Suites 5.

TD3.

Remarque sur les suites récurrentes.

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ où $D_f \subset \mathbb{R}$.

On considère la suite $(u_n)_{n \in \underbrace{[n_0;+\infty[\cap \mathbb{N}}_{=:D}}$ définie

par $(*)$ $\begin{cases} u_{n_0} \in D_f \text{ et} \\ \forall n \in [n_0;+\infty[\cap \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

On doit clarifier deux choses :

- Existe-t-il bien une suite $(u_n)_{n \in D}$ vérifiant $(*)$?
- Si oui, est-elle unique ?

Considérons un exemple : Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} - 1 \end{array}$

et $(*)'$ $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $(*)'$ alors $u_1 = f(u_0) = \sqrt{2} - 1 \geqslant 0$

et $u_2 = f(u_1) = \sqrt{\sqrt{2} - 1} - 1 < 0$!

Donc u_3 n'est pas définie !

La réponse à la première question est donc non en général.

Cependant si $f : D_f \to \mathbb{R}$ vérifie $f(D_f) \subset D_f$ alors on va montrer qu'il existe une unique suite $(u_n)_{n \in D}$ vérifiant $(*)$.

On construit d'abord une telle suite $(u_n)_{n \in D}$ par récurrence. Pour $n \in D$,

$\mathcal{P}(n) =$ (pour $k \in [n_0;n] \cap \mathbb{N}$, u_k est bien défini, appartient à D_f et, pour $k < n$, $u_{k+1} = f(u_k)$).

$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie car u_0 est donné dans D_f.

(et il n'y a pas de $k \in [n_0;n_0] \cap \mathbb{N}$ avec $k < n_0$).

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geq n_0$.
Par hyp. de récurrence, $u_{n_0}, \dots, u_n$ sont bien déf. dans D_f et pour $k \leq n$, $u_{k+1} = f(u_k)$.
Comme $u_n \in D_f$, $f(u_n)$ est bien défini et on pose $u_{n+1} = f(u_n)$.
Comme $f(D_f) \subset D_f$, $u_{n+1} \in D_f$. Donc $u_{n_0}, \dots, u_n, u_{n+1}$ appartiennent à D_f et pour $k < n+1$, on a $u_{k+1} = f(u_k)$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Par le Th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in D$.
Donc on a construit une suite $(u_n)_{n \in D}$ vérifiant (*).
Soit $(v_n)_{n \in D}$ une autre suite vérifiant

$$\begin{cases} v_{n_0} = u_{n_0} \\ \text{et} \\ \forall n \in D,\ v_{n+1} = f(v_n). \end{cases}$$

Pour $n \in D$, soit $Q(n) = (u_n = v_n)$.
$Q(0)$ est vraie puisqu'on a imposé $v_0 = u_0$.
Supp. $Q(n)$ vraie pour un $n \in D$. Par hyp. de réc. $u_n = v_n$. Donc $u_{n+1} = f(u_n) = f(v_n) = v_{n+1}$.
Donc $Q(n+1)$ est vraie.
Par le th. de réc., $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in D$.
Donc $(v_n)_{n \in D} = (u_n)_{n \in D}$.

Tout ce qui vient d'être dit est encore valable si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et si $D_f \subset \mathbb{C}$.

* Si, dans un exercice, on ne demande pas explicitement de vérifier qu'une suite récurrente est bien définie, on considérera qu'elle l'est et qu'elle est unique.

Ex 1 : on prend $(a;b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 1$ et on considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déf. par

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{C} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n + b. \end{cases}$$

1 a- (Pour deviner q et ℓ, on peut voir que le résultat implique $a u_n + b - \ell = q(u_n - \ell)$ et on choisit $q = a$ et $b - \ell = -q\ell$ soit $\frac{b}{1-a} = \ell$, car $a \neq 1$.)

Soit $q = a$ et $\ell = \frac{b}{1-a}$: Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - \ell = a u_n + b - \ell = a u_n + b\left(1 - \frac{1}{1-a}\right)$$
$$= a u_n + \frac{b}{1-a}(1 - a - 1) = a u_n - a\ell = a(u_n - \ell) = q(u_n - \ell)$$

b- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (u_n = \ell + q^n(u_0 - \ell))$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\ell + q^0(u_0 - \ell) = \ell + u_0 - \ell = u_0$.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} = a u_n + b = q u_n + (1-q)\ell = q(u_n - \ell) + \ell.$$

Par hyp. de réc. : $u_{n+1} - \ell = q \times q^n(u_0 - \ell) = q^{n+1}(u_0 - \ell)$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le Th. de réc., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c- Pour tout n, on a

$$u_n = \ell + q^n(u_0 - \ell) = \ell \times (1 - q^n) + q^n u_0$$
$$= b \times \frac{1 - a^n}{1-a} + a^n u_0.$$

2- Application : on applique 1 pour $u_0 = 2$, $a = 2$ et $b = 3$. Pour tout n, $u_n = 3 \times \frac{(2^n - 1)}{2-1} + 2^n \times 2 = 5 \times 2^n - 3$.

Ex.2 : Rappel : Soit D une partie infinie de $\mathbb{N}$. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{K}^D$ des suites définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un esp. vectoriel pour les lois :

Soit $u : D \to \mathbb{K}$, $v : D \to \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$u+v : D \to \mathbb{K}$, $n \mapsto u_n + v_n$; $\lambda u : D \to \mathbb{K}$, $u_n \mapsto \lambda u_n$.

1.c. Correction de l'énoncé. On doit lire

$$u_n = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \delta_n^{[k]}.$$

Si $n > p$ alors, pour tout $k \in [0;p] \cap \mathbb{N}$, $k \neq n$ donc $\delta_n^{[k]} = 0$ et $u_n = 0$.

Si $n \leq p$ alors $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k \delta_n^{[k]} = \lambda_n \delta_n^{[n]} = \lambda_n$.

b- Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ dans $\mathbb{R}$ tq. $\sum_{k=0}^{p} \lambda_k \delta^{[k]} = 0$.

Pour $k \in [0;p] \cap \mathbb{N}$, $0 = \left(\sum_{k=0}^{p} \lambda_k \delta^{[k]}\right)_k = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k \delta_k^{[k]} = \lambda_k$.

Donc la famille $(\delta^{[0]}; \delta^{[1]}; \dots; \delta^{[p]})$ est libre.

2- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension finie. En effet, s'il était de dimension finie $d \in \mathbb{N}$, on aurait une famille libre $(\delta^{[0]}; \dots; \delta^{[d]})$ à $d+1$ éléments par 1.b. Contradiction.

Ex.3 :

1.a. La suite nulle appartient à E. Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+\lambda v)_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n + \lambda(a v_{n+1} + b v_n) = a(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}) + b(u_n + \lambda v_n)$$
$$= a(u+\lambda v)_{n+1} + b(u+\lambda v)_n.$$

b- On construit une suite u de $\mathcal{E}$ vérifiant $u_0=\alpha$ et $u_1=\beta$.

Pour $p\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}(p)=\left(\exists u_0,\dots,u_p\in\mathbb{R} \text{ tq. } u_0=\alpha, u_1=\beta \text{ et } u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n \text{ si } n\leq p-2\right)$

$\mathcal{S}(1)$ est vraie en prenant $u_0=\alpha$ et $u_1=\beta$.

Supp. $\mathcal{S}(p)$ vraie pour un $p\in\mathbb{N}^*$.

On a donc $u_0,\dots,u_p$ avec $u_0=\alpha$, $u_1=\beta$ et

(*) $u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n$ pour $n\leq p-2$

Soit $u_{p+1}=au_p+bu_{p-1}$. On a donc (*) pour $n=p+1-2$.

Donc $\mathcal{S}(p+1)$ est vraie. Par le Th. de récu., $\mathcal{S}(p)$ est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}^*$. On a donc construit une suite $u\in\mathcal{E}$ telle que $u_0=\alpha$ et $u_1=\beta$.

Soit $v\in\mathcal{E}$ vérifiant $v_0=\alpha$ et $v_1=\beta$. Pour $p\in\mathbb{N}$, soit $Q(p)=(u_p=v_p)$. On a $Q(0)$ et $Q(1)$ vraie.

Supposons, pour un $p\in\mathbb{N}^*$, qu'on ait $Q(k)$ vraie pour $k\in[0;p]\cap\mathbb{N}$.

Donc $u_{p-1}=v_{p-1}$ et $u_p=v_p$. Comme $u,v\in\mathcal{E}$,

$$u_{p+1}=au_p+bu_{p-1}=av_p+bv_{p-1}=v_{p+1}.$$

Donc, par l'hyp. de récu., $Q(p+1)$ est vraie.

Par le th. de récu., $Q(p)$ est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$

donc $u=v$. u est bien unique.

c- v et w existent par 1.b.

Soit $u\in\mathcal{E}$. Pour $p\in\mathbb{N}$, soit $R(p)=(u_p=u_0v_p+u_1w_p)$.

Comme $u_0v_0+u_1w_0=u_0$ et $u_0v_1+u_1w_1=u_1$, $R(0)$ et $R(1)$ sont vrai. Supposons que, pour un $p\in\mathbb{N}^*$, on ait $R(k)$ vraie pour $k\in[0;p]\cap\mathbb{N}$. On a donc

(*) $u_k=u_0v_k+u_1w_k$ pour $k=p-1$ et $k=p$.

Comme $u\in\mathcal{E}$, $u_{p+1}=au_p+bu_{p-1}=a(u_0v_p+u_1w_p)+b(u_0v_{p-1}+u_1w_{p-1})=$

Comme $v, w \in E$, on a
$u_{p+1} = u_0(av_p + bv_{p-1}) + u_1(aw_p + bw_{p-1}) = u_0 v_{p+1} + u_1 w_{p+1}$.
Donc, par l'hyp. de réc., $R(p+1)$ est vraie. Par le th. de réc., $R(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

d- Par 1-c., pour tout $u \in E$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ tq $u = \lambda v + \mu w$ (il suffit de prendre $\lambda = u_0$ et $\mu = u_1$).
Donc $(v; w)$ est une famille génératrice de E.
Soit $(\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq $\lambda v + \mu w = 0$. Alors

$$0 = (\lambda v + \mu w)_0 = \lambda v_0 + \mu w_0 = \lambda,$$
$$0 = (\lambda v + \mu w)_1 = \lambda v_1 + \mu w_1 = \mu.$$

Donc $(v; w)$ est libre. C'est donc une base de E et $\dim E = 2$.

2- Soit $q \in \mathbb{R}^*$ et $g_q = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a

$$g_q \in E \iff \forall n \in \mathbb{N},\ q^{n+2} = aq^{n+1} + bq^n$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N},\ q^n(q^2 - aq - b) = 0$$
$$\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ q^n(q^2 - aq - b) = 0 \\ \text{et} \quad q^2 - aq - b = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*,\ q = 0 \text{ ou } q^2 - aq - b = 0 \\ \text{et} \quad q^2 - aq - b = 0 \end{cases}$$
$$\iff q^2 - aq - b = 0.$$

Or le discriminant de $0 = X^2 - aX - b$ est $\Delta = a^2 + 4b > 0$ par hyp. donc $X^2 - aX - b = 0$ a 2 racines réelles

$q_1 = \frac{a+\sqrt{\Delta}}{2} > q_2 = \frac{a-\sqrt{\Delta}}{2}$.

D'après l'équivalence précé., $g_{q_1} \in \mathcal{E}$ et $g_{q_2} \in \mathcal{E}$.

b- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.q. $\lambda g_{q_1} + \mu g_{q_2} = 0$.

Alors $\begin{cases} \lambda q_1^0 + \mu q_2^0 = 0 \\ \text{et} \\ \lambda q_1 + \mu q_2 = 0 \end{cases}$

(λ, μ) est sol. d'un syst. dont le déterminant est $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = q_2 - q_1 \neq 0$ donc un syst. de Kramer. D'où $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

(g_{q_1}, g_{q_2}) est donc une famille libre de $\mathcal{E}$ de dim 2 donc une base.

Donc, pour $u \in \mathcal{E}$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ t.q.

$\forall n, \quad u_n = \lambda q_1^n + \mu q_2^n$.

3- a- On reprend l'équivalence précédente.

$g_q \in \mathcal{E} \iff q^2 - aq - b = 0 \iff q = \frac{a}{2}$.

puisque $\Delta = 0$. Donc $g_{a/2} \in \mathcal{E}$.

Soit $z = (nq^n)_n$ avec $q = \frac{a}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$z_{n+2} = (n+2) q^{n+2} = (n+2) q^n (aq+b) = (n+2) a q^{n+1} + (n+2) b q^n$

$= (n+1) a q^{n+1} + a q^{n+1} + nbq^n + 2bq^n$

$= a z_{n+1} + b z_n + q^n \left(a \times \frac{a}{2} - \frac{a^2}{4} \right)$

$= a z_{n+1} + b z_n$ car $\Delta = 0$.

Donc $z \in \mathcal{E}$.

5- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^2$ tq. $\lambda g_q + \mu z = 0$
(avec $q = \frac{a}{2} \neq 0$ car $\Delta = 0$ et $b \neq 0$).

$$\begin{cases} 0 = (\lambda g_q + \mu z)_0 = \lambda + 0 \\ 0 = (\lambda g_q + \mu z)_1 = \lambda q + \mu q \end{cases}$$

Donc $\lambda = 0$ et $\mu q = 0$ donc $\mu = 0$ (car $q \neq 0$).

Donc $(g_q ; z)$ est libre dans $\mathcal{E}$. C'en est une base.
Donc, pour tout $u \in \mathcal{E}$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tq.
$\forall n$, $u_n = \lambda q^n + \mu n q^n = (\lambda + n\mu) q^n$.

Complément : que se passe-t-il lorsque $\Delta < 0$?
L'équation $X^2 - aX - b = 0$ n'a plus de sol. réelle mais deux sol. complexes q et $\overline{q}$.
En partic. $q \neq 0$. On peut donc écrire $q = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |q| > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Le calcul précédent montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ q^{n+2} = a q^{n+1} + b q^n$$

mais les termes sont complexes.
On essaye les suites $x = (\mathrm{Re}(q^n))_n$ et $y = (\mathrm{Im}(q^n))_n$ soit $x = (\rho^n \cos(n\theta))$ et $y = (\rho^n \sin(n\theta))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme $q^{n+2} = a q^{n+1} + b q^n$

$$x_{n+2} = \mathrm{Re}(q^{n+2}) = \mathrm{Re}(a q^{n+1}) + \mathrm{Re}(b q^n) = a\,\mathrm{Re}(q^{n+1}) + b\,\mathrm{Re}(q^n)$$
$$= a x_{n+1} + b x_n.$$

De même, $y_{n+2} = a y_{n+1} + b y_n$.

Donc $x, y \in \mathcal{E}$. Si $\lambda x + \mu y = 0$ alors en partic. $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = 0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = 0 \end{cases}$
soit $\lambda = 0$ et $\mu \sin(\theta) = 0$. Mais $\sin(\theta) \neq 0$ donc $\mu = 0$. $(x ; y)$ est libre dans $\mathcal{E}$. C'en est une base. Donc, pour tout $u \in \mathcal{E}$, il existe (λ, μ) ts. $\forall n$, $u_{n+1} = \lambda \rho^n \cos(n\theta) + \mu \rho^n \sin(n\theta)$.

Ex. 4 : Suites arithmétiques de raison r :

$u = (u_n)_n$ t.q. $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r, \\ u_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$

1- On a

u est constante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

$\Leftrightarrow r = 0.$

u est $\nearrow$ Ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$

Ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + r \geq u_n$

Ssi $r \geq 0.$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (u_n \geq u_0 + nr)$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

On a alors $u_{n+1} = u_n + r \overset{\text{HR}}{\geq} (u_0 + nr) + r = u_0 + (n+1)r$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de réc., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

u est minorée Ssi $\exists M \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq M$

Ssi $\exists M \in \mathbb{R}$; $\forall n \in \mathbb{N}, nr \geq M - u_0$ (*)

Ssi $r \geq 0.$

En effet (*) est vraie si $r \geq 0$ en prenant $M < -|u_0|$;

si $r < 0$ et (*) est vraie on a une contradiction en passant à la limite $n \to \infty$ dans les ineg.

u est bornée Ssi $\exists\, m < M$ t.q. $\forall n,\ m \leq u_n \leq M$

Ssi $\exists\, m \in M$ t.q. $\forall n,\ m \leq u_0 + nr \leq M$. (**)

Ssi $r = 0.$

En effet (**) est vraie si $r = 0$ en prenant $m = -|u_0|$ et $M = |u_0|$.

si $r \neq 0$ et (**) est vraie, on a une contradiction en passant à la limite $n \to \infty$ dans les inégalités.

2- Suite géom. de raison q et de 1er terme u_0 :
$u = (u_n)_n$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

u est constante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$ ssi $(q = 1$ ou $(q = 0$ et $u_0 = 0))$

u est $\searrow$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 q^n (1-q) \leq 0$

ssi $(q \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_0 q^n (1-q) \leq 0)$

ssi $(q = 0$ ou $(q > 0$ et $u_0 (1-q) \leq 0))$.

Pour $|q| < 1$, on a $|u_n| = |u_0| \, |q|^n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Pour $|q| > 1$ et $|u_0| \neq 0$, $|u_n| = |u_0| |q|^n \longrightarrow +\infty$.

Pour $|q| = 1$, $|u|$ est constante égale à $|u_0|$.

Donc
u est bornée ssi $(|q| \leq 1$ ou $u_0 = 0)$

Si $u_0 > 0$ et $q > 1$, $u_n = u_0 q^n \longrightarrow +\infty$
Si $u_0 > 0$ et $q < -1$, $u_{2n} = u_0 q^{2n} \longrightarrow +\infty$
Si $u_0 < 0$ et $q < -1$, $u_{2n+1} = u_0 q \, q^{2n} \longrightarrow +\infty$

Donc
u est maj. ssi $(|q| \leq 1$ ou $u_0 \geq 0$ ou $(u_0 < 0$ et $q > 1))$.

Ex. 5.

1- (i) : $\exists C \in \mathbb{R}$; $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \Rightarrow u_n = C)$.
(ii) : $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $(n \geq N \Rightarrow u_n \geq 0)$.
(iii) : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; $(n \geq N \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n)$.

2- $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a
u bornée ssi $\exists M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. (1)
u bornée à partir d'un certain rang ssi $\exists M > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq M)$. (2)

(1) $\Rightarrow$ (2) : On applique (1) qui donne un $M>0$ tq.

$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. (*).

Soit $N = 10^{528}$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ on a $|u_n| \leq M$ par (*). Donc (2) est vraie.

(2) $\Rightarrow$ (1) : On applique (2) qui donne un $M_0>0$ et un $N \in \mathbb{N}^*$ tq.

$\forall n \in [N; +\infty[\cap \mathbb{N}, |u_n| \leq M_0$. (**).

Soit $M = \max(M_0; |u_0|; \dots; |u_{N-1}|)$ si $N \geq 1$,

$= M_0$ si $N = 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

soit $n \leq N$ et dans ce cas

$|u_n| \leq \max(|u_0|; \dots; |u_{N-1}|) \leq M$,

soit $n \geq N$ et dans ce cas, par (**),

$|u_n| \leq M_0 \leq M$.

Donc (1) est vraie.

Ex.6 : (i) : $\forall n$, $u_n = (-1)^n n$ ($u_{2n} \to +\infty$, $u_{2n+1} \to -\infty$)

(ii) : $\forall n$, $u_n = (-1)^n n$ ($u_1 < u_0$ mais $u_2 > u_1$).

(iii) : $\forall n$, $u_n = \frac{1}{n+1}$

(iv) : $\forall n$, $u_n = (-1)^n n$.