

Bornes supérieure et inférieure.Méthodes de calcul : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.On cherche à déterminer $\sup A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

* on devine le résultat, soit le la valeur devinée.

* Si $l \in A$ alors on montre que $l = \max A$.
(Si $\max A$ existe alors $\sup A = \max A$).* Si $l \notin A$ alorson revient à la déf. de $\sup A$ pour montrer que $l = \sup A$.On $\left\{ \begin{array}{l} - \text{on montre que } l \text{ majore } A \text{ et que } l \text{ est limite} \\ - \text{d'une suite d'élé. de } A. \end{array} \right.$ On a une stratégie similaire pour déterminer $\inf A$.Ex 14 : $A =]-1, 1[$.On devine que $\sup A = \max A = 1$ et $\inf A = -1$ et pas de min.Preuves : * Par tout $x \in A$, on a $x \leq 1$ et $1 \in A$, donc $1 = \max A$.D'où $\sup A = \max A = 1$.* Par tout $x \in A$, $x \geq -1$. Donc -1 minore A .→ Soit on un minisant de A . Donc $m \leq -1$, si $m > -1$ alors $a = \frac{m-1}{2} \in]-1, m[\subset]-1, 1[= A$. Contr. car $a \in A$ et $m > a$. Donc $m \leq -1$ et -1 est le plus gd. minisant de A , i.e. $-1 = \inf A$.→ Autre preuve. -1 est la limite de la suite
 $\left(-1 + \frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élé. de A . De plus, -1 minore A
(Par déf. de A) donc, par le cours, $-1 = \inf A$. $-1 \notin A$
donc pas de min. $B =]2, 2[\cup]6, 22[\cup]100, +\infty[$.On devine que $\sup B = +\infty$, $\inf B = \min B = 2$. Pas de max.Preuves : Comme B n'est pas majoré, $\sup B = +\infty$.
2 minore B et $2 \in B$ donc $2 = \min B$ d'où $2 = \inf B$.On devine que $\inf C = \min C = -1$ et $\sup C = \max C = 2$. $C = [-4, 0] \cup]1, 2]$. On devine que $\inf C = \min C = -1$ et $\sup C = \max C = 2$.-1 minore C et $-1 \in C$ donc $-1 = \min C$ d'où $-1 = \inf C$
2 majore C et $2 \in C$ donc $2 = \max C$ d'où $2 = \sup C$.

$D = \{ \sin(x); x \in]0; \pi[\}$. On devine que $\sup D = \max D = 1$ et $\inf D = 0$ et pas de min.

54

Preuves: * Comme $1 = \sin(\frac{\pi}{2})$ et $\frac{\pi}{2} \in]0; \pi[$, $1 \in D$. De plus 1 majeure toutes les valeurs de sinus donc 1 majeure D. D'ici $1 = \max D$ et

$$1 = \sup D.$$

* Sur $]0; \pi[$, sin est (str.) priée. Dne 0 minore

D. De plus, comme sinus restreint en 0, et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0$, on a, par composition, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x}) = \sin(0) = 0$. De plus $(\sin(\frac{1}{x}))_{x \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D donc $0 = \inf D$. $0 \notin D$ donc pas de min.

$$E = \{ \sin(\frac{1}{x}); x \in]0; \pi[\}$$

On devine que $\inf E = \min E = -1$

$$\text{et } \sup E = \max E = 1$$

(faire un dessin le graphe de $\sin$ sur $]\pi/2; \pi[$)

Preuves: Comme -1 (resp. 1) minore (resp. majeure) les valeurs de sinus, -1 (resp. 1) minore (resp. majeure) E.

$$\text{De plus, } \frac{2}{\pi} \in]0; \pi[\text{ donc } \sin\left(\frac{1}{2/\pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \in E.$$

$$\text{et } \frac{2}{3\pi} \in]0; \pi[\text{ donc } \sin\left(\frac{1}{2/3\pi}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \in E.$$

$$\text{D'où } -1 = \inf E = \min E \text{ et } 1 = \sup E = \max E.$$

$F = \{ (-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \}$. On devine que $\sup F = \max F = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

et $\inf F = -1$ et pas de min.

$$\text{Preuves: soit } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}.$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq -1 + \frac{1}{n} > -1. \text{ Dne } -1$$

minore F. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} \in F$ et $u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \rightarrow -1$ car $n \rightarrow \infty$.

Donc -1 est limite d'une suite d'éléments de F. Dne $-1 = \inf F$. Par conséquent,

$$\text{donc } -1 \text{ est limite d'une suite d'éléments de F. Dne } -1 + \frac{1}{2p+1} \leq -1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Pour } p \in \mathbb{N}, u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1} \leq -1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \text{ Dne } \frac{3}{2} \text{ majeure F.}$$

$$u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ donc } \frac{3}{2} = \sup F = \max F.$$

$$\text{D'où plus } \frac{3}{2} = u_2 \in F \text{ donc } \frac{3}{2} = \sup F = \max F.$$

Ex. 15.

55

1 - Par tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| \frac{1 + \cos(n)}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Donc, par le th. des gér. armes, $\lim \frac{1 + \cos(n)}{n} = 0$.

2 - Par $n \geq 2$ on a $\frac{1 + \cos(n)}{n} \leq \frac{2}{n} \leq 1$. Comme

$$A \in [0; \frac{\pi}{2}], \quad \cos(1) \geq 0 \text{ donc } \frac{1 + \cos(1)}{2} \geq 1.$$

Donc $1 + \cos(1)$ majore A et $1 + \cos(1) \in A$. D'où

$$1 + \cos(1) = \sup A = \max A.$$

3 - a - Par tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\cos(n)| \leq 1$ donc $\frac{1 + \cos(n)}{n} \geq 0$.

Donc 0 minore A . Par 1, on a limite d'inférieure

d'élé. de A donc $0 = \inf A$.

b - Non. Si A avait un minimum, ce serait $\inf A = 0$, et on aurait $0 \in A$.

De plus, par $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\cos(n) = -1 \Leftrightarrow n \in \pi + 2\pi\mathbb{Z}$$

$$\frac{1 + \cos(n)}{n} = 0 \Leftrightarrow \cos(n) = -1 \Leftrightarrow n = \pi + 2\pi k. \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tq.}$$

Comme π est irrationnel, $(*)$ est fausse donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1 + \cos(n)}{n} \neq 0$$

et $0 \notin A$. Contr.