Suite 6 - TD3

Ex 7

(i). On montre :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq N \Rightarrow |\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N = E(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}) + 1$ (E désigne la partie entière).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$, on a $n \geq N > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ donc $n^2 > \frac{1}{\varepsilon}$
et $\varepsilon > \frac{1}{n^2} \Rightarrow |\frac{1}{n^2} - 0|$.

(ii) On montre :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{3}{2}| < \varepsilon)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a : $\left|\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{|-11|}{2(2n+3)} = \frac{11}{2(2n+3)}$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a

(*) $\left|\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \iff \frac{11}{2(2n+3)} < \varepsilon \iff \frac{11}{2\varepsilon} < 2n+3$.

On choisit $N = E(\frac{11}{2\varepsilon}) + 1$. On a $N > \frac{11}{2\varepsilon}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a $2n+3 \geq n \geq N > \frac{11}{2\varepsilon}$
donc, par (*), $\left|\frac{3n-1}{2n+3} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$.

(iii). On montre
$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq N \Rightarrow n! > A)$.

Soit $A > 0$. On choisit $N = E(A) + 1$. On a $N > A$.
Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, $n! = n \times \underbrace{(n-1) \cdots \times 1}_{\geq 1} \geq n \geq N > A$.
(car $n > 0$).

2- Hypothèse : $\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}; \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N \Rightarrow |u_n-0|<\varepsilon)$.

(i). On montre :

$$\forall A>0, \exists N\in\mathbb{N}; \forall n\in\mathbb{N}, \left(n\geq N \Rightarrow \frac{1}{u_n}>A\right).$$

Soit $A>0$. Par hypothèse, pour $\varepsilon=\frac{1}{A}$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq.

$$\forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N \Rightarrow |u_n|<\varepsilon). \quad (*)$$

Pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq N$, on a, par $(*)$, $0<u_n=|u_n|<\varepsilon$.

Donc $A=\frac{1}{\varepsilon}<\frac{1}{u_n}$.

(ii). On montre :

$$\forall \varepsilon'>0, \exists N\in\mathbb{N}; \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N \Rightarrow |(u_n^2+1)-1|<\varepsilon').$$

Soit $\varepsilon'>0$. Par hypothèse, avec $\varepsilon=\sqrt{\varepsilon'}>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq.

$$\forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N \Rightarrow |u_n|<\varepsilon=\sqrt{\varepsilon'}). \quad (**)$$

Pour $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geq N$, on a, par $(**)$, et comme $\sqrt{\cdot}$ est $\uparrow$,

$$|(u_n^2+1)-1| = |u_n|^2 < (\sqrt{\varepsilon'})^2 = \varepsilon'.$$

(iii). On sait que sinus est continue en 0 donc on a

$$\forall \varepsilon'>0, \exists \delta>0; \forall x\in\mathbb{R}; (|x-0|<\delta \Rightarrow |\sin(x)-\sin(0)|<\varepsilon'). \quad (***)$$

On montre

$$\forall \varepsilon''>0, \exists N\in\mathbb{N}; \forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N \Rightarrow |\sin(u_n)-0|<\varepsilon'')$$

Soit $\varepsilon''>0$. Par $(***)$ avec $\varepsilon'=\varepsilon''$, il existe $\delta>0$ tq.

$$\forall x\in\mathbb{R}, (|x|<\delta \Rightarrow |\sin(x)|<\varepsilon''). \quad (****).$$

Par hypothèse avec $\varepsilon=\delta$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tq.

$$\forall n\in\mathbb{N}, (n\geq N \Rightarrow |u_n|<\delta). \quad (*****)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a, par (*****), $|u_n| < \delta$ donc, on déduit de (****) que $|\sin(u_n)| < \varepsilon$".

Ex. 8 :

(i) vraie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite cv. vers $\ell \in \mathbb{R}$ ($\ell \neq 0$).

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle obtenue de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en changeant un nb. fini de termes. Soit

$$p = \max\{n \in \mathbb{N};\ u_n \neq v_n\}.$$

Hypothèse : $\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N' \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N' \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon')$.

On montre :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hyp. avec $\varepsilon' = \varepsilon$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tq.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N' \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon). \quad (*)$$

On pose $N = \max(p+1; N')$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a

$v_n = u_n$ car $n > p$ et, comme $n \geq N \geq N'$, on a par (*)

$$|v_n - \ell| = |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

(ii) Fausse. Soit $u = \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = \frac{1}{2p+1} > 0$, $u_{2p+1} = \frac{-1}{2p+2} < 0$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

D'où $\lim u_n = 0$ par le th. des gendarmes.

(iii). Vraie. Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{R}$ tq. $l = \lim u$. On a donc

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$. (*)

Soit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Par (*), il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \frac{1}{2})$. (**).

Dans l'intervalle $]l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}[$, il y a exactement un entier q, car c'est un intervalle ouvert de longueur 1.

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a, par (**),

$u_n \in]l - \frac{1}{2}; l + \frac{1}{2}[$ or on sait que $u_n \in \mathbb{Z}$ donc

$u_n = q$.

(iv). Fausse. : Soit $u_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ donc $\lim u_n$ existe et vaut 0.

(v) Vraie. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $1 = \lim u$.

On a donc

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq N \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon)$. (*)

Soit $\varepsilon = 1$. Par (*), il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.

$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - 1| < 1)$. (**).

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a par (**),

$$u_n = u_n - 1 + 1 > -|u_n - 1| + 1 > 0.$$

(vi) Fausse : Soit $u = ((-1)^n \times n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p} = 2p \xrightarrow[p\to\infty]{} +\infty$. Donc u n'est pas majorée. Si u tendait vers $+\infty$, alors la S. suite $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ tendrait aussi vers $+\infty$.
Or, pour $p \in \mathbb{N}$, $u_{2p+1} = -(2p+1) \xrightarrow[p\to+\infty]{} -\infty$. Contr.

(vii) Vraie : Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite tendant vers $\ell \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
On a donc
$\forall \varepsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon')$. (*)
On montre :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |v_{n+1} - v_n| < \varepsilon)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par (*) avec $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.
$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |v_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2})$. (**).
Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a, par (**),
$$|v_{n+1} - v_n| = |v_{n+1} - \ell + \ell - v_n| \leq |v_{n+1} - \ell| + |\ell - v_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
car $n \geq N$ et $n+1 \geq N$.

(viii) Vraie. Supposons que $y = (w_n + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente alors, comme w l'est, $y - w$ est aussi convergente. Mais $x = y - w$ est divergente. Contr. Donc y est divergente.

(ix) Fausse : Soit y et z données par, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$y_{2n} = 0$, $y_{2n+1} = 2n+1$ et $z_{2n} = 2n$ et $z_{2n+1} = 0$.
Comme $\lim y_{2n+1} = +\infty$, y n'est pas majorée donc est divergente.
Comme $\lim z_{2n} = +\infty$, z

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n z_n = 0$. Donc yz cv. vers 0.

(x) Fausse : un contre-exemple est fourni par $(a;b) = (y;z)$ de la question (ix).
$(\lim a_n = 0)$ est fausse car $a = y$ n'est pas majorée.
$(\lim b_n = 0)$ ——— $b = z$ ——— .

(xi) Vraie. Soit M un majorant de $(|u_n C_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $|C_n| \leq \frac{M}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
Par le th. des gendarmes, $\lim C_n$ existe et vaut 0.

(xii) Fausse : Soit $d = ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite $(|d_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc converge vers 1.
On montre que d diverge.
Si d convergeait vers un $\ell \in \mathbb{R}$ alors les s.suites $(d_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergeraient vers ℓ.
Or $(d_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc cv. vers 1
et $(d_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ——— -1 ——— -1.
D'où $-1 = \ell = 1$. Contr. Donc d diverge.

Ex. 9 :

1. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$v_n - \ell = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_n - \frac{\ell \times \sum_{k=0}^{n} 1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_n - \ell).$$

b. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u_n = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.
$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)$. (*)
Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n > N$, on a, pour $k \in [\![N+2; n]\!] \cap \mathbb{N}$,
$|u_k - \ell| < \varepsilon$ par (*) donc

$$\sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell| \leq \varepsilon \times \sum_{k=N+1}^{n} 1 = \varepsilon \times (n-(N+1)+1) = \varepsilon(n-N).$$

c. Soit M le max. de l'ens. fini $\{|u_k-\ell| ; k \in [0;N] \cap \mathbb{N}\} \cup \{1\}$.
On a $M > 0$ et

$$\sum_{k=0}^{N} |u_k - \ell| \leq \sum_{k=0}^{N} M = M \sum_{k=0}^{N} 1 = M(N-0+1) = M(N+1).$$

d. On montre :
$\forall \varepsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N} ; \forall n \in \mathbb{N} ; (n \geq N' \Rightarrow |v_n - \ell| < \varepsilon')$.
Soit $\varepsilon' > 0$. D'après b. avec $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq.

$$\left(n > N \Rightarrow \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell| \leq (n-N)\frac{\varepsilon'}{2} \right) \quad (**).$$

D'après c, il existe $M > 0$ tq.

$$\sum_{k=0}^{N} |u_k - \ell| < (N+1)M, \quad (***)$$

Comme $\lim \frac{1}{n+1} = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tq.

$$\left(n \geq N_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}\right| < \frac{\varepsilon'}{2(N+1)M} \right) \quad (****)$$

On pose $N' = \max(N ; N_1)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N'$, on a

$$|v_n - \ell| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} (u_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |u_k - \ell|$$

par a. et

$$|v_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{N} |u_k - \ell| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell|.$$

Comme $n \geq N'$, $n \geq N$ et $n \geq N_1$ donc, on a, par (**) et (***),

$$|V_n - \ell| \leq \frac{1}{n+1}(N+1)M + \underbrace{\frac{1}{n+1}(n-N)}_{\leq 1}\frac{\varepsilon'}{2}$$

$$\leq \frac{1}{n+1}(N+1)M + \frac{\varepsilon'}{2}$$

et, par (****),

$$|V_n - \ell| < \frac{\varepsilon'}{2(N+1)M} \times (N+1)M + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'.$$

2- On montre :
$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow V_n > A)$.

Par hyp., on a :
$\forall A' > 0, \exists N' \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \Rightarrow u_n > A')$. (*)

Soit $A > 0$. D'après (*) avec $A' = 4A > 0$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ t.q.
$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N' \Rightarrow u_n > 4A)$. (**).

Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{N'} u_k\right) = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{n-N'+1}{n+1} = 1$

(car, par ex, $\frac{n-N'+1}{n+1} = \frac{1-\frac{N'-1}{n}}{1+1/n} \to 1$), il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ t.q.

$$n \geq N_1 \Rightarrow \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N'} u_k\right| < A. \quad (***)$$

et $$n \geq N_2 \Rightarrow \left|\frac{n-N'+1}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{2}. \quad (****)$$

Soit $N = \max(N'; N_2; N_2)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$, on a
$n \geq N'$, $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ donc, par (**) et (***),

$$V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N'} u_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N'}^{n} u_k > -A + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N'}^{n} 4A$$

Donc

$$v_n > -A + \frac{4A}{n+1} \sum_{k=N'}^{n} 1 = -A + \frac{4A}{n+1}(n-N'+1).$$

or, par (****), $\frac{n-N'+1}{n+1} - 1 > -\frac{1}{2}$ donc $\frac{n-N'+1}{n+1} > \frac{1}{2}$. D'où, pour $n \geq N$,

$$v_n > -A + \frac{4A}{2} = A.$$

3. Applications: * Soit $u = \left(\frac{3n-2}{2n+3}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Comme, pour $n \neq 0$,

$$u_n = \frac{3 - \frac{2}{n}}{2 + \frac{3}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{3}{2},$$

on déduit de 1 que $\lim u_n$ existe et vaut $\frac{3}{2}$.

* $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \ln(k+1)$?.

Soit $u = (\ln(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ on a, par composition, $\lim u_n = +\infty$. Donc, par 2, $\lim v_n = +\infty$.

Rq. pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{n+1} \ln\left(\prod_{k=0}^{n} (k+1)\right)$.

$$= \ln\left(\prod_{k=0}^{n} (k+1)^{\frac{1}{n+1}}\right).$$

Ex. 11:

1- Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

2-a- Par 1, on a :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N};\ n \geq N \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \varepsilon$.

Donc, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ t.q.

$\forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{1}{2})$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$, on a donc

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{1}{2} \text{ donc } |u_{n+1}| < \frac{|u_n|}{2} \text{ et } |u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}.$$

b- Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(|u_n| \leq 2^{n_0 - n}|u_{n_0}|\right)$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car $|u_{n_0}| = 2^{n_0 - n_0}|u_{n_0}|$.

Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \geq n_0$. On a

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2} \underset{\text{HR.}}{\leq} \frac{1}{2} \times 2^{n_0 - n} \times |u_{n_0}| = 2^{n_0 - (n+1)}|u_{n_0}|.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de récu., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

3- Par suite $n \geq n_0$, on a

$$|u_n| \leq 2^{n_0}|u_{n_0}| \times 2^{-n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car $\lim 2^{-n} = 0$. Donc, par le th. des gendarmes, $\lim u_n$ existe et vaut 0.

Autre méthode : Soit $a \in \mathbb{C}$ et $u = \left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

On montre d'abord que $|u| = \left(\frac{|a|^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

Soit $N = E(|a|) + 1$. On a, pour $n \geq N$, $n+1 > |a|$ et

$$|u_{n+1}| = \frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!} = |u_n| \times \frac{|a|}{n+1} \leq |u_n|.$$

Comme la suite $(|u|)$ est positive et décroissante à partir d'un certain rang, elle cv. vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geq 0$, on a, passage à la limite dans les inégalités, $\ell \geq 0$.

Comme $(|u_{n+1}|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une s. suite de $(|u|)$, $\lim |u_{n+1}| = \ell$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_{n+1}| = |u_n| \times \frac{9}{n}$$

$|u_{n+1}| \to \ell$ quand $n \to \infty$; $|u_n| \to \ell$ quand $n \to \infty$; $\frac{9}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$

donc $\ell = \ell \times 0$. D'où $\ell = 0$.

Comme $\lim |u| = 0$, on sait que $\lim u$ existe et vaut 0.

Ex. 10 :

(i). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$\frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$

donc, par les opérations sur les limites,

$\lim a_n = 1$.

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}$.

Comme $\lim \frac{1}{n} = 0$, on a, par les opérations sur les limites $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 1$ et $\lim \left(\frac{1}{n}\right)^2 = 0$

donc $\lim b_n = 0$.

(iii). Comme $\lim n = +\infty$ et $\lim \frac{1}{x^2+1} = 0$, on ne peut conclure directement.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $C_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}}_{\to 1}$

Par les opé. sur les limites, $\lim C_n = 0$.

Préliminaire : $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

* Si l'on sait que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ alors on a $\lim \sqrt{n} = +\infty$ par composition.

* On peut aussi remarquer que $(\sqrt{n})_n$ est ↗ car $\sqrt{\cdot}$ est une fonct. ↗. Donc $\lim \sqrt{n}$ existe et vaut $S = \sup \{\sqrt{n} ; n \in \mathbb{N}\}$. Si ce sup S était fini, on aurait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = (\sqrt{n})^2 \leq S^2$. Contr. pour $n = E(S^2)+1$. Donc $S = +\infty$ et $\lim \sqrt{n} = +\infty$.

Pour déterminer S, on peut aussi dire que la S-suite $(\sqrt{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ doit tendre vers S. Or $(\sqrt{n^2})_{n \in \mathbb{N}} = (n)_{n \in \mathbb{N}} \to +\infty$ donc $S = +\infty$.

(iv) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = \dfrac{\overbrace{n}^{\to +\infty} - \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\to 0 \text{ (q. préliminaire)}}}{1 + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0}} \to \frac{1}{n \to \infty}$

par les opé. sur les limites.

(v) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$e_n = \frac{n - \sqrt{n^2-n}}{n+\sqrt{n^2-n}} \times \left(n+\sqrt{n^2-n}\right) = \frac{n^2 - \left(\sqrt{n^2-n}\right)^2}{n+\sqrt{n^2-n}}$$

$$= \frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}} = \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{car } \lim_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$$

($\frac{1}{n} \to 0$)

Ainsi, par les opér. sur les limites, $\lim e_n = \frac{1}{2}$.

(vi). Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n = \frac{\left(\sqrt{n(n+1)} - n\right)\left(\sqrt{n(n+1)} + n\right)}{\sqrt{n(n+1)} + n} = \frac{n(n+1) - n^2}{\sqrt{n(n+1)} + n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n(n+1)} + n} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Comme précédemment.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|g_n| \leq \frac{2}{n}, \quad |h_n| \leq \frac{1}{n}, \quad |i_n| \leq \frac{1}{n}.$$

Comme $\lim \frac{1}{n} = 0$, on a, par le th. des gendarmes,

$$0 = \lim g_n = \lim h_n = \lim i_n$$

(x). Comme $\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$ (croissance comparées)

on a, par composition, $\lim j_n = 0$.

(xi). Pour $n \in \mathbb{N}$, $k_n = \left(\frac{2}{5^2}\right)^n - 3 \times \left(\frac{3}{5^2}\right)^n$.

Comme $0 \leq \frac{2}{5^2} < 1$, $0 < \frac{3}{5^2} < 1$, $\lim \left(\frac{2}{5^2}\right)^n = 0 = \lim \left(\frac{3}{5^2}\right)^n$

donc $\lim k_n = 0$, par les opé. sur les limites.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$l_n = \ln\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0,\ n\to\infty} \times \underbrace{\left(\frac{1}{n}+1\right)}_{\to 1,\ n\to\infty}\right)$$

Comme $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$, on a, par composition de produit,

$$\lim l_n = -\infty.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = \underbrace{\frac{n^2}{n}}_{\to +\infty} \times \frac{1 + \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}}_{\to 0,\ n\to\infty}}{2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty.$$

Comme $\left|\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\lim \frac{(-1)^n}{n^{3/2}} = 0$ par le th. des gendarmes.

On suppose que $l = \lim q_n$ existe dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Donc $\lim q_{3n} = l = \lim q_{3n+1}$.

Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $q_{3n} = \sin\left(\frac{2 \times 3n\pi}{3}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Et, pour $n \in \mathbb{N}$, $q_{3n+1} = \sin\left(2n\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\frac{\sqrt{3}}{2} = l = 0$. Contr. Donc $\lim q_n$ n'existe pas.

On suppose que $l = \lim r_n$ existe. Comme, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, $r_n \times \frac{n}{n+1} \to l$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n = l$. Donc $\lim (-1)^{2n} = l$

et $\lim (-1)^{2n+1} = l$. Or, pour $n \in \mathbb{N}$, $(-1)^{2n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

et $(-1)^{2n+1} = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ donc $-1 = l = 1$. Contr.

Donc $\lim r_n$ n'existe pas.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{e^{n/2}(1+n^4 e^{-n/2})}{n^6\left(1+\frac{\ln(n)}{n^6}\right)} = \dfrac{e^{n/2}}{(n/2)^6} \times \dfrac{1}{2^6} \times \dfrac{\left(1+\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{n}{2}} 2^4\right)}{\left(1+\frac{\ln(n)}{n^6}\right)}$,

On sait que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^6} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$

pour $p \in \mathbb{N}$. Donc, par composition

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{e^{n/2}}{(n/2)^6} = +\infty$, $\lim \dfrac{e^{\frac{n}{2}}}{(n/2)^4} = +\infty$ et $\lim \dfrac{\ln(n)}{n^6} = 0$.

Donc, par les opé. sur les limites, $\lim p_n = +\infty$.