TD2.

**Ex. 7.** On suppose que $P$ divise $Q$ et $Q$ divise $P$.

Il existe donc $(P_1, Q_1) \in (\mathbb{R}[X])^2$ t.q. $P = QP_1$ et $Q = PQ_1$.

Donc $\deg P = \deg Q + \underbrace{\deg P_1}_{\geq 0}$ et $\deg Q = \deg P + \underbrace{\deg Q_1}_{\geq 0}$.

D'où $\deg P \geq \deg Q$ et $\deg Q \geq \deg P$.

Donc $\deg P = \deg Q$ et $\deg P_1 = 0$. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ t.q. $P_1 = k$. D'où $P = kQ$.

**Ex. 8:**

$X^3+3X^2+2X-1$ | $X^2-X-1$

$-(X^3-X^2-X)$ | $X+4$

$4X^2+3X-1$

$-(4X^2-4X-4)$

$7X+3 \rightarrow$ le deg $<$ deg $(X^2-X-1)$

Donc la div. eucli. est $X^3+3X^2+2X-1 = (X^2-X-1)\underbrace{(X+4)}_{\text{quotient}} + \underbrace{7X+3}_{\text{reste}}$.

$X^4-X^3+X-2$ | $X^2-2X+4$

$-(X^4-2X^3+4X^2)$ | $X^2+X-2$

$X^3-4X^2+X-2$

$-(X^3-2X^2+4X)$

$-2X^2-3X-2$

$-(-2X^2+4X-8)$

$-7X+6 \rightarrow$ le deg $<$ deg $(X^2-2X+4)$

Donc la div. eucli. est : $X^4-X^3+X-2 = (X^2-2X+4)\underbrace{(X^2+X-2)}_{\text{quotient}} \underbrace{-7X+6}_{\text{reste}}$.

$3X^5+4X^2+1$ | $X^2+2X+3$

$-(3X^5+6X^4+9X^3)$ | $3X^3-6X^2+3X+16$

$-6X^4-9X^3+4X^2+1$

$-(-6X^4-12X^3-18X^2)$

$3X^3+22X^2+1$

$-(3X^3+6X^2+9X)$

$16X^2-5X+1$

$-(16X^2+32X+48)$

$-41X-47$ le deg $<$ deg $(X^2+2X+3)$

Donc la division euclidienne est

$3X^5+4X^2+1 = (X^2+2X+3)(3X^3-6X^2+3X+16) - 41X - 47$.

**Ex.9** On effectue la divisin euclidienne :

$$X^4 - X + a \quad \big| \; X^2 - aX + 1$$
$$-(X^4 - aX^3 + X^2) \quad X^2 + aX + (a^2-1)$$
$$aX^3 - X^2 - X + a$$
$$-(aX^3 - a^2X^2 + aX)$$
$$(a^2-1)X^2 - (a+1)X + a$$
$$-((a^2-1)X^2 - a(a^2-1)X + (a^2-1))$$
$$[a(a^2-1) - (a+1)]X + a - (a^2-1)$$

] de deg < deg$(X^2 - aX + 1)$.

$X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + a$ SSi le reste de la div. eucl. de $X^4 - X + a$ par $X^2 - aX + 1$ est nul

Ssi $[a(a^2-1) - (a+1)]X + a - (a^2-1) = 0$

Ssi $\begin{cases} a(a^2-1) - (a+1) = 0 \\ \text{et} \\ a - (a^2-1) = 0 \end{cases}$

Ssi $\begin{cases} [a(a-1) - 1](a+1) = 0 \\ \text{et} \\ a^2 - a - 1 = 0 \end{cases}$

Ssi $\begin{cases} (a^2 - a - 1)(a+1) = 0 \\ \text{et} \\ a^2 - a - 1 = 0. \end{cases}$

Ssi $a^2 - a - 1 = 0$ $\quad (\Delta = 1 + 4)$.

Ssi $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

**Ex.10 :**

1 - Soit $P = (X-a)Q + R$ la div. eucl. de $P$ par $(X-a)$.
On a $\deg R < \deg(X-a) = 1$. Donc $R$ est un poly. Constant. Or $P(a) = (a-a)Q(a) + R$ donc $R = P(a)$.

On remarque que $X-a$ divise $P - P(a)$.

2- Par 1., on a :
Le reste de la division euclidienne de P par $Q=(X-1)$ est 5
Ssi $P(1)=5$ ssi $1-b+(b^2+4)-2=5$ ssi $b^2-b-2=0$.
ssi $b=\frac{1+\sqrt{1+8}}{2}$ ou $b=\frac{1-\sqrt{1+8}}{2}$
Ssi $b=2$ ou $b=-1$.

Ex. 11. 1- Soit $P=(X-a)(X-b)+R$ la div. eucli. de P par $(X-a)(X-b)$. Donc $\deg R < \deg (X-a)(X-b)=2$.
Par division eucli., $R=(X-a)R_1+R(a)$ avec $R_1$ et donc
$P=(X-a)[(X-b)+R_1]+R(a)$ avec $\deg R(a)<\deg(X-a)$
Donc c'est la div. eucl. de P par $(X-a)$. Par unicité du reste et par l'ex. 10, $P(a)=R(a)$. Par division euclidienne et l'ex. 10, $R=(X-b)R_2+P(b)$ avec $R_2$ ct.
D'où $(X-a)R_1+P(a)=(X-b)R_2+P(b)$
soit
$$\begin{cases} R_1 = R_2 \\ P(a)-aR_1 = P(b)-bR_1 \end{cases}$$
d'où $R_1=R_2$ et $R_1=\frac{P(b)-P(a)}{b-a}$.
D'où $2R=R+R=(X-a)\frac{P(b)-P(a)}{b-a}+P(a)+(X-b)\frac{P(b)-P(a)}{b-a}+P(b)$
donc $2(b-a)R=2X(P(b)-P(a))-(a+b)(P(b)-P(a))+(b-a)(P(a)+P(b))$.
$=2X(P(b)-P(a))-2aP(b)+2bP(a)$
$=2P(b)(X-a)-2P(a)(X-b)$
d'où $R=\frac{P(b)(X-a)-P(a)(X-b)}{b-a}$.

2- On a $X^2+2X=X(X+2)$.
On applique le 1 au poly. $P_n=(X+1)^{2n}-1$ avec $a=0$, et $b=-2$,

Le reste $R_n$ de la div. eucli. de $P_n$ par $X^2+2X$ vaut 10
donc
$$R_n = \frac{P_n(-2)(X-0) - P_n(0)(X+2)}{-2-0} = \frac{[((-1)^2)^n - 1]X - (1^{2n}-1)(X+2)}{-2}$$

$$= 0.$$

Donc $X^2+2X$ divise $P_n$.

Compléments :

La divisin euclidienne de $X^7+3X^4-8$ par $X^{35}-3X^{17}$ est : $X^7+3X^4-8 = 0\times(X^{35}-3X^{17}) + X^7+3X^4-8$.

En effet, l'égalité ↗ est correcte. De plus
$\deg(X^7+3X^4-8) < \deg(X^{35}-3X^{17})$
donc, par unicité de la div. eucli., c'est elle !