Dérivée des polynômes :

Par définition, le poly. dérivé du poly. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est le poly. $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ $\left(= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k\right)$.

On ne fait donc pas appel à la notion de dérivée des fonctions poly pour définir la dérivée des poly.

Rq : $\deg P' = (\deg P) - 1$ (avec la convention $-\infty - 1 = -\infty$).

$(PQ)' = P'Q + QP'$, $(P+Q)' = P' + Q'$

On définit par récurrence $P^{(n)} = P$ par $P^{(0)} = P$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = \left(P^{(n)}\right)'$.

On a : $(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$

Si $\deg P = n$ alors $P^{(n)}$ est un poly. constant et $P^{(n+1)} = 0$.

Formule de Taylor : si $P \in \underset{(\mathbb{Q})}{\mathbb{R}}[X]$ et $a \in \underset{(\mathbb{C})}{\mathbb{R}}$, on a

$P = \sum_{n=0}^{\deg P} \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n$. Dans cette somme, tous les termes pour $n > \deg P$ sont nuls.

Ex 13 : (i) $P' = 4x^3$, $P'' = 12x^2$, $P^{(3)} = 24x$, $P^{(4)} = 24$ et $P^{(n)} = 0$ si $n \geq 5$. D'où

$$P = 0 + (X-1)\frac{4}{1!} + (X-1)^2 \frac{12}{2!} + (X-1)^3 \frac{24}{3!} + (X-1)^4 \frac{24}{4!}$$

$$= 4(X-1) + 6(X-1)^2 + 4(X-1)^3 + (X-1)^4.$$

$$P = 0 + (X+1)\frac{(-4)}{1!} + (X+1)^2 \frac{12}{2!} + (X-1)^3 \frac{(-24)}{3!} + (X-1)^4 \frac{24}{4!}$$

$$= 0 - 4(X+1) + 6(X+1)^2 - 4(X+1)^3 + (X+1)^4.$$

(iii) $R' = 2(X^2+X+1)(2X+1)$ $= 2(2X^3+3X^2+3X+1)$, $R'' = 2(6X^2+6X+3)$ $= 6(2X^2+2X+1)$, $R^{(3)} = 6(4X+2)$ $= 12(2X+1)$, $R^{(4)} = 24$, $R^{(n)} = 0$ si $n \geq 5$.

1) On a

$$R = 10 + (X-1)\frac{18}{1!} + (X-1)^2\frac{30}{2!} + (X-1)^3\frac{24}{3!} + (X-1)^4\frac{24}{4!}$$

$$= 10 + 18(X-1) + 15(X-1)^2 + 6(X-1)^3 + (X-1)^4$$

$$R = 2 + (X+1)\frac{(-2)}{1!} + (X+1)^2\frac{6}{2!} + (X+1)^3\frac{(-12)}{3!} + (X-1)^4\frac{24}{4!}$$

$$= 2 - 2(X+1) + 3(X+1)^2 - 2(X+1)^3 + (X-1)^4$$

Ex. 14

1- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = (X-a)^n$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ (voir un résultat précédent.). En particulier, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre. La sous-famille $(P_n)_{n\leq N}$ de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi libre. De plus, $(P_n)_{n\leq N}$ est incluse dans $\mathbb{R}_N[X] = \mathrm{vect}(X^0, \dots, X^N)$, qui est de dimension $N+1$. Donc $(P_n)_{n\leq N}$, qui a $N+1$ éléments, est une base de $\mathbb{R}_N[X]$.

2- Soit $P \in \mathbb{R}_N[X]$. Par la formule de Taylor en a on a

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

car $\deg P \leq N$. Par unicité, les $\left(\frac{P^{(n)}(a)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les coord. de P dans la base $(P_n)_{n\leq N}$.

Ex. 15

Préliminaire : on montre par réc. qu'un poly. de deg n a au plus n racines distinctes.

Soit $R(n)$ cette proposition.

Un poly. de deg. 0 est un poly constant non nul donc il a zéro racine. $R(0)$ est vraie.

Supp. $R(n)$ vraie pour un $n \geq 0$. Soit P un poly. de deg. $n+1$.

Par le cours, P admet une racine a, par div. eucl. il existe Q, R t.q. $P = (X-a)Q + R$ avec $\deg R < \deg(X-a) = 1$.

Comme $0 = P(a) = 0 + R(a)$ et R est un poly. constant, $R = 0$ donc $P = (X-a)Q$ avec $\deg Q = n$.

Par hyp. de réc. Q a au plus n racines distinctes donc P a au plus $n+1$ racines distinctes.

Par le Th. de réc., $R(n)$ est vrai pour tout n.

1 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(\begin{array}{l} \text{si } P \text{ possède } n \text{ racines distinctes} \\ a_1, \dots, a_n ; (X-a_1)\cdots(X-a_n) \text{ divise } P \end{array} \right)$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P. D'après l'argument précédent $(X-a)$ divise P. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geq 1$. Soit P un poly. possédant $n+1$ racines distinctes : $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}$.

Par division euclidienne,

$$P = (X-a_1)\cdots(X-a_{n+1})Q + R$$

avec $\deg R < \deg (X-a_1)\cdots(X-a_{n+1}) = n+1$.

Pour $1 \leq j \leq n+1$, on a donc $0 = P(a_j) = 0 \times Q(a_j) + R(a_j)$.

Donc R a $n+1$ racines distinctes. Comme $\deg R \leq n$, on a, à cause du préliminaire, $R = 0$.

Donc $(X-a_1)\cdots(X-a_{p+1})$ divise P et $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Par le Th. de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2- On sait que $X^2+X+1 = (X-j)(X-\bar{j})$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tq. X^2+X+1 divise $(X+1)^n - X^n - 1 =: P_n$.

Il existe Q_n tq. $(X+1)^n - X^n - 1 = (X^2+X+1)Q_n$.

Donc $(j+1)^n - j^n - 1 = 0 \times Q_n(j) = 0$

et $(\bar{j}+1)^n - \bar{j}^n - 1 = 0 \times Q_n(\bar{j}) = 0$.

Donc j et $\bar{j}$ sont racines de P_n. D'après la 1, comme $j \neq \bar{j}$, si j et $\bar{j}$ sont racines de P_n alors X^2+X+1 divise P_n. Donc

$(X^2+X+1$ divise $P_n) \iff (j$ et $\bar{j}$ sont racines de $P_n)$. $(*)$

On rappelle que $j^2+j+1 = 0 = \bar{j}^2+\bar{j}+1$.

On a :

$(j$ racine de $P_n) \iff (j+1)^n - j^n - 1 = 0 \iff (-j^2)^n - j^n - 1 = 0$

$\iff (-1)^n (j^n)^2 - j^n - 1 = 0$

$\iff j^n$ racine de $(-1)^n X^2 - X - 1 = 0$.

$(\bar{j}$ racine de $P_n) \iff (\bar{j}+1)^n - \bar{j}^n - 1 = 0 \iff (-\bar{j}^2)^n - \bar{j}^n - 1 = 0$

$\iff (-1)^n (\bar{j}^n)^2 - \bar{j}^n - 1 = 0$.

Donc $(*) \iff (j^n$ et $\bar{j}^n$ sont racines de $(-1)^n X^2 - X - 1)$

Si n est pair, le produit des racines de $(-1)^n X^2 - X - 1$ est -1 alors que $j^n \times \bar{j}^n = (j\bar{j})^2 = 1^2 = 1$

donc j et $\bar{j}$ ne peuvent être racine de

Donc

$(*) \iff$ (n impair et j^n et $\bar{j}^n$ racines de X^2+X+1).

$\iff$ (n impair et ($j^n = j$ ou $j^n = \bar{j}$) et ($\bar{j}^n = j$ ou $\bar{j}^n = \bar{j}$))

$\iff$ (($\exists p \in \mathbb{N}, n = 3p$ ou $\exists p \in \mathbb{N}, n = 3p+2$) et ($j^n = j$ ou $j^n = \bar{j}$) et ($\bar{j}^n = j$ ou $\bar{j}^n = \bar{j}$))

Pour $p \in \mathbb{N}$, on a $j^{3p} = (j^3)^p = 1^p = 1 \notin \{j; \bar{j}\}$

donc

$(*) \iff$ ($\exists p \in \mathbb{N}, n = 3p+2$ et ($j^n = j$ ou $j^n = \bar{j}$) et ($\bar{j}^n = j$ ou $\bar{j}^n = \bar{j}$))

$\iff$ ($\exists p \in \mathbb{N}, n = 3p+2$ et ($j^n = j$ ou $j^n = \bar{j}$) et ($\bar{j}^n = j$ ou $\bar{j}^n = \bar{j}$)).

Comme $j^2 = \bar{j}$ et $\bar{j}^2 = j$, on a

$(*) \iff$ ($\exists p \in \mathbb{N}$ / $n = 3p+2$).

Ex. 16 : Exercice difficile qui n'était à faire que si on avait le temps.

1 - a : Soit $a \neq 0$ une racine de P. Alors

$0 = P(a) = (a+3)P(a) = aP(a+1)$ et comme $a \neq 0$,

$P(a+1) = 0$.

b - Soit $a \neq -2$ une racine de P. Alors on a

$0 = P(a) = aP(a-1+1) = (a-1+3)P(a-1) = (a+2)P(a-1)$.

Or $a+2 \neq 0$ donc $P(a-1) = 0$.

2 - Si P est un polynôme constant alors $(X+3)P = XP$

donc $3P = 0$ et $P = 0$.

On suppose P non constant. Alors P a au moins une racine a.

1er cas : $a=0$.

Par A.6, $-\frac{a}{2}$ est racine de P. Donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$

tq. $X(X+\frac{1}{2})Q(X) = P$. (1)

$(X+3)\,X(X+1)Q(X) = X(X+1)(X+2)Q(X+1)$

Comme $X+2$ est premier avec $X(X+1)(X+2)$,

$X+2$ divise Q et $X(X+1)(X+2)$ divise P.

Donc il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tq $P = X(X+1)(X+2)R$

et

$(X+3)\,X(X+1)(X+2)R(X) = X(X+1)(X+2)(X+3)R(X+1)$.

D'où $X(X+1)(X+2)(X+3)\left[R(X)-R(X+1)\right] = 0$

Or $\forall (A,B) \in \mathbb{R}[X]^2$, $AB=0 \Rightarrow A=0$ ou $B=0$.

donc comme $X(X+1)(X+2)(X+3) \neq 0$, $R(X) = R(X+1)$.

Si R n'est pas constant, R admet au moins 1 racine.

Par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n+1)=0$.

Donc R a une infinité de racines distinctes. Contr.

Donc R est constant.

2ème cas : $a=-2$.

Par 1.a, -1 est racine de P. Donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$

tq. $P = (X+1)(X+2)Q$ (2)

$(X+3)(X+1)(X+2)Q(X) = X(X+2)(X+3)Q(X+1)$.

Comme X est premier avec $(X+1)(X+2)(X+3)$, X divise Q. Donc X divise P. Par le 1er cas, il existe R constant tq. $P = RX(X+1)(X+2)$.

3ème cas : $a \in \mathbb{C} \setminus \{-2;0\}$. Par 1, a, $a-1$ et $a+1$ sont 3 racines distinctes de P donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tq. $P = (X-a)(X-a+1)(X-a-1)Q$.

D'où
$(X+3)(X-a)(X-a+1)(X-a-1)Q(X) = X(X-a+1)(X-a+2)(X-a)Q(X+1)$

donc
$(X+3)(X-a-1)Q(X) = X(X-a+2)Q(X+1)$. (*)

Cas où $a=-1$: on a alors
$(X+3)XQ(X) = X(X+3)Q(X+1)$.
donc $Q(X) = Q(X+1)$. On se ramène au 1er cas.
Q est constant et $P = (X+1)(X+2)XQ$.

Cas où $a \in \mathbb{C}\setminus\{-2;-1;0\}$. On a
X est premier avec $(X+3)(X-a-1)$ donc
X divise Q et donc aussi P. Donc, on est
ramené au 1er cas qui donne
$P = X(X+1)(X+2)R$
avec R constant.

On a montré que si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $(X+3)P(X) = XP(X+1)$
alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tq. $P = \lambda X(X+1)(X+2)$.
Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $P = \lambda X(X+1)(X+2)$.
On a $XP(X+1) = X \times \lambda (X+1)(X+2)(X+3) = P(X)(X+3)$.
Donc P vérifie $(X+3)P = XP(X+1)$.

Racines multiples :
On dit que a est une racine d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$
de P si $P(a) = P'(a) = 0, P''(a) = 0, \dots, P^{(n-1)}(a) = 0$ et $P^{(n)}(a) = 0$.

On vérifie que
(a est une racine d'ordre n de P) $\Leftrightarrow$ ($\forall k \in [0;n] \cap \mathbb{N}$, a est une racine d'ordre $n-k$ de $P^{(k)}$).

On va montrer : $n \in \mathbb{N}^*$, (a est une racine d'ordre n d'un pol. P) $\Leftrightarrow$ ($(X-a)^n$ divise P et $(X-a)^{n+1}$ ne divise pas P) (1)

$\Leftrightarrow$ ($\exists Q \in \mathbb{C}[X]$, $P = (X-a)^n Q$ et $Q(a) \neq 0$) (3).

On montre d'abord (2) $\Leftrightarrow$ (3).

On suppose qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tq. $P = (X-a)^n Q$.

On a $P = (X-a)^n (Q - Q(a)) + Q(a)(X-a)^n$.

Comme a est racine de $Q - Q(a)$, il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tq. $P = (X-a)^{n+1} R(X) + Q(a)(X-a)^n$.

Si $(X-a)^{n+1}$ divise P alors $(X-a)$ divise $Q - Q(a)$ donc $Q(a) = 0$.

Donc $Q(a) = 0$.

Si $Q(a) = 0$ alors $(X-a)^{n+1}$ divise P.

On a montré (2) $\Leftrightarrow$ (3) et montrant aussi (3) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) : Pour $m \in \mathbb{N} \cap [0; n]$, on a par la formule de Leibnitz :

$$P^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left((X-a)^n\right)^{(k)} \times Q^{(m-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (X-a)^{n-k} \times Q^{(m-k)}.$$

Donc, pour $m < n$,

$$P^{(m)}(a) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \underbrace{(a-a)^{n-k}}_{=0 \text{ car } k \neq m} \times Q^{(m-k)}(a) = 0,$$

et $P^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} (a-a)^{n-k} Q^{(n-k)}(a) = 1 \times \frac{n!}{n!} \times Q^{(0)}(a) = Q(a) \neq 0$,

(1) $\Rightarrow$ (2) : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition

$Q(n) = \left[\left(a \text{ est une racine d'ordre } n \text{ d'un poly. } P \right) \Rightarrow \left((X-a) \text{ divise } P \text{ et } (X-a) \text{ ne divise pas } P' \right) \right]$.

Soit a une racine simple d'un poly. P. On a $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$.

On a déjà vu que $(X-a)$ divise P. Si $P = (X-a)^2 Q$ alors $P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q'$ donc

$0 \neq P'(a) = 0 + 0$. Contr. Donc $(X-a)^2$ ne divise pas P.

$Q(1)$ est donc vraie.

Supposons $Q(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que a est une racine d'ordre $n+1$ d'un poly. P. On a la div. eucl. :

$P = (X-a)^{n+1} Q_{n+1} + R_{n+1}$ avec $\deg R_{n+1} < n+1$.

Donc $P' = (n+1)(X-a)^n Q_{n+1} + (X-a)^{n+1} Q'_{n+1} + R'_{n+1}$.

Par hyp. de réc. appliquée à P', $(X-a)^n$ divise P' donc $(X-a)^n$ divise R'_{n+1} dont le deg. est $< n$.

Nécessairement $R'_{n+1} = 0$. R_{n+1} est constant et, comme $0 = P(a) = (a-a)^{n+1} Q_{n+1}(a) + R_{n+1}$:

$R_{n+1} = 0$. Donc $(X-a)^{n+1}$ divise P.

Si $(X-a)^{n+2}$ divisait P, il existerait $Q_{n+2} \in \mathbb{C}[X]$ tq. $P = (X-a)^{n+2} Q_{n+2}$. Donc

$P' = (n+2)(X-a)^{n+1} Q_{n+2} + (X-a)^{n+2} Q'_{n+2}$.

Donc $(X-a)^{n+1}$ divise P'. Contr. appliquée à P'. Donc $(X-a)^{n+2}$ ne divise pas P et $Q(n+1)$ est vraie. Par le Pr. de réc. $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 17.

D'après ce qui précède

$(X-1)^2$ divise P_n $\iff$ (1 est une racine d'ordre au moins 2 de P_n) !

On a $P_n' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$; donc

$P_n(1) = n - (n+1) + 1 = 0$ et $P_n'(1) = n(n+1) - n(n+1) = 0$.

donc 1 est racine d'ordre au moins 2 de P_n.

donc $(X-1)^2$ divise P_n.

Ex 18.

1 - P a une racine multiple $\iff \exists z \in \mathbb{C}$; $P(z) = 0 = P'(z)$.

On a $P(z) = ax^2 + bx + c$ donc $P'(z) = 2ax + b$. On résout

$$\begin{cases} P(z) = 0 \\ \text{et} \\ P'(z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} az^2 + bz + c = 0 \\ \text{et} \\ 2az + b = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Lorsque $a = b = c = 0$, tout $z \in \mathbb{C}$ est sol. et P est le poly. nulle.

Lorsque $a = b = 0$ et $c \neq 0$, la 1ère éq. de $(*)$ n'a pas de sol.

donc P n'a pas de racine multiple.

Lorsque, $a = 0$ et $b \neq 0$, la 2ème éq. de $(*)$ n'a pas de sol.

donc P n'a pas de racine multiple.

Lorsque, $a \neq 0$, le discriminant de la 1ère équation est $\Delta = b^2 - 4ac$. Soit ω une racine carrée de Δ.

on a $(*) \iff \begin{cases} z = \dfrac{-b+\omega}{2a} \text{ ou } \dfrac{-b-\omega}{2a} \\ \text{et} \\ 2az + b = 0 \end{cases} \iff \omega = 0 \iff \Delta = 0$.

donc P a une racine multiple ssi $a \neq 0$ et $\Delta = 0$.

2 - On trouve : $\exists \omega \in \mathbb{C}$ et $\sigma \in \{-1; 1\}$; $p = 3\omega^2$ et $q = \sigma 4\omega^3$.