

Suiter.

1

TD 2.

Ex. 1 : 1. $P+Q = 0 + \left(\frac{i}{3} - \frac{i}{2}\right)X - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = -\frac{i}{6}X - \frac{11}{12}$.

$$P+R = X^2 + \left(i - \frac{i}{2}\right)X - \frac{2}{3} = X^2 + \frac{i}{2}X - \frac{2}{3}$$

$$P+S = X^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{i}{2}\right)X - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = X^2 + \frac{1-2i}{4}X - \frac{11}{12}$$

$$P+T = \left(1 + \frac{2i}{3}\right)X^2 - \left(i + \frac{i}{2}\right)X + 2i - \frac{2}{3} = \left(1 + \frac{2i}{3}\right)X^2 - \frac{3i}{2}X + 2i - \frac{2}{3}$$

2.

$$\begin{aligned} PQ &= \left(X^2 - \frac{i}{2}X - \frac{2}{3}\right)\left(-X^2 + \frac{i}{3}X - \frac{1}{4}\right) \\ &= -X^4 + \frac{i}{3}X^3 - \frac{X^2}{4} + \frac{i}{2}X^3 - \frac{1}{6}X^2 + \frac{i}{8}X + \frac{2}{3}X^2 - \frac{2i}{9}X + \frac{1}{6} \\ &= -X^4 + \frac{5i}{6}X^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)X^2 + i\left(\frac{1}{8} - \frac{2}{9}\right)X + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$PR = iX\left(X^2 - \frac{i}{2}X - \frac{2}{3}\right) = iX^3 + \frac{X^2}{2} - \frac{2iX}{3}$$

$$\begin{aligned} PS &= \frac{1}{4}(X-1)\left(X^2 - \frac{i}{2}X - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(X^3 - \frac{i}{2}X^2 - \frac{2}{3}X - X^2 + \frac{i}{2}X + \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(X^3 - \left(1 + \frac{i}{2}\right)X^2 + \left(\frac{i}{2} - \frac{2}{3}\right)X + \frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PT &= \left(X^2 - \frac{i}{2}X - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2i}{3}X^2 - iX + 2i\right) \\ &= \frac{2i}{3}X^4 - iX^3 + 2iX^2 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{X^2}{2} + X - \frac{4i}{9}X^2 + \frac{2i}{3}X - \frac{4i}{3} \\ &= \frac{2i}{3}X^4 + \left(\frac{1}{3} - i\right)X^3 + \left(2i - \frac{4i}{9} - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(1 + \frac{2i}{3}\right)X - \frac{4i}{3} \\ &= \frac{2i}{3}X^4 + \left(\frac{1}{3} - i\right)X^3 + \left(\frac{14i}{9} - \frac{1}{2}\right)X^2 + \left(1 + \frac{2i}{3}\right)X - \frac{4i}{3} \end{aligned}$$

Ex. 2. Supposons que P soit le carré d'un polynôme. Q .
Alors, nécessairement, Q est de degré 2.

Il existe $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{Q}^3$ t.q. $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. 12

On a donc

$$P = (\alpha X^2 + \beta X + \gamma)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) = \alpha^2 X^4 + \alpha\beta X^3 + \alpha\gamma X^2 + \alpha\beta X^3 + \beta^2 X^2 + \beta\gamma X + \alpha\gamma X^2 + \beta\gamma X + \gamma^2$$

$$P = \alpha^2 X^4 + 2\alpha\beta X^3 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma)X^2 + 2\beta\gamma X + \gamma^2$$

Comme $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{Q}[X]$, on a donc

$$1 = \alpha^2, \quad 2\alpha\beta = a, \quad \beta^2 + 2\alpha\gamma = b, \quad 12 = 2\beta\gamma \text{ et } 4 = \gamma^2.$$

Il existe $(\varepsilon; \sigma) \in \{-1; 1\}^2$ tel que $\alpha = \varepsilon$ et $\gamma = 2\sigma$.

$$\text{Dne } 2\varepsilon\beta = a, \quad \beta^2 + 4\varepsilon\sigma = b, \quad 3 = \beta\sigma.$$

$$\text{D'où } \beta = 3\sigma, \quad b = 9 + 4\varepsilon\sigma \text{ et } a = 6\varepsilon\sigma.$$

Réciproquement, soit $z \in \{-1; 1\}$. Soit $a = 6z$ et $b = 9 + 4z$. Soit $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ et

$$Q_\varepsilon = \varepsilon X^2 + 3\varepsilon z X + 2\varepsilon z = \varepsilon Q_1.$$

$$\text{On a } Q_\varepsilon^2 = Q_1^2 = (X^2 + 3zX + 2z)^2$$

$$= X^4 + 6zX^3 + 4zX^2 + 12X + 9X^2 + 4$$

$$= X^4 + aX^3 + bX^2 + 12X + 4.$$

Dne P est le carré d'un poly.

Ex. 3 : 1. D'après les formules du cours

$$\deg((x+1)^2) = 2 \deg(x+1) = 2 \text{ et } \deg P = \deg((x+1)^2) + \deg(x-2) = 2 + 1 = 3.$$

$$\deg Q = 3 \deg(x^2 + 1) = 3 \times 2 = 6.$$

$$\deg R = \deg (x+3)^2 + \deg (x^2-5)^2 \quad 13$$

$$= 2\deg(x+3) + 2\deg(x^2-5) = 2 \times 1 + 2 \times 2 = 6.$$

2 - On a,

$$P_n = (x+1)^n - (x-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (-1)^{n-k},$$

On a $\deg P_n \leq n$.

Le coeff. de x^n de P est: $\binom{n}{n} - \binom{n}{n} x (-1)^{n-n} = 0,$

Le coeff. de x^{n-1} de P est: $\binom{n}{n-1} - \binom{n}{n-1} x (-1)^{n-(n-1)} = 2\binom{n}{n-1} = 2n \neq 0.$

Donc $\deg P_n = n-1$ et le terme dominant de P_n est $2n x^{n-1}$.

$$Q_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k - \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} (x^2)^l$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k - \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} x^{2l}.$$

On a $\deg Q_n \leq 2n$ et le coeff. de x^{2n} de Q est

$$\binom{2n}{0} - \binom{n}{0} = 1 - 1 = 0.$$

Le coeff. de x^{2n-1} de Q est

$$\binom{2n}{1} - 0 = 2n \neq 0.$$

Donc $\deg Q_n = 2n-1$ et le terme dominant de Q est $2n x^{2n-1}$.

Ex. 4 et 5 : on montre d'abord le résultat suivant.

(4)

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de poly. de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$.
 $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

(Ce résultat est encore valable si l'on remplace $\mathbb{R}[X]$ par $\mathbb{C}[X]$).

Preuve : * Montrons d'abord que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre.

Supposons le contraire. Alors il existe des réels non nuls $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ ($p \in \mathbb{N}^*$) et des entiers naturels $i_0 < i_1 < \dots < i_p$ tq.

$$\sum_{j=0}^p \lambda_j P_{i_j} = 0.$$

Comme $\deg \left(\sum_{j=0}^{p-1} \lambda_j P_{i_j} \right) \leq \max_{0 \leq j \leq p-1} (\deg P_{i_j}) < i_p = \deg P_{i_p}$

le terme dominant de $\sum_{j=0}^p \lambda_j P_{i_j}$ est le terme dominant de $\lambda_p P_{i_p}$. Comme $\deg P_{i_p} > 0$, on a mda. $\lambda_p = 0$.

Contr.

* Pour $q \in \mathbb{N}$ soit $Q(q) = \left(\text{vect}(X^k)_{0 \leq k \leq q} \subset \text{vect}(P_k)_{0 \leq k \leq q} \right)$.

Comme $\deg P_0 = 0$, P_0 est un poly. ct. non nul. On a

$X^0 = 1 = \frac{1}{P_0} \times P_0 \in \text{vect}(P_0)$, donc $Q(0)$ est vraie.

Supp. $Q(q)$ vraie pour un $q \in \mathbb{N}$.

Comme $\deg(P_{q+1}) = q+1$, il existe $a_{q+1} \in \mathbb{R}^*$ et $R_{q+1} \in \mathbb{R}[X]_{\leq q}$.

$$P_{q+1} = a_{q+1} X^{q+1} + R_{q+1} \text{ avec } \deg R_{q+1} \leq q.$$

Donc

$$X^{q+1} = \frac{1}{a_{q+1}} a_{q+1} X^{q+1} = \frac{1}{a_{q+1}} (P_{q+1} - R_{q+1}) = \frac{1}{a_{q+1}} P_{q+1} - \frac{1}{a_{q+1}} R_{q+1}.$$

Comme $\deg(-\frac{1}{a_{q+1}} R_{q+1}) \leq q$, $-\frac{1}{a_{q+1}} R_{q+1} \in \text{vect}(X^k)_{0 \leq k \leq q}$. Par hyp.

de réc., $\text{vect}(X^k)_{0 \leq k \leq q} \subset \text{vect}(P_k)_{0 \leq k \leq q}$. (*)

Donc $X^{q+1} \in \text{vect}(P_k)_{0 \leq k \leq q+1}$. Donc, par (*),

$\text{vect}(X^k)_{0 \leq k \leq q+1} \subset \text{vect}(P_k)_{0 \leq k \leq q+1}$. Donc $Q(q+1)$ est vraie.

Par réc., $Q(q)$ est vraie pour tout q . Donc

$$\mathbb{R}[X] = \text{vect}(X^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{vect}(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

et $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.

Donc à montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Appl. : Ex. 5.

Par mt $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg P_n = n \times \deg(X-1) = n$

Donc, par le résultat précédent, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Ex. 6.

$$1. a. \text{Donc: } P_2 = X P_1 - P_0 = X^2 - 1, P_3 = X P_2 - P_1 = X(X^2 - 1) - X = X(X^2 - 2)$$

$$\text{et } P_4 = X P_3 - P_2 = X^2(X^2 - 2) - (X^2 - 1).$$

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $Q(n) = (P_{n+1}^2 - P_n P_{n+2} = 1)$. 16

On a : $P_1^2 - P_0 P_2 = X^2 - 1 \times (X^2 - 1) = 1$. Donc $Q(0)$ est vraie. Supp. $Q(n)$ vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} P_{(n+1)+1}^2 - P_{(n+1)} P_{(n+1)+2} &= (X P_{n+1} - P_n)^2 - P_{n+1} (X P_{n+2} - P_{n+1}) \\ &= X^2 P_{n+1}^2 - 2X P_{n+1} P_n + P_n^2 - X P_{n+1} P_{n+2} + P_{n+1}^2 \\ &= (X^2 + 1) P_{n+1}^2 - 2X P_{n+1} P_n + P_n^2 - X P_{n+1} (X P_{n+1} - P_n) \\ &= P_{n+1}^2 - X P_{n+1} P_n + P_n^2 = P_{n+1}^2 - P_n P_{n+2} = 1 \end{aligned}$$

par hyp. de récurrence, donc $Q(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de réc., $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.a. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $R(n) = (\deg P_n = n \text{ et le terme dominant de } P_n \text{ est } X^n)$.

$R(0), R(1)$ sont vraies. Supp $R(q)$ vraie pour $0 \leq q \leq n$ et un $n \in \mathbb{N}$. Si $n=0$, $R(n+1) = R(1)$ est vraie.

Si $n \geq 1$. Alors $P_{n+1} = X P_n - P_{n-1}$ avec

$\deg P_{n-1} = n-1$ et $\deg(X P_n) = 1 + \deg P_n = n+1$.

Donc le terme dominant de P_{n+1} est $X \times$ (terme dominant de P_n)

soit $X \times X^n = X^{n+1}$. Donc $\deg P_{n+1} = n+1$.

Donc $R(n+1)$ est vraie.

Par le Th. de réc., $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. D'après le résultat précédent, $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.