Redistribution des points.

"Grâce à deux mains exceptionnelles de suite, nous avons distancé définitivement nos adversaires dans cette partie de belotte". Bref, la partie n'a plus d'intérêt même si elle n'est pas terminée. En remplaçant le hasard par une différence intrinsèque de qualité, on dirait la même chose d'une partie de golf m'opposant au numéro un mondial. Heureusement, au golf et dans les sports en général, il existe des systèmes (divisions, handicaps) permettant de mettre du sel dans les parties. Curieusement, ces systèmes n'ont pas été largement reproduits dans le champ économique. Cependant, ces dispositifs n'évitent pas à coup sûr la situation ci-dessus décrite, comme lorsque le champion de France de football de première division est connu à six journées de la fin du championnat.
Dans cette note, on propose un autre dispositif pour les jeux à points, agissant entre deux parties sur la répartition des points. Après avoir présenté les grandes lignes de ce dispositif, dont les détails sont renvoyés dans une annexe, nous donnerons des exemples d'application, exemples parmi les jeux de société mais aussi en société. Enfin, on terminera par un aperçu des limites dudit dispositif.

Modèle de redistribution des points.

Étant donné un jeu avec plusieurs joueurs, se déroulant sur plusieurs parties et dont le classement final est établi avec un système de points distribués à chaque partie, on aimerait éviter que de trop grands écarts se creusent entre les nombres de points des joueurs, afin de conserver jusqu'au bout un intérêt pour le jeu. Bien entendu (?), l'intervention que l'on veut pratiquer ne doit pas remettre en cause le mérite (ou la méritocratie) donc se doit de conserver l'ordre du classement. Par la même occasion, il serait préférable que le mérite ne puisse être confondu avec le hasard (comme c'est parfois le cas dans notre société méritocratique), donc que l'intervention y contribue.

Le dispositif que l'on propose ne vise pas à modifier les règles internes du jeu ni celles distribuant les points aux joueurs à l'issue de chaque partie. Il s'agît d'intervenir entre deux parties successives en modifiant les nombres de points attribués aux joueurs tout en préservant le classement et en s'assurant que la différence de points entre le premier et le dernier ne dépasse pas une certaine "différence tolérée" d, fixée à l'avance. Si $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ sont les nombres (rationnels) de points des n joueurs rangés selon le classement (du premier au dernier) et si $x_1 - x_n$ dépasse la différence tolérée d (i.e. $x_1 - x_n > d$), alors on peut trouver de nouveaux nombres de points $y_1 \geq \cdots \geq y_n$ (donc en préservant le classement) tels que $y_1 - y_n = d$. En utilisant l'algorithme décrit en annexe, on peut déterminer explicitement les y_i satisfaisant les conditions précédentes. Schématiquement, les joueurs dont le nombre de points dépasse la moyenne (de ces nombres) donnent aux autres joueurs une proportion particulière de ce qu'ils ont en plus de la moyenne. Cet algorithme ne modifie pas le nombre total de points, donc la moyenne en question, mais resserrent ces nombres.
En général, les y_i seront des nombres rationnels même si les x_i sont des entiers. Cela peut s'avérer désagréable pour compter les points attribués aux joueurs à l'issue de la partie suivante. Aussi, en utilisant la notion de partie entière, on peut remplacer les y_i par des nombres entiers z_i (voir l'annexe) de sorte que le classement reste inchangé et que $z_1 - z_n \leq d$, diminuant éventuellement le nombre total de points.
Lorsque le nombre de points distribués à chaque partie est assez grand, comme dans certains jeux d'argent par exemple, on peut choisir de remplacer la notion de "différence tolérée" par celle de "taux toléré" $\tau > 1$, en demandant que $y_1 = y_n \times \tau$ si $x_1 > x_n \times \tau$. Une adaptation de l'algorithme précédent, algorithme à contrainte

multiplicative, réalise cette intervention et l'on peut aussi en donner une version discrète délivrant des nombres de points entiers (cf. annexe).

La réalisation effective de ce dispositif est très facile. Il peut être implémenté sur une calculatrice programmable (si la taille des nombres de points et le nombre de joueurs sont "raisonnables"). Il ne faut cependant pas oublier les problèmes dus aux erreurs d'arrondi. Le dispositif présente aussi l'avantage de reposer sur un paramètre réglable (la différence ou le taux toléré) dont l'ajustement devrait permettre d'éviter les écarts qui "tuent le jeu" et, peut-être, de favoriser le mérite et les stratégies à long terme. D'autre part, le principe de base, qui consiste à délester Paul pour habiller Jacques, peut être suivi d'autres manières. On peut imaginer, par exemple, que l'écart à la moyenne ou à la valeur médiane (des nombres de points) doit être limité, éventuellement multiplicativement. Ce genre de variante ne semble pas poser de réels problèmes de réalisation.

Champs d'application possibles.

Reprenons notre match de belotte et supposons que, pour une partie, la différence de gain maximale des deux équipes est de 200 points. Si l'on applique la version additive du dispositif précédent, pour deux joueurs, avec une "différence tolérée" de 200 points, on donne à chaque partie la possibilité théorique d'inverser le classement, préservant ainsi l'intérêt de chaque partie. On peut bien sûr intervenir ainsi dans des parties de tarot, de canasta, etc ...
Dans la pratique, il est probablement préférable d'utiliser une version du dispositif qui génère des nombres entiers de points. Le fait d'utiliser des nombres négatifs pour la distribution des points (comme au tarot) ne gêne absolument pas puisque le dispositif fonctionne avec des nombres entiers relatifs (ou même des nombres rationnels ou réels).

Risquons maintenant une intrusion dans les jeux en société en prenant un exemple qui parle au citoyen. Considérons les foyers fiscaux de France comme les joueurs et leurs revenus annuels comme les points du jeux. On pourrait décider que l'écart de revenu ne doit pas dépasser $200kF$ par exemple, ou bien que le plus haut revenu ne peut être plus de 100 fois le plus petit. Cette seconde contrainte semble plus parlante si bien que l'on utiliserait plutôt la version à contrainte multiplicative du dispositif.
A moins de prendre un taux toléré très bas, on peut conserver une certaine disparité de revenus tout en évitant des abus ... pardon, des écarts trop grands.
La réalisation pratique d'une telle redistribution pourrait se faire par le service des impôts, qui servirait de transit aux versements des riches aux pauvres, l'opération pouvant être couplée au paiement usuel des impôts par les contribuables. Il est à noter de plus que, dans une version du dispositif délivrant des nombres entiers, une partie de la somme totale des points (i.e. des revenus) est enlevée donc pourrait être récupérée par l'État (cette recette peut fluctuer beaucoup d'une année à l'autre donc ne doit pas être considérée comme un revenu stable pour l'État).
Au delà d'un certain seuil de revenu, il ne serait possible pour un riche contribuable d'augmenter ses revenus nets qu'en contribuant à faire monter ceux de ses concitoyens. Cette perspective pouvant le rebuter, il se peut qu'il choisisse de maintenir son revenu en deça dudit seuil. Une telle réaction pourrait provoquer un ralentissement des activités économiques, ce qui ne serait pas forcément malsain.

Plus généralement, il est envisageable d'implanter ce dispositif dans le monde économique. Il pourrait être appliqué aux revenus touchés au sein d'une entreprise par les salariés et les actionnaires. On pourrait également intervenir sur les revenus des états membres de l'ONU (en se basant peut-être sur le PNB/habitant), favorisant une redistribution Nord-Sud des richesses. Bref, le principe de base étant relativement général, il est probable que l'on puisse recourrir à ce dispositif dans divers “jeux en société”, à des échelles diverses.

Limites.

Comme la théorie du chaos l'a démontré, un système déterministe simple peut présenter dans la pratique un caractère non-déterministe (pensons à la météorologie). Il est donc conseillé de s'attendre à ce qu'un système conçu pour accomplir une certaine tâche présente des effets secondaires désagréables ou même, lorsque la tâche est mal définie ou confondue avec un fantasme, qu'il engendre le contraire de ce que l'on espère. De plus, un outil ne fait pas une politique et peut être dévoyé de son objectif initial.

Si l'on appliquait le dispositif présenté ci-dessus aux notes d'étudiants à un examen dans une matière, on construirait un bel exemple de dévoiement du dispositif. L'étude d'une matière n'est pas un jeu et les notes ne sont pas des biens des étudiants à partager entre eux selon leurs mérites. Notons au passage que, dans l'enseignement en général, certaines pratiques ont (eu) des effets comparables, tendant à identifier la note à une sorte de salaire ou récompense et à oublier que celle-ci est sensée informer l'étudiant (l'élève) sur sa compréhension et maîtrise d'une matière.
Mais revenons à notre dispositif et concentrons-nous sur ses défauts internes. Tout d'abord, à la vue des applications aux jeux en société, il semble relativement facile d'avoir des tricheurs. En ce qui concerne les revenus en France, les riches contribuables pourraient placer une partie de leur fortune à l'étranger (comme ils le font déjà aujourd'hui). Certes, ceci ne se produirait pas si le dispositif agissait à l'échelle mondiale, mais dans la pratique le champ d'action sera probablement limité et dans le cas présent, il serait peut-être plus avisé de taxer les sorties d'argent du pays. Bref, un autre dispositif est nécessaire pour éviter le problème soulevé.
Même en l'absence de tricheurs, il n'est pas clair que ce dispositif favorisera des stratégies à long terme et une répartition harmonieuse des points. Dans le cas des revenus, il n'y a pas de raison a priori que le dispositif interdise “l'argent facile” ou la répartition des revenus en castes bien séparées. Il garantit seulement la conservation du classement (en ordre décroissant des revenus) tout en évitant les écarts supérieurs à une valeur donnée.
Enfin, il est très difficile de prévoir a priori les stratégies des joueurs qui seront favorisées par le dispositif. Faute d'expériences, on ne peut pas exclure l'apparition de comportements, que l'on peut par ailleurs jugés inacceptables.

Conclusion.

Deux choses différentes ont été présentées dans cette note. Tout d'abord, un principe général de répartition de points et une réalisation concrète de ce principe dans un cadre simple (les jeux à points). Pour aller plus loin, il faudrait faire des simulations pour voir quelles stratégies se dégagent d'une part et, d'autre part, procéder à des implantations expérimentales du dispositif dans des jeux en société (dont la complexité n'a rien à voir avec celle des jeux à points) pour observer ses effets. Dans les deux cas, une attention particulière doit être portée au paramètre de réglage qu'est le taux (la différence) toléré(e).

Annexe.

Dans cette annexe, on présente en détail les différents algorithmes de redistribution de points. Les affirmations données dans le texte principal à leurs sujets sont justifiées ici.

Algorithme à contrainte additive.

Soit n un nombre entier ≥ 2 (le nombre de joueurs). Soit $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ des nombres réels (les nombres de points des joueurs). Soit $d > 0$ un nombre entier (la différence tolérée). On définit l'excès e par $e = x_1 - x_n - d$.
Si $e \leq 0$, la différence $x_1 - x_n \leq d$ et l'on ne modifie pas la répartition des points.
Considérons le cas où $e > 0$. Soit m la moyenne des nombres x_i :

$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{1}$$

Pour un certain nombre α compris entre 0 et 1, à choisir, on définit $y_i = x_i - (x_i - m)\alpha = (1-\alpha)x_i + m\alpha$, pour i variant de 1 à n. Le joueur numéro i voit son nombre de points diminuer (resp. augmenter) d'une proportion α de l'écart à la moyenne de son nombre initial de points si celui-ci est supérieur (resp. inférieur) à cette moyenne.
Pour déterminer α, on impose $y_1 - y_n = d$. On a

$$\begin{aligned} y_1 - y_n = d &\iff (1-\alpha)(x_1 - x_n) = d \\ &\iff (1-\alpha)(e+d) = d \\ &\iff \alpha = 1 - \frac{d}{d+e} = \frac{e}{d+e} . \end{aligned}$$

Pour $\alpha = e/(d+e)$ qui est bien un nombre rationnel compris entre 0 et 1, on a :

$$y_1 \geq \cdots \geq y_n \tag{2}$$
$$y_1 - y_n = d \tag{3}$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = m . \tag{4}$$

La propriété (3) a déjà été vérifiée (cf. le choix de α). Pour i variant de 1 à $n-1$, $y_i - y_{i+1} = (1-\alpha)(x_i - x_{i+1}) \geq 0$ puisque $\alpha \leq 1$ et $x_i \geq x_{i+1}$. La propriété (2) est donc vraie. Enfin,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-\alpha)x_i + \frac{1}{n} m\alpha \times n = (1-\alpha)m + m\alpha = m .$$

La propriété (2) signifie que le classement est inchangé. La propriété (3) assure que l'écart maximal de nombres de points est d. Enfin, la propriété (4) indique que la moyenne des nombres de points est inchangée.
On peut remarquer au passage que, si les x_i sont des nombres entiers, les y_i sont a priori des nombres rationnels.

Algorithme à contrainte additive, version discrète.

On suppose que $d > 1$ et on note par $E(x)$ la partie entière du nombre réel x, c'est-à-dire le plus grand nombre entier (relatif) inférieur ou égal à x (attention

$E(-0,5) = -1)$. On applique l'algorithme précédent pour la différence tolérée $d-1>0$. Pour i variant de 1 à n, on pose $z_i = E(y_i)$. On a alors :

$$z_1 \geq \quad \cdots \quad \geq z_n \tag{5}$$
$$d-2 \; < \; z_1 - z_n \quad \leq \quad d \tag{6}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - n \; < \; \sum_{i=1}^{n} z_i \quad \leq \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \; . \tag{7}$$

Les propriétés (5) et (6) s'interprêtent comme précédemment. La propriété (7) signifie que le nombre total de points est éventuellement diminué d'une quantité $< n$.
La fonction $x \mapsto E(x)$ étant croissante, la propriété (5) découle de (2). De plus,

$$\begin{aligned} z_1 - z_n &= E(y_1) - y_1 + y_1 - y_n + y_n - E(y_n) \\ &= E(y_1) - y_1 + d - 1 + y_n - E(y_n) \; . \end{aligned}$$

Comme $E(y_1) - y_1 \leq 0$ et $y_n - E(y_n) \leq 1$, on obtient $z_1 - z_n \leq d$. Comme $-1 < E(y_1) - y_1$ et $0 \leq y_n - E(y_n)$, on obtient $z_1 - z_n > d-2$. On a donc vérifié la propriété (6). Enfin,

$$-n + \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - 1) < \sum_{i=1}^{n} E(y_i) \leq \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \; ,$$

ce qui prouve (7).

Algorithme à contrainte multiplicative.

Soit n un nombre entier ≥ 2 (le nombre de joueurs). Soit $x_1 \geq \cdots \geq x_n$ des nombres réels (les nombres de points des joueurs). Soit $\tau > 1$ un nombre rationnel (le taux toléré). On définit l'excès e par $e = x_1 - \tau x_n$.
Si $e \leq 0$, on a $x_1 \leq \tau x_n$ et l'on ne modifie pas la répartition des points.
Considérons le cas où $e > 0$. On note par m la moyenne des x_i donnée par (1). Comme dans l'algorithme à contrainte additive, on cherche un certain α compris entre 0 et 1 tel que, en posant $y_i = x_i - (x_i - m)\alpha = (1-\alpha)x_i + m\alpha$, pour i variant de 1 à n, on ait $y_1 = \tau y_n$. On a

$$\begin{aligned} y_1 \; = \; \tau y_n \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 - (x_1 - m)\alpha \; = \; \tau x_n - (x_n - m)\alpha\tau \\ &\Longleftrightarrow \quad e \; = \; \alpha\big(m(\tau - 1) + e\big) \\ &\Longleftrightarrow \quad \alpha \; = \; \frac{e}{m(\tau-1)+e} \; . \end{aligned}$$

Pour $\alpha = e/(m(\tau-1)+e)$, qui est bien compris entre 0 et 1, on a

$$y_1 \geq \quad \cdots \quad \geq y_n \tag{8}$$
$$y_1 \quad = \quad \tau y_n \tag{9}$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad = \quad m \; . \tag{10}$$

Ces propriétés se vérifient comme dans le cas de l'algorithme à contrainte additive. Là encore, si les x_i sont des nombres entiers, les y_i sont a priori des nombres rationnels.

Algorithme à contrainte multiplicative, version discrète.

On applique l'algorithme précédent et, en utilisant la fonction "partie entière" E définie dans l'algorithme discret précédent, on pose, pour i variant de 1 à n, $z_i = E(y_i)$. On a

$$\begin{aligned} z_1 \geq & \cdots \geq z_n & (11) \\ -1 < z_1 - \tau z_n & \leq \tau\big(y_n - E(y_n)\big) & (12) \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) - n < \sum_{i=1}^{n} z_i & \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \ . & (13) \end{aligned}$$

Les propriétés (11) et (13) se montrent comme dans l'algorithme discret précédent. Comme $z_n \leq y_n$, on a $\tau z_n \leq \tau y_n = y_1 < z_1 + 1$, donc $z_1 - \tau z_n > -1$. De plus, $z_1 \leq y_1 = \tau y_n = \tau z_n + \tau(y_n - E(y_n))$. On a donc montré (12).
Si $z_1 \leq \tau z_n$, les z_i conviennent.
Considérons le cas où $z_1 > \tau z_n$. Pour i variant de 1 à n, on pose $v_i = z_n + \lambda(z_i - z_n)$ où λ est un nombre réel positif à déterminer. Ici, le joueur numéro i voit son nombre de points diminuer d'une certaine proportion $(1 - \lambda)$ de l'écart de son nombre de points au nombre de points du dernier joueur. Pour choisir λ, on impose $v_1 = \tau v_n$. On a donc

$$\begin{aligned} v_1 = \tau v_n & \iff z_n + (z_1 - z_n)\lambda = \tau z_n \\ & \iff \lambda = \frac{(\tau - 1)z_n}{z_1 - z_n} \ . \end{aligned}$$

Pour $\lambda = (\tau - 1)z_n/(z_1 - z_n)$, qui est bien compris entre 0 et 1, on a

$$\begin{aligned} v_1 \geq & \cdots \geq v_n & (14) \\ v_1 & = \tau v_n & (15) \\ \big(\lambda + (1-\lambda)/\tau\big) \sum_{i=1}^{n} x_i - n(1-\lambda)/\tau - n < & \sum_{i=1}^{n} v_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \ . & (16) \end{aligned}$$

Comme l'application $x \mapsto z_n + \lambda(x - z_n)$ est croissante, (14) découle de (11). En écrivant $v_i = \lambda z_i + (1 - \lambda)z_n$ et en utilisant (11), on voit que la somme des v_i est inférieure à celle des z_i, qui est elle-même inférieure à celle des x_i par (13). En utilisant $z_n > -1 + z_i/\tau$ (qui provient de (11) et (12)) et les propriétés précédentes, on obtient l'autre inégalité de (16).
Certes les v_i ne sont pas tous des nombres entiers a priori mais v_n en est un car $v_n = z_n = E(y_n)$. Grâce à cela, les nombres de points définitifs sont définis par $w_i = E(v_i)$, pour i variant de 1 à n. En effet, on a

$$\begin{aligned} w_1 \geq & \cdots \geq w_n & (17) \\ w_1 & \leq \tau w_n & (18) \\ \big(\lambda + (1-\lambda)/\tau\big) \sum_{i=1}^{n} x_i - n(1-\lambda)/\tau - 2n < & \sum_{i=1}^{n} w_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i \ . & (19) \end{aligned}$$

La croissance de E donne (17) à partir de (14). Comme v_n est un nombre entier, on a $w_1 \leq v_1 = \tau v_n = \tau w_n$, ce qui donne (18). Enfin, comme $-n + \sum v_i < \sum w_i \leq \sum v_i$, on déduit (19) de (16).