

Suites 4

[21]

TD 2.

Ex. 90.

1-a. Par hypothèse, $P(a) = P'(a) = 0 = P(b) = P'(b)$.

Par div. eucl., $P = (x-a)(x-b)Q_0 + R_0$ avec $\deg R_0 < 2$.

Comme $0 = P(a) = 0 + R_0(a)$, $0 = P(b) = 0 + R_0(b)$, R_0 a deux racines distinctes

donc $R_0 = 0$ car $\deg R_0 \leq 1$. Dne $(x-a)(x-b)$ divise P .

De m. $P' = (x-a)(x-b)Q_1 + R_1$ avec $\deg R_1 < 2$

et $P(a) = P'(a) = 0$. Dne $R_1 = 0$ et $(x-a)(x-b)$ divise P' .

b. Soit $P = P'Q + R$ la div. eucl. Comme $(x-a)(x-b)$ divise P et P' , il divise $P - P'Q = R$.

2- $Q' = 144x^3 + 36x^2 - 22x - 2$.

$$\frac{144x^3 + 36x^2 - 22x - 2}{\frac{1}{4}x + \frac{1}{48}}$$

$$Q = \frac{36x^4 + 12x^3 - 11x^2 - 2x + 1}{36x^4 + 9x^3 - \frac{11}{2}x^2 - \frac{1}{2}x}$$

$$= \frac{3x^3 - \frac{11}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1}{3x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{24}x - \frac{1}{24}}$$

$$= \frac{-\frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{24}x + \frac{25}{24}}{-\frac{25}{4}x^2 - \frac{25}{24}x + \frac{25}{24}} = R.$$

$$b = R = -\frac{25}{24}(6x^2 + x - 1).$$

$$A = 1 + 4 \times 6 = 25$$

$$\text{Racines de } R: \quad -\frac{1+5}{2 \times 6} \text{ et } -\frac{1-5}{2 \times 6}$$

$$\frac{1}{3} = \alpha \quad \frac{-1}{2} = \beta$$

c- D'après le 1-., si Q a deux racines doubles distinctes $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{1}{2}$.

On vérifie que $Q(\frac{1}{3}) = 0 = Q'(\frac{1}{3})$ et $Q(-\frac{1}{2}) = Q'(-\frac{1}{2}) = 0$.

Rq.: cela permet de factoriser complètement Q .

En effet: On veut que $(x-\alpha)^2$ divise Q .

donc il existe $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ tq: $Q = (x-\alpha)^2 Q_1$.

Comme $b \neq 0$ et b est une racine double de Q .

C'est aussi une racine double de Q_1 . Il existe donc

$Q_2 \in \mathbb{R}[x]$ tq: $Q_1 = (x-\beta)^2 Q_2$.

D'où $Q = (x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 Q_2$.

Or $\deg Q = 4 = \deg((x-\alpha)^2 (x-\beta)^2)$ donc Q_2 est constant.

Le terme dominant de Q , à savoir $36x^2$, doit être

égal au terme dominant de $(x-\alpha)^2 (x-\beta)^2 Q_2$ à savoir $Q_2 \alpha^4$.

donc $Q_2 = 36$. D'où

$$Q = 36 \times \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{36}{9 \times 4} (3x-1)^2 (2x+1)^2$$

$$= (3x-1)^2 (2x+1)^2.$$

Ex. 21: soit $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ les racines de P . (rappel: P est un polynôme de degré N .)

1 - Pour $j \in [1, N]$, la fct. poly. associée à P s'annule en λ_j et λ_{j+1} donc, comme elle est dérivable, il existe $c_j \in]\lambda_j; \lambda_{j+1}[$ tq: $P'(c_j) = 0$ par le th. de Rolle. Donc $c_0 < c_1 < \dots < c_{N-1}$ sont

$N-1$ racines distinctes de P' . Il existe donc $Q \in \mathbb{R}[x]$

$$\text{tq. } P' = \left[\prod_{j=0}^{N-1} (x - c_j) \right] \times Q$$

Comme $\deg P' = N-1$ et $\deg \left(\prod_{j=0}^{N-1} (x - c_j) \right) = N-1$

Q est constant. Une chaque c_j est une racine simple

de P' . De plus, P' n'a pas d'autre racine.

2- Pour $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \in \mathbb{R}$ puisque $P \in \mathbb{R}[X]$.

23

Donc $P(x)^2 + 1 \geq 1$ et $P^2 + 1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

3- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $P(z)^2 + 1 = 0$. Par 2, $z \notin \mathbb{R}$.

Si z était une racine multiple $P^2 + 1$ alors z serait une racine de $(P^2 + 1)' = 2PP'$. Donc $P(z) = 0$ ou $P'(z) = 0$.

Or, par 1 et 2, les racines de P et de P' sont toutes réelles. Contr. Donc z est une racine simple de P .

Rg.: comme $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$(z \text{ racine de } P) \Leftrightarrow (\bar{z} \text{ racine de } P).$$

Ex. 22 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n' = \sum_{k=1}^n k \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{x^l}{l!} = P_{n-1}$.

Soit z une racine de P_n . Si elle était multiple, on aurait

$$0 = P_n(z) = P_{n-1}(z) + \frac{z^n}{n!} = 0 + \frac{z^n}{n!}$$

Donc $z^n = 0$ et $z = 0$. Contr. car $P_n(0) = 1$.

Donc chaque racine de P_n est simple. Par ailleurs, comme $\deg P_n = n$, P_n a n racines (comptées avec multi.) Il a donc n racines distinctes.

Ex. 23 : Rappel: Sur $\mathbb{C}[X]$, les poly. irréductibles sont les poly. de deg 1.

$$\Delta = 1 - 4 = (-i\sqrt{3})^2$$

$$P = X^3 + 1 = X^3 - (-1)^3 = (X - (-1))(X^2 + X(-1) + (-1)^2) = (X + 1)(X^2 - X + 1) = (X + 1)\left(X - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

On peut retrouver le résultat en remarquant que les racines de P sont les racines 3^{èmes} de $-1 = e^{i\pi}$ à savoir $e^{i\frac{\pi}{3}}$, $e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})}$, $e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})}$ soit $e^{i\frac{\pi}{3}}$, -1 , $e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

24

$$\text{donc } P = 1 \times (x - e^{i\frac{\pi}{3}})(x + 1)(x - e^{-i\frac{\pi}{3}})$$

$$= (x + 1) \left(x - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \left(x - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right)$$

$$= (x + 1) \left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

On a

$$Q = x^4 + 1 = (x^2)^2 - i^2 = (x^2 - i)(x^2 + i).$$

Or $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1-1+2i}{2} = i$ et $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1-1-2i}{2} = -i$

donc $Q = \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right).$

On peut retrouver ce résultat en remarquant que les racines de Q sont les racines 4ièmes de $-1 = e^{i\pi}$ à savoir

$$e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4})}, e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4})}, e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4})}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & e^{i\frac{\pi}{4}} \times i & e^{i\frac{\pi}{4}} \times (-1) & e^{i\frac{\pi}{4}} \times (-i) & & & \\ & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \times i = \frac{i-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array}$$

Donc $Q = (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4})})(x - e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4})})(x - e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4})})$

$$= \left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \left(x + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right).$$

On a $R = P(x^2)$ donc $R = (x^2 + 1)(x^2 - e^{i\frac{\pi}{3}})(x^2 - e^{-i\frac{\pi}{3}})$

d'où $R = (x - i)(x + i)(x - e^{i\frac{\pi}{6}})(x + e^{i\frac{\pi}{6}})(x - e^{-i\frac{\pi}{6}})(x + e^{-i\frac{\pi}{6}}).$

On peut retrouver ce résultat en remarquant que les racines de R sont les racines 6ièmes de -1 .

$U = T(x^2)$ où $T(x) = x^2 + x + 1$.

Les racines de T sont j et $\bar{j}$ car

$$(x-1)(x-j)(x-\bar{j}) = x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1) \text{ donc } (x-j)(x-\bar{j}) = x^2 + x + 1 \text{ par simplification.}$$

$$\text{Donc } U = (X^2 - j)(X^2 - \bar{j}) = (X^2 - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X^2 - e^{-\frac{2i\pi}{3}}) \\ = (X - e^{\frac{i\pi}{3}})(X + e^{\frac{i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{i\pi}{3}})(X + e^{-\frac{i\pi}{3}}).$$

Tous les poly. considérés étaient dans $\mathbb{R}[X]$.
On peut les factoriser en facteurs irréel. sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$P = (X+1) \underbrace{(X^2 - X + 1)}_{\text{irréel. sur } \mathbb{R} \text{ car de deg 2 sans racine réelle.}}$$

$$Q = (X - \frac{1+i}{\sqrt{2}}) \underbrace{(X + \frac{1+i}{\sqrt{2}})}_{*} (X - \frac{1-i}{\sqrt{2}}) (X + \frac{1-i}{\sqrt{2}})$$

$$= (X^2 - (\frac{1+i+i}{\sqrt{2}})X + |\frac{1+i}{\sqrt{2}}|^2) (X^2 + \frac{1+i-i}{\sqrt{2}}X + |\frac{1+i}{\sqrt{2}}|^2)$$

$$= \underbrace{(X^2 - X\sqrt{2} + 1)}_{\text{irréel. sur } \mathbb{R}} (X^2 + X\sqrt{2} + 1).$$

$$R = (X-i)(X+i) \underbrace{(X - e^{\frac{i\pi}{6}})}_{\text{irréel. sur } \mathbb{R}} \underbrace{(X + e^{\frac{i\pi}{6}})}_{\text{irréel. sur } \mathbb{R}} (X - e^{-\frac{i\pi}{6}}) (X + e^{-\frac{i\pi}{6}})$$

$$= \underbrace{(X^2 + 1)}_{\text{irréel. sur } \mathbb{R}} (X^2 - 2\operatorname{Re}(e^{\frac{i\pi}{6}})X + |e^{\frac{i\pi}{6}}|^2) (X^2 + 2\operatorname{Re}(e^{\frac{i\pi}{6}})X + |e^{\frac{i\pi}{6}}|^2)$$

$$= (X^2 + 1) (X^2 - \sqrt{3}X + 1) (X^2 + \sqrt{3}X + 1).$$

$$U = (X - e^{\frac{i\pi}{3}}) \underbrace{(X + e^{\frac{i\pi}{3}})}_{*} (X - e^{-\frac{i\pi}{3}}) (X + e^{-\frac{i\pi}{3}})$$

$$= (X^2 - 2\operatorname{Re}(e^{\frac{i\pi}{3}})X + |e^{\frac{i\pi}{3}}|^2) (X^2 + 2\operatorname{Re}(e^{\frac{i\pi}{3}})X + |e^{\frac{i\pi}{3}}|^2)$$

$$= (X^2 - X + 1) (X^2 + X + 1)$$

Pour S on peut remarquer que $S = T(X^4)$
et utiliser les racines 4 ièmes de j et $\bar{j}$.

Ex. 24.

$$P' = 4x^3 + 5x^2 + 2ax + 3$$

$$P'' = 12x^2 + 18x + 2a$$

(26)

1 - On a

$$P(-1) = 0 \Rightarrow 1 - 3 + a - 3 + b = 0$$

$$\Rightarrow a + b = 5.$$

2 - On a :

$$-1 \text{ est racine double de } P \Rightarrow (P(-1) = P'(-1) = 0 \text{ et } P''(-1) \neq 0)$$

$$\Rightarrow (a + b = 5 \text{ et } -4 + 9 - 2a + 3 = 0 \text{ et } 12 - 18 + 2a \neq 0)$$

$$\Rightarrow (a + b = 5 \text{ et } a = 4 \text{ et } -6 + 8 \neq 0)$$

$$\Rightarrow (b = 1 \text{ et } a = 4).$$

3 - Pour $a = 4$ et $b = 1$, $P = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$
et -1 est racine double. On a $\underbrace{(X+1)^2}_{\rightarrow X^2+2X+1}$ divise P .

$$\begin{array}{r} X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1 \\ - (X^4 + 2X^3 + X^2) \\ \hline X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \\ - (X^3 + 2X^2 + X) \\ \hline X^2 + 2X + 1 \\ - (X^2 + 2X + 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

decomp. en fact. irréel. sur $\mathbb{R}$

$$\text{On a } P = \underbrace{(X-1)^2}_{\substack{\downarrow \\ \text{irréel.} \\ \text{sur } \mathbb{R}}} \underbrace{(X^2+X+1)}_{\substack{\text{irréel.} \\ \text{sur } \mathbb{R}}} = \underbrace{(X-1)^2}_{\substack{\downarrow \\ \text{irréel.} \\ \text{sur } \mathbb{Q}}} \underbrace{(X-j)(X-\bar{j})}_{\substack{\downarrow \\ \text{irréel.} \\ \text{sur } \mathbb{Q}}}$$

decomp. en fact. irréel. sur $\mathbb{Q}$