Suites 10.

Développements limités et équivalents.

Attention : - il est important de se souvenir de ce que veut dire la notation $o(v_n)$ car cette notation peut conduire à des erreurs.

Si l'on a $u_n + o(w_n) = v_n + o(w_n)$ cela ne veut pas dire que $u_n = v_n$.

Exemple : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{2}{n}$, $w_n = 1$, $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$

Pour tout $n \geq 1$, $u_n \neq v_n$ mais

$$u_n + o(w_n) = u_n + \frac{1}{n} = 1 + \frac{2}{n} = v_n = v_n + 0 = v_n + o(w_n).$$

- la notion d'équivalent est aussi délicate à manipuler.

Je recommande d'utiliser plutôt les "o". Voir plus quelques pages.

Retour sur la notion d'équivalence de suites.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles (ou complexes). On dit que u est équivalente à v, on note $u \sim v$, si la suite $u - v$ est un petit "o" de v (ou de u) i.e. $u - v = o(v)$.

Rq : Pour vérifier que $u - v = o(v)$, il suffit d'avoir à partir d'un certain rang $u_n - v_n = v_n \varepsilon_n$ où $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers 0.

Intuitivement, un sens que $u \sim v$ signifie essentiellement que $\lim \frac{u}{v} = 1$. C'est parfois vrai (par exemple lorsque $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \ell \neq 0$, on a bien $u \sim \ell$ et $\lim \frac{u_n}{\ell} = 1$ classique) mais pas toujours. Par exemple, on peut avoir $u \sim v$ et la suite $\frac{u}{v}$ n'est pas définie (voir plus loin).

Voici une caractérisation qui restitue l'intuition en évitant le problème de division :

$$\underbrace{u \sim v}_{\mathcal{P}} \iff \underbrace{\left(\exists\, (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} ;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n a_n \text{ et } \lim a_n = 1\right)}_{\mathcal{Q}}$$

Preuve : * $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

On suppose que $u \sim v$ donc $u - v = o(v)$
c'est-à-dire qu'il existe une suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n - v_n = v_n \varepsilon_n$ et $\lim \varepsilon_n = 0$.
Soit $a = 1 + \varepsilon = (1+\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = v_n + v_n \varepsilon_n = v_n(1+\varepsilon_n) = v_n a_n$ et, comme $\lim \varepsilon = 0$,
$\lim a = 1$. Donc (2) est vraie.

* (2) $\Rightarrow$ (1).
On suppose que (2) est vraie.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n - v_n = v_n a_n - v_n = v_n(a_n - 1)$.
Comme $\lim a = 1$, $\lim_{n\to+\infty} a_n - 1 = 0$ donc $v(a-1) = o(v)$
et $u - v = o(v)$. Donc $u \sim v$.

Exemples :
* Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = \dfrac{3n+4}{7n^2+\pi}$, on devine que $u \sim v$ si $v_n = \dfrac{3}{7n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. On écrit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{3n\left(1+\frac{4}{3n}\right)}{7n^2\left(1+\frac{\pi}{7n^2}\right)} = \frac{3}{7n} \times \frac{1+\frac{4}{3n}}{1+\frac{\pi}{7n^2}}$$

$\frac{4}{3n} \to 0$, donc $1+\frac{4}{3n} \to 1+0$; $\frac{\pi}{7n^2} \to 0$, donc $1+\frac{\pi}{7n^2} \to 1$ par les opérations sur les limites.

D'après la caractérisation précédente, on a
$u_n \sim \dfrac{3}{7n}$.

* Soit u et v les suites définies par, pour $n \in \mathbb{N}$,
$u_{2n} = 0$, $u_{2n+1} = 1 + \dfrac{1}{2n+1}$, $v_{2n} = 0$ et $v_{2n+1} = 1$.
On remarque que les suites $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{v_n}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas définies. Cependant, on a $u \sim v$.

Preuve : Soit $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $w_{2n}=0$ et $w_{2n+1}=\frac{1}{2n+1}$.

Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $w_p=\frac{1}{p}\times v_p$ (par p pair c'est vrai car $w_p=0=v_p$; par p impair c'est vrai car $w_p=\frac{1}{p}$ et $v_p=1$)

Comme $\lim \frac{1}{p}=0$, $w=o(v)$. Comme, pour tout $p\in\mathbb{N}$,

$u_p=v_p+w_p$ (pour p pair, $u_p=v_p=w_p=0$; pour p impair, $u_p=1+\frac{1}{p}$, $v_p=1$, $w_p=\frac{1}{p}$)

donc $u-v=o(v)$ et $u\sim v$.

Ex. 28. (i). Pour $n\in\mathbb{N}$, on a

$$u_n=\frac{2n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)}{n^3\left(1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}=\frac{2}{n}\times\frac{1+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}.$$

Comme $\lim\frac{1}{n}=0$, on a, par les opérations sur les limites, $\lim 1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}=1\neq 0$ et $\lim 1+\frac{1}{2n^2}=1$ et, par quotient, $\lim\frac{1+\frac{1}{2n^2}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=1$. Par la caractérisation, $u_n\sim\frac{2}{n}$.

(ii). Comme $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\exp'(0)=e^0=1$, on a $e^x=1+x+o(x)$. De même, comme $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, on a $\sin x=x+o(x)$. Comme $\lim\frac{2}{n}=0=\lim\frac{1}{n}$, on a, par composition, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$e^{\frac{2}{n}}-1=\frac{2}{n}+o\left(\frac{2}{n}\right)$ et $\sin\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$

Ainsi $\frac{e^{\frac{2}{n}}-1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{\frac{2}{n}(1+o(1))}{\frac{1}{n}(1+o(1))}=2\,\frac{1+o(1)}{1+o(1)}$ ($1+o(1)\to 1$ quand $n\to+\infty$, $1+o(1)\to 1\neq 0$ quand $n\to-\infty$)

Donc $v\sim 2$.

(iii). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$w_n = \sqrt{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)} - \sqrt{\ln(n)} = \sqrt{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - \sqrt{\ln(n)}.$$

Pour $n > 1$,

$$w_n = \sqrt{\ln(n)}\left(\sqrt{\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}} - 1\right)$$

$$= \sqrt{\ln(n)} \times \left(\sqrt{1+\frac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1\right).$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est dérivable en 1 de dérivée $\frac{1}{2}$, on a

$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} = \frac{1}{2} + o(1) \quad \text{quand } h \to 0$$

donc $\sqrt{1+h} - 1 = h\left(\frac{1}{2}+o(1)\right) = \frac{1}{2}(1+o(1))$.

De plus, par les opér. sur les limites, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0 \times \ln(1) = 0$, on a, par composition,

$$\sqrt{1+\frac{1}{\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 = \frac{1}{2\ln(n)}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(1+o(1)).$$

Donc $w_n = \frac{1}{2\sqrt{\ln(n)}} \times \left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)(1+o(1)) = \frac{1}{2n\sqrt{\ln(n)}} \underbrace{(1+o(1))}_{\to 1 \text{ } (n\to\infty)}$

donc $w_n \sim \dfrac{1}{2n\sqrt{\ln(n)}}$.

(iv) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$x_n = e^{\frac{\ln(n)}{1+n^2}} - 1 \quad \text{et} \quad \frac{\ln(n)}{1+n^2} = \frac{\ln(n)}{n^2} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}_{\to 1 \neq 0} \to 0$$

par les opér. sur les limites. Donc, il existe $(\varepsilon_n)_n$ t.q. $\varepsilon_n \to 0$ et

$$\frac{\ln(n)}{1+n^2} = \frac{\ln(n)}{n^2}(1+\varepsilon_n). \text{ Comme } \frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(croissances comparées) et $e^x = 1 + x + x\eta(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\eta = 0$,

on a, par composition, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x_n = \frac{\ln(n)}{n^2}(1+\varepsilon_n) + \frac{\ln(n)}{n^2}(1+\varepsilon_n)\varepsilon\left(\frac{\ln(n)}{n^2}(1+\varepsilon_n)\right)$$

$$= \frac{\ln(n)}{n^2}\underbrace{(1+\varepsilon_n)}_{\to 1}\Big(\underbrace{1}_{\to 1} + \underbrace{\varepsilon\Big(\underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2}}_{\to 0}\underbrace{(1+\varepsilon_n)}_{\to 1}\Big)}_{\to 0}\Big).$$

D'où, par la caractérisation, $x_n \sim \frac{\ln(n)}{n^2}$.

(v). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$y_n = e^{n\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right)}.$$

Comme on a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$,

et comme $\lim \frac{1}{n} = 0$, on a par composition, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{(1/n)^2}{3!} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n^2}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}\right).$$

Comme $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + y^2\varepsilon(y)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$

on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n\ln\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1/n}\right) = n\left[\frac{1}{n^2}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{n^4}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}\right)^2\left(-\frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{n^2}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}\right)\right)\right)\right]$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big(\underbrace{\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}}_{\to -\frac{1}{6}}\Big) + \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}\underbrace{\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}\right)^2}_{\to \frac{1}{6^2}}\Big(-\frac{1}{2} + \underbrace{\varepsilon\Big(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\underbrace{\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6}\right)}_{\to -1/6}\Big)}_{\to 0}\Big) \to -\frac{1}{2}.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$.

Par cont. de l'exponentielle $\lim y_n = e^0 = 1 \neq 0$.

Par le cours, $y_n \sim 1$.

(vi). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Comme $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + y^2 \varepsilon(y)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ et $\lim \frac{1}{n} = 0$,

on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \times \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(1 + \frac{1}{n}\left(\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\right)\right)$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\left(e^{\frac{1}{n}\left(\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}\right)} - 1\right).$$

Or $e^x = 1 + x + x\eta(x)$ avec $\lim_0 \eta = 0$ donc,

par composition,

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \times \frac{1}{n}\left(\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\right)\left(1 + \eta\left(\underbrace{\tfrac{1}{n}\left(\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\right)}_{\to 0 \text{ et } \neq -\frac{1}{2}}\right)\right)$$

$$= e \times \frac{-1}{2n}\left(1 - 2\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \lambda_n\right)$$

où $\lim \lambda_n = 0$, donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$z_n = (-1)^{n+1} \frac{e}{2n} \underbrace{\left(1 - \underbrace{2\varepsilon\left(\tfrac{1}{n}\right)}_{\to 0}\right)\left(1 + \underbrace{\lambda_n}_{\to 0}\right)}_{\to 1}.$$

Par caractérisation, $z_n \sim \frac{(-1)^{n+1} e}{2n}$.

Ex. 30. Modification de l'énoncé : on suppose $a > 0$ et $b > 0$.

1- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n = (a_n^n)^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(a_n^n)} = e^{\frac{1}{n}\ln(a+\delta_n)}$$

On $S_n = a_n^n - a \longrightarrow 0$ par hyp, donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = e^{\frac{1}{n}\left[\ln(a) + \ln\left(1+\frac{\delta_n}{a}\right)\right]} = e^{\frac{1}{n}\ln(a) + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{\delta_n}{a}\right)}.$$

Or $\ln(1+y) = y + y\varepsilon(y)$ avec $\lim_0 \varepsilon = 0$ donc, par composition,

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{\delta_n}{a}\right) = \frac{\delta_n}{na}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\delta_n}{a}\right)\right)$$

et $\frac{1}{n}\ln(a) + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{\delta_n}{a}\right) = \frac{1}{n}\left[\ln(a) + \frac{\delta_n}{a}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\delta_n}{a}\right)\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

($\frac{1}{n} \to 0$; $\ln(a)$; $\frac{\delta_n}{a}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\delta_n}{a}\right)\right) \to 0$)

Comme $e^x = 1 + x + x\zeta(x)$ avec $\lim_0 \zeta = 0$, on a,

par composition,

$$a_n - 1 = e^{\frac{1}{n}\left[\ln(a) + \frac{\delta_n}{a}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\delta_n}{a}\right)\right)\right]} - 1$$

$$= \frac{1}{n}\left[\ln(a) + \frac{\delta_n}{a}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\delta_n}{a}\right)\right)\right]\left[1 + \zeta\left(\underbrace{\frac{\ln(a) + \frac{\delta_n}{a}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\delta_n}{a}\right)\right)}{n}}_{\to 0 \text{ car } n \to +\infty}\right)\right]$$

($\zeta \to 0$)

$$= \frac{1}{n}\left[\ln(a) + \frac{\delta_n}{a}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\delta_n}{a}\right)\right)\right](1+\lambda_n)$$

où $\lim \lambda_n = 0$.

Donc

$$a_n - 1 = \frac{\ln(a)}{n} + \frac{1}{n} \times \underbrace{\frac{\delta_n}{a}\left(1+\varepsilon\left(\frac{\delta_n}{a}\right)\right)(1+\lambda_n)}_{\to 0 \text{ car } n\to\infty}$$

($\frac{\delta_n}{a} \to 0$; $\to 1$; $\to 1$)

$$= \frac{\ln(a)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

2- Comme au 1., on a aussi

$$b_n - 1 = \frac{\ln(b)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n = \theta(a_n - 1) + \theta + (1-\theta)(b_n - 1) + 1 - \theta$$

$$= 1 + \theta\frac{\ln(a)}{n} + (1-\theta)\frac{\ln(b)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{\ln(a^\theta b^{1-\theta})}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dm, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $\lambda = \ln(a^\theta b^{1-\theta})$

$$c_n^n = e^{n \ln c_n} = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n} + \frac{\delta_n}{n}\right)\right)$$

avec $\lim \delta_n = 0$. Or $\ln(1+y) = y + y\zeta(y)$ avec $\lim_0 \zeta = 0$

donc par composition (car $\lim \frac{\lambda+\delta_n}{n} = 0$),

$$c_n^n = \exp\left[n\left(\frac{\lambda}{n} + \frac{\delta_n}{n}\right)\left(1 + \zeta\left(\frac{\lambda+\delta_n}{n}\right)\right)\right]$$

$$= \exp\left[\underbrace{(\lambda + \delta_n)}_{\to \lambda}\left(1 + \zeta\left(\underbrace{\frac{\lambda+\delta_n}{n}}_{\to 0}\right)\right)\right] \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Comme $\exp$ est continue en λ, $\lim c_n^n$ existe et vaut $\exp(\lambda) = \exp(\ln(a^\theta b^{1-\theta})) = a^\theta b^{1-\theta}$.

Ex. 31. (comme u est déf. par $u_0 \in]0;1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la suite est bien définie).

1 - Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(0 < u_{n+1} < u_n < 1\right)$.

Comme $u_1 = u_0 - u_0^2 = \underset{>0}{u_0}\underbrace{(1-u_0)}_{>0} > 0$ et $u_1 = \underset{>0}{u_0}\underbrace{(1-u_0)}_{<1} < u_0 < 1$,

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a, par hyp. de récu., $0 < u_{n+1} < u_n < 1$. Comme

$$u_{n+2} = \underset{>0}{u_{n+1}}\underbrace{(1-u_{n+1})}_{>0} > 0 \text{ et } u_{n+2} = \underset{>0}{u_{n+1}}\underbrace{(1-u_{n+1})}_{<1} < u_{n+1} < 1.$$

Donc $0 < u_{n+2} < u_{n+1} < 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

Comme u est (str.)$\downarrow$ et minorée par 0, elle converge vers $\ell = \inf u \geq 0$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n < u_0 < 1$$

on a, par passage à la limite $n \to \infty$ dans les inéq. / limites

$$l \leqslant u_0 < 1. \quad \text{Donc } l \in [0;1[.$$

De plus, comme (u_{n+1}) est une S. limite de (u_n), on a, par passage à la limite $n \to \infty$ dans les égalités

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2$$

la relation $l = l - l^2$ donc $l = l(1-l)$, soit $-l^2 = 0$. D'où $l = 0$.

2- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 < v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_{n+1} u_n} = \frac{+u_n^2}{(u_n - u_n^2) u_n}$$

$$= \frac{1}{1-u_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

car $\lim u_n = 0$.

Soit $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) > 0$$

Par l'ex. 3, comme $\lim v_{n+1} - v_n = 1$, $\lim w_n = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} v_k \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} v_k \right] = \frac{1}{n} \left[v_n + \sum_{k=1}^{n-1} v_k - \sum_{k=1}^{n-1} v_k - v_0 \right]$$

$$= \frac{1}{n} (v_n - v_0) = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \right)$$

Donc $u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{w_n} \left(1 - \frac{u_n}{u_0} \right)$ avec $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{w_n} \left(1 - \frac{u_n}{u_0} \right) = 1$. Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$.