte c'est que la formule de Taylor-Lagrange permet de mettre en évidence la convergence quadratique, ce qu'on n'arrivait pas à faire avec le théorème des accroissements finis. On remarque que ce qui permet d'obtenir la convergence quadratique est le fait que $f'(\sqrt{2}) = 0$, c'est-à-dire que la dérivée de la fonction qu'on itère s'annule au point fixe.

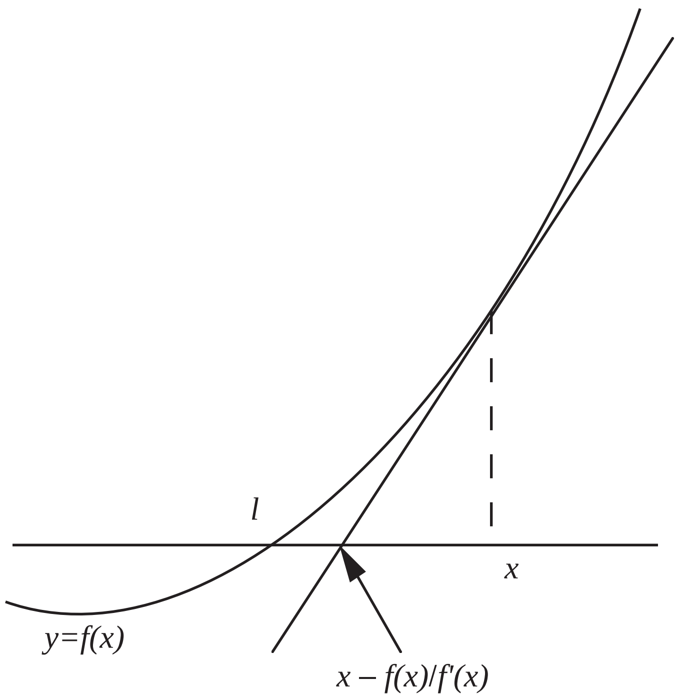
Passons maintenant au problème d'approximation d'une racine d'une équation (par exemple) polynômiale. Il est assez facile de construire une suite récurrente qui converge vers cette racine. Pour $\sqrt{2}$, on peut utiliser l'

Exercice 3.23. : Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x + (x^2 - 2)/100$. Vérifier que $\sqrt{2}$ est un point fixe de h. En utilisant la proposition 3.26 sur l'intervalle $[1; 2]$, montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = h(w_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et converge vers $\sqrt{2}$.

Cependant, comme pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ précédente, on espére seulement montrer une convergence linéaire. C'est là que la méthode de Newton se révèle intéressante : non seulement elle fournit une suite récurrente convergeant vers $\sqrt{2}$ mais aussi garantit une convergence quadratique de cette suite !

Décrivons la méthode de Newton. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^3 admettant une racine ℓ. On suppose que $f'(\ell) \neq 0$. On veut construire une suite récurrente convergeant vers ℓ. L'idée de l'algorithme se comprend facilement sur la figure 3. Si l'on part de a pas trop loin de ℓ, et si l'on trace la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ (on suppose qu'elle n'est pas horizontale), l'intersection de cette tangente avec l'axe des x va donner une approximation b de ℓ (qui semble bien meilleure que a). Comme l'équation de la

Figure 3



tangente à f en $(a, f(a))$ est $y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$, il est facile de voir que b vérifie

$0 = f(a) + f'(a) \cdot (b - a)$ et, comme $f'(a)$ est supposé non nul, on obtient

$$b \;=\; a - \frac{f(a)}{f'(a)}\,.$$

Comme $f'(\ell) \neq 0$ et f' est continue en ℓ, il y a un intervalle ouvert I contenant ℓ sur lequel f' ne s'annule pas (cf. proposition 1.23). L'application $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(x) \;=\; x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{3.14}$$

est de classe C^2 (cf. proposition 2.23). De plus, pour tout $x \in I$,

$$\Phi'(x) \;=\; 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \;=\; \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\,. \tag{3.15}$$

D'après la construction précédente, ℓ est un point fixe de Φ, ce que l'on vérifie sur (3.14), puisque $f(\ell) = 0$. Mais le point crucial de la méthode est le fait que $\Phi'(\ell) = 0$, comme on le constate dans (3.15), puisque $f(\ell) = 0$. Comme Φ' est continue, il existe $h > 0$ tel que, pour tout $x \in [\ell - h; \ell + h]$, on ait $|\Phi'(x)| \leq 1/2$ (cf. proposition 1.20). Si l'on prend $a \in [\ell - h; \ell + h]$ et si l'on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on peut appliquer la proposition 3.26 sur $[\ell - h; \ell + h]$ (par le théorème des accroissements finis, il est facile de montrer que, pour tout $x \in [\ell - h; \ell + h]$, $|\Phi(x) - \ell| \leq (1/2)|x - \ell|$ ce qui assure que $\Phi([\ell - h; \ell + h]) \subset [\ell - h; \ell + h]$). On en déduit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Vérifions que la convergence est quadratique. Comme précédemment, on utilise Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en ℓ. Comme Φ'' est continue sur le segment $[\ell - h; \ell + h]$, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [\ell - h; \ell + h]$, $|\Phi''(x)| \leq M$ (cf. théorème 1.34). Pour chaque $x \in [\ell - h; \ell + h]$, il existe un $c \in [\ell - h; \ell + h]$, tel que

$$\Phi(x) \;=\; \Phi(\ell) + (x - \ell)\Phi'(\ell) + \frac{(x - \ell)^2}{2}\Phi''(c) \;=\; \ell + \frac{(x - \ell)^2}{2}\Phi''(c)\,.$$

On a donc, pour tout $x \in [\ell - h; \ell + h]$,

$$|\Phi(x) - \ell| \;\leq\; \frac{M \cdot (x - \ell)^2}{2}\,.$$

Comme, à partir d'un certain rang N, tous les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[\ell - h; \ell + h]$, on a, pour $n \geq N$,

$$|x_{n+1} - \ell| \;\leq\; \frac{M \cdot (x_n - \ell)^2}{2}\,,$$

c'est-à-dire une convergence quadratique.

Si l'on applique la méthode de Newton à $\sqrt{2}$, donc à $x^2 - 2 = 0$, on tombe sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du début du paragraphe (c'est la méthode de Héron).

Exercice 3.24. : Décrire une méthode de calcul approché de $\sqrt[3]{2}$ qui ait une convergence quadratique.

3.4.4 Complément : suites récurrentes homographiques.

Pour un certain type de suite, les suites homographiques, on peut faire une étude plus délicate que celle présentée précédemment mais particulièrement efficace.
Définissons d'abord ce type de suite. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. Notons qu'alors c et d ne peuvent être nuls tous les deux. Soit $D = \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, si $c \neq 0$, $D = \mathbb{R}$ si $c = 0$. La fontion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in D$, associe $(ax+b)/(cx+d)$, est bien définie. Cette application est, par définition, une homographie et toute suite récurrente construite à partir d'une telle fonction est une suite homographique. Une propriété importante des fonctions homographiques est qu'elles sont bijective de D sur $f(D)$ et que la bijection réciproque est encore une homographie.

Exercice 3.25. : Vérifier l'affirmation précédente en précisant l'ensemble $f(D)$. Pour cela, traiter d'abord le cas $c = 0$ (noter qu'alors a et d sont non nuls). Traiter ensuite le cas $c \neq 0$ (on montrera que $a/c \notin f(D)$).

Expliquons pourquoi on impose $ad - bc \neq 0$. Si l'on prend $(c,d) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ad - bc = 0$, alors la fonction $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$ est bien définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$, si $c \neq 0$, $D = \mathbb{R}$ si $c = 0$. Mais elle est constante ! Vérifions-le. Dans le cas où $c = 0$, on a $d \neq 0$ et, comme $ad - bc = 0$, on a forcément $a = 0$ ce qui montre que la fonction est constante. Dans le cas où $c \neq 0$, on peut dériver la fonction sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-d/c\}$ et on obtient $(ad-bc)/(cx+d)^2 = 0$. La fonction est donc constante sur $]-\infty; -d/c[$ et sur $]-d/c; +\infty[$.
On va illustrer le raisonnement délicat annoncé sur un exemple. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui, à $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, associe $(-3x+1)/(x-3)$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
Il n'est pas clair du tout que la suite soit bien définie, car on pourrait aboutir à $v_n = 3$. On laisse provisoirement de côté ce problème d'existence de la suite et on se penche sur la convergence éventuelle. Cherchons les points fixes de la fonction f. On trouve deux solutions : 1 et -1. On calcule ensuite, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$,

$$f(x) - 1 = \frac{-3x+1}{x-3} - 1 = \frac{-4}{x-3} \cdot (x-1) \text{ et } f(x) + 1 = \frac{-3x+1}{x-3} + 1 = \frac{-2}{x-3} \cdot (x+1)\,.$$

L'astuce consiste à remarquer que, pour $x \neq 1$ et $x \neq 3$, $f(x) \neq 1$ et

$$\frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x+1}{x-1}\,,$$

c'est-à-dire $g \circ f(x) = (1/2)g(x)$, si $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $g(y) = (y+1)/(y-1)$. Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(v_{n+1}) = (1/2)g(v_n)$ c'est-à-dire que la suite $(g(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $1/2$ et de premier terme $g(v_0) = 3$. Donc $g(v_n) = 3/2^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour revenir à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on utilise la bijection réciproque de g. Si cette dernière est continue en $0 = \lim_n g(v_n)$ alors $v_n \to g^{-1}(0)$.
Voyons maintenant comment on peut mettre en place rigoureusement l'idée précédente.

Déterminons d'abord g^{-1}. On procède comme dans l'exercice 3.25 et on trouve que $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est g. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété (v_n est bien défini, $v_n \in \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$ et $g(v_n) = 3/2^n$). On a $\mathcal{P}(0)$ vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$, pour un $n \in \mathbb{N}$. Donc $v_n \in \mathbb{R} \setminus \{1; 3\}$. En particulier v_{n+1} est bien défini. De plus, par le calcul précédent, $v_{n+1} = f(v_n) \neq 1$ et $g(v_{n+1}) = (1/2)g(v_n)$. Comme $g(v_n) = 3/2^n$, on a $g(v_{n+1}) = 3/2^{n+1} \neq 2 = g(3)$. Donc, par injectivité de g, $v_{n+1} \neq 3$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $g^{-1} = g$ est continue en $0 = \lim_n 3/2^n$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(0) = -1$ (cf. théorème 1.19).

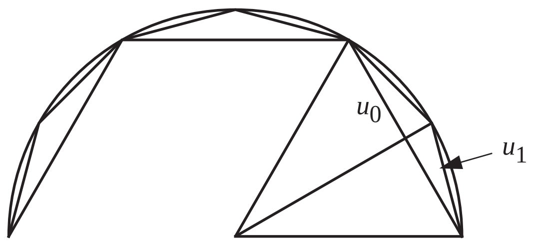
Exercice 3.26. : Traiter de la même manière les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$,

$$u_{n+1} \;=\; \frac{6u_n}{u_n + 4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} \;=\; \frac{v_n + 1}{-v_n + 1} \,.$$

3.5 Complément : calcul de π.

Dans ce complément, on va voir quelques (vieilles) méthodes pour calculer des valeurs approchées de π.

Archimède (287-212 av. J-C) a donné une méthode de calcul de π qui repose sur l'approximation du cercle par des polygones réguliers. On commence avec un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Chaque côté a pour longueur $u_0 = 1$ (le triangle avec un côté pour base et le centre du cercle pour sommet est équilatéral), et le demi-périmètre est $p_0 = 3u_0 = 3$. Ensuite, on double le nombre de côtés pour obtenir un dodécagone régulier (à douze côtés) de côté u_1 et de demi-périmètre $p_1 = 6u_1$. On itère pour avoir après n



itérations un polygone régulier à $6 \cdot 2^n$ côtés, chacun de longueur u_n et de demi-périmètre $p_n = 3 \cdot 2^n u_n$. Chaque côté est la base d'un triangle isocèle de sommet le centre du cercle, et l'angle au sommet est $\pi/(3 \cdot 2^n)$. On a donc

$$u_n \;=\; 2\sin\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad p_n = 6 \cdot 2^n \sin\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n}\right) \,.$$

Ce ne sont pas ces formules qui permettent de calculer explicitement u_n et p_n, mais on a la formule de récurrence

$$u_{n+1} \;=\; \sqrt{2 - \sqrt{4 - u_n^2}} \,.$$

Exercice 3.27. : Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2\theta \;=\; 4\sin^2(\theta/2) \cdot \left(1 - \sin^2(\theta/2)\right) \,.$$

En déduire la formule de récurrence donnant $(u_n)_n$.

On s'est ramené à des opérations algébriques et à l'extraction de racines carrées que l'on peut effectuer approximativement en utilisant la méthode de Héron.
Le fait que la suite (p_n) tend vers π est intuitivement évident d'après la construction géométrique. On le retrouve aussi sur la formule donnée pour p_n.

Exercice 3.28. : Étudier la limite de $(1/x)\sin(\pi x)$ quand x tend vers 0 ? En déduire $\lim_{n\to+\infty} p_n = \pi$.

Examinons maintenant le type de convergence donné par l'algorithme d'Archimède. On écrit la formule de Maclaurin pour la fonction sinus à l'ordre 2. Pour chaque $x \neq 0$, il existe $\theta \in]0;1[$ tel que

$$\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta x)\,.$$

On en déduit $|\sin x - x| \leq |x|^3/6$. En faisant $x = \pi/(6\cdot 2^n)$ dans cette inégalité et en multipliant par $6\cdot 2^n$, on obtient

$$|p_n - \pi| \;\leq\; \frac{\pi^3}{216\cdot 2^{2n}}\,.$$

En passant de l'étape n à l'étape $n+1$, l'erreur est (au moins) divisée par 4. On a donc une convergence linéaire.

Huygens (1596 - 1687) a donné un moyen d'accélérer la convergence de l'algorithme d'Archimède, qui consiste à considérer la suite des $\frac{4}{3}p_{n+1} - \frac{1}{3}p_n$. Nous allons expliquer pourquoi ceci marche (l'explication donnée, qui repose sur la formule de Taylor, n'est bien sûr pas celle de Huygens). On écrit maintenant la formule de Maclaurin pour sinus à l'ordre 4. Pour chaque $x \neq 0$, il existe $\theta' \in]0;1[$ tel que

$$\sin x \;=\; x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cdot\cos(\theta' x)\,.$$

En faisant $x = \pi/(6\cdot 2^n)$ (resp. $x = \pi/(6\cdot 2^{n+1})$) dans cette égalité et en multipliant par $6\cdot 2^n$ (resp $6\cdot 2^{n+1}$), on obtient

$$\begin{aligned}
p_n &= \pi - \frac{\pi^3}{216\cdot 2^{2n}} + \frac{\pi^5}{120\cdot 6^4\cdot 2^{4n}}\cdot\cos\left(\theta'_n\cdot\frac{\pi}{6\cdot 2^n}\right)\,,\\
p_{n+1} &= \pi - \frac{\pi^3}{216\cdot 2^{2(n+1)}} + \frac{\pi^5}{120\cdot 6^4\cdot 2^{4(n+1)}}\cdot\cos\left(\theta'_{n+1}\cdot\frac{\pi}{6\cdot 2^{n+1}}\right)\,.
\end{aligned}$$

Notons c_n (resp. c_{n+1}) le cosinus qui apparaît dans la formule pour p_n (resp. p_{n+1}). Si on calcule $-\frac{1}{3}p_n + \frac{4}{3}p_{n+1}$, on fait disparaître du côté droit les termes contenant 2^{2n} et $2^{2(n+1)}$ au dénominateur :

$$-\frac{1}{3}p_n + \frac{4}{3}p_{n+1} \;=\; \pi - \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^5}{120\cdot 6^4\cdot 2^{4n}}\cdot c_n + \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^5}{120\cdot 6^4\cdot 2^{4(n+1)}}\cdot c_{n+1}\,.$$

d'où l'on déduit, en posant $v_n = \frac{4}{3}p_{n+1} - \frac{1}{3}p_n$ en encadrant les cosinus entre -1 et 1,

$$|v_n - \pi| \;\leq\; \frac{\pi^5}{360\cdot 6^4\cdot 2^{4n}}\,.$$

La suite (v_n) tend vers π. Cette fois-ci l'erreur est (au moins) divisée par 16 'a chaque étape. la convergence est toujours linéaire, mais elle a bien été accélérée.

Une autre méthode historique de calcul de π est due à John Machin (1680 -1752). Elle repose sur la formule

$$\pi \;=\; 16 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{1}{5} \;-\; 4 \cdot \operatorname{Arctan} \frac{1}{239} \,. \tag{3.16}$$

Exercice 3.29. : En utilisant les formules d'addition pour tangente (cf. propositions 2.44 et 2.45), calculer

$$\tan\big(2\operatorname{Arctan}(1/5)\big)\,, \quad \tan\big(4\operatorname{Arctan}(1/5)\big) \quad \text{et} \quad \tan\big(4\operatorname{Arctan}(1/5) \,-\, \operatorname{Arctan}(1/239)\big)\,.$$

En déduire (3.16).

Pour tirer de (3.16), une approximation de π, il faut expliquer comment calculer de manière approchée les arctangentes. On part de

$$\big(1+t^2\big) \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (t^2)^k \;=\; 1 \;+\; (-1)^n t^{2n+2}\,,$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{1+t^2} \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (t^2)^k \;-\; (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,.$$

En intégrant entre 0 et x, il vient

$$\operatorname{Arctan} x \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \;-\; (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt\,.$$

Remarque 3.29. *On aurait pu obtenir une formule de ce type en utilisant la formule de Maclaurin à l'ordre $2n+2$ pour la fonction arctangente (cf. paragraphe 2.3.2), mais le reste aurait été plus difficile à estimer parce qu'on n'a pas de formule simple pour les dérivées de Arctan.*

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,.$$

On a

$$|\operatorname{Arctan} x \;-\; u_n(x)| \;=\; \left| \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt \right| \;\leq\; \int_0^x t^{2n+2}\, dt \;=\; \frac{x^{2n+3}}{2n+3}\,.$$

Si l'on pose $w_n = 16u_n(1/5) - 4u_n(1/239)$, alors w_n tend vers π et

$$|w_n - \pi| \;\leq\; \frac{1}{2n+3} \cdot \left(\frac{1}{5^{2n+3}} \;+\; \frac{1}{239^{2n+3}} \right)\,.$$

La convergence est linéaire, l'erreur à chaque étape est en gros divisée par 25. C'est mieux que la méthode d'Archimède, même accélérée par Huygens, et en plus il n'y a pas besoin d'extraire de racines carrées.

Archimède	Huygens	Machin
3		$3,183\ldots$
$3,1\mathit{05}\ldots$	$3,141\mathit{1}\ldots$	$3,14\mathit{05}\ldots$
$3,1\mathit{32}\ldots$	$3,1415\mathit{62}\ldots$	$3,141\mathit{62}\ldots$
$3,1\mathit{39}\ldots$	$3,14159\mathit{07}\ldots$	$3,14159\mathit{17}\ldots$
$3,141\mathit{03}\ldots$	$3,141592\mathit{53}\ldots$	$3,1415926\mathit{82}\ldots$
$3,141\mathit{45}\ldots$	$3,1415926\mathit{46}\ldots$	$3,14159265\mathit{26}\ldots$

Des formules du type de la formule de Machin ont permis de calculer sur ordinateur plusieurs centaines de milliers de décimales de π. Mais l'histoire ne s'arrête pas là : un algorithme de calcul de π a été proposé en 1976 par Salamin. Il donne une convergence *quadratique*, donc beaucoup plus rapide. Nous ne ferons pas l'étude de cet algorithme ici. Elle n'est cependant pas hors de portée : elle a même fait l'objet d'une des épreuves du CAPES de Mathématiques en 1995. Un exemple qui montre que les mathématiques, même si elles reposent sur une longue histoire, sont loin d'être mortes !

Table des matières