Suites 8.

Suites récurrentes.

Ex. 16 : Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée tq.

1. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $2u_n \le u_{n-1}+u_{n+1}$. (*)

1a. Pour $p\in\mathbb{N}$, on a, par (*) avec $n=p+2$, $2u_{p+2}\le u_p+u_{p+2}$

donc $u_{p+1}-u_p \le u_{p+2}-u_{p+1} = u_{(p+1)+1}-u_{p+1}$.

Donc $(u_{p+1}-u_p)_p$ est ↗

b- Comme u est bornée, il existe $M\in\mathbb{R}$ tq.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n|\le M$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on a donc $u_n \ge -M$ donc $-u_n \le M$ et $u_{n+1}\le M$ d'où

$u_{n+1}-u_n \le u_{n+1}+M \le 2M$.

c- la suite $(u_{n+1}-u_n)_n$ est ↗ majorée donc converge vers un certain ℓ.

2. a. On suppose $\ell\le 0$. Par le cours, on sait que $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1}-u_n)$.

Donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n \le \ell \le 0$. Donc u est ↘.

b- Comme u est bornée, elle est minorée. Comme u est ↘, elle converge.

3. On suppose $\ell>0$. Erreur d'énoncé : il s'agit de montrer que u est divergente. Supposons que u converge vers $c\in\mathbb{R}$.

Alors la suite $(u_{n+1})_n$ de u converge aussi vers c. Par les opé. sur les limites, $\lim (u_{n+1}-u_n)=0$. Contr avec l'hyp. $\ell>0$. Donc u diverge.

On peut même montrer que $\lim u=+\infty$.

Comme $(u_{n+1}-u_n)_n$ tend vers $\ell>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tq

$n\ge n_0 \Rightarrow u_{n+1}-u_n \ge \frac{\ell}{2}$.

Pour $n \in \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(u_n \geq u_{n_0} + (n-n_0)\frac{\ell}{2}\right)$.
$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$.
Comme $n \geq n_0$, $u_{n+1} - u_n \geq \frac{\ell}{2}$ donc $u_{n+1} \geq u_n + \frac{\ell}{2}$ et
par hyp. de réc. $u_{n+1} \geq u_{n_0} + (n-n_0)\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} = u_{n_0} + (n+1-n_0)\frac{\ell}{2}$.
Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de réc., $\mathcal{P}(n)$ est vraie
pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$.
Comme, pour tout $n \in \mathbb{N} \cap [n_0; +\infty[$,

$$u_n \geq u_{n_0} + (n-n_0)\frac{\ell}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

car $\lim n = +\infty$ et $\frac{\ell}{2} > 0$, on en déduit que $\lim u_n = +\infty$
par comparaison.

Ex 18:

1- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (0 < u_n < v_n)$.
$\mathcal{P}(0)$ est vraie par hyp. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.
Par hyp. de réc. $0 < u_n < v_n$ donc $u_{n+1} > 0$ et $v_{n+1} > 0$.
De plus

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{4u_n v_n - (u_n+v_n)^2}{2(u_n+v_n)} = -\frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{2(u_n+v_n)}$$

$$= -\frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n+v_n)} < 0 \qquad (*)$$

Car $(u_n - v_n)^2 = (v_n - u_n)^2 > 0$,

2- Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n < v_n$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} < 0. \text{ De plus,}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n v_n - (u_n+v_n)u_n}{u_n+v_n} = \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n+v_n} = \underbrace{\frac{u_n}{u_n+v_n}}_{>0}\underbrace{(v_n - u_n)}_{>0} > 0.$$

Donc u str. $\uparrow$ et v str. $\downarrow$.

3- Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $v \downarrow$, $u_n \leq v_0$.
Donc u est majorée donc converge vers

$l_u = \sup u \geq u_0 > 0$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et u est $\uparrow$, on a $u_0 \leq v_n$. Donc v est $\downarrow$ minorée donc cv. vers $l_v = \inf v$. Par passage à la limite dans les inég. $u_0 \leq v_n$, on obtient $0 < u_0 \leq l_v$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a par (*) :

$$2(u_n + v_n)(v_{n+1} - u_{n+1}) = (v_n - u_n)^2.$$

Par passage à la limite $n \to \infty$, on obtient par les opé. sur les limites, sachant que $(v_{n+1})_n$ est une s. suite de v et $(u_{n+1})_n$ une s. suite de u,

$$2(l_u + l_v)(l_v - l_u) = (l_v - l_u)^2$$

soit $$0 = (l_v - l_u)\left[l_v - l_u - 2(l_u + l_v) \right]$$
$$= (l_v - l_u)\underbrace{(-l_v - 3l_u)}_{<0}$$

donc $l_v = l_u$. On pose $l = l_u = l_v$.

on peut retrouver facilement ce résultat en passant à la limite dans les ég. $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$

4. a - Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} v_{n+1} = u_n v_n.$$

Donc, par récu, on a $u_n v_n = u_0 v_0$ pour tout n.

b - Par passage à la limite $n \to \infty$, on a

$$l \times l = u_0 v_0 > 0.$$

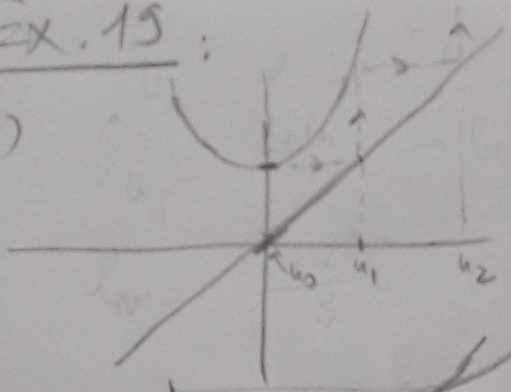
Or $l > 0$ (4.3) donc $l = \sqrt{u_0 v_0}$.

Rq. : si l'on prend, $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$, les suites u et v de rationnels rendent toutes deux vers l'irrationnel $\sqrt{2}$. Ex calculant u_n et v_n pour n assez gd, on peut avoir une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

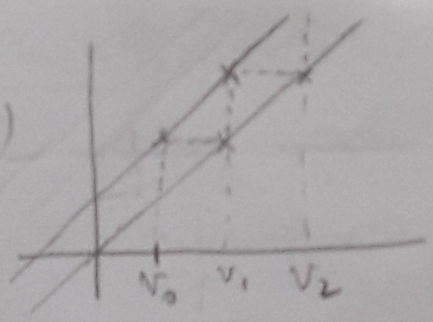
Rq. : l'exercice 17 est très similaire.

Ex. 19 :

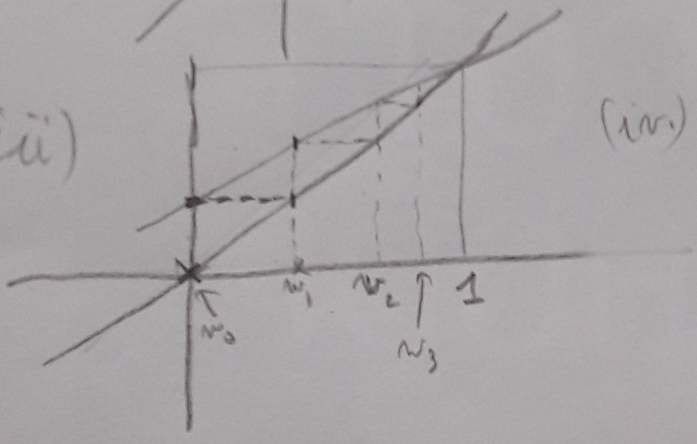
(i)



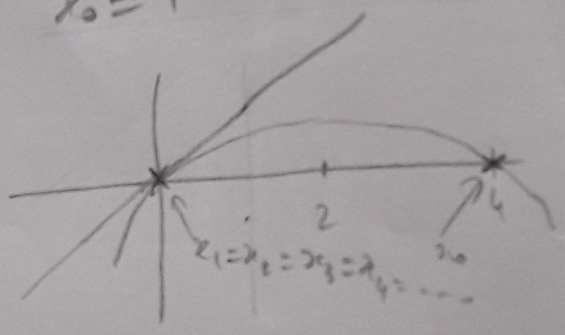
(ii)



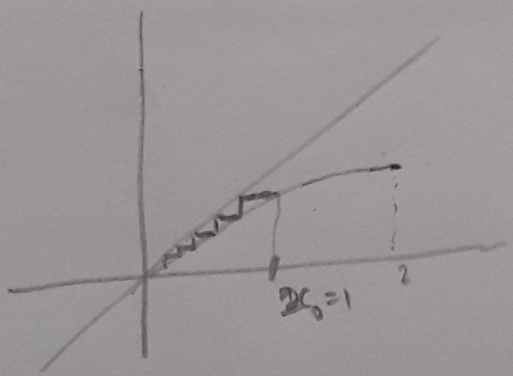
(iii)



(iv) $x_0 = 4$



(iv) $x_0 = 1$



Ex. 20 :

En principe, on devrait vérifier d'abord que les suites sont bien définies (cf. p. 27). On suppose que c'est le cas dans cet exercice.

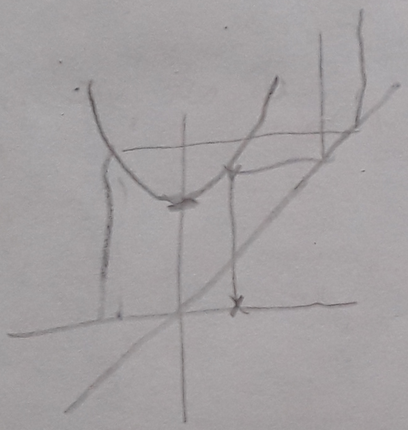
Pour étudier la convergence d'une suite récurrente u déf. par

$$\begin{cases} f : D \to D \quad (D \subset \mathbb{R}), \text{ continue,} \\ u_0 \in D, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

on sait, par le cours, que l'éventuelle limite de u est un point fixe de f (car f est continue).

On cherche donc tous les pts fixes de f et on se débrouille pour trouver parmi eux l'éventuelle limite de u. La toile d'araignée sert essentiellement à deviner ce qui se passe, si u converge et, si oui, vers quoi. Ensuite, on se débrouille pour montrer ce que l'on a deviné.

(i). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2+2$. f est cvx.

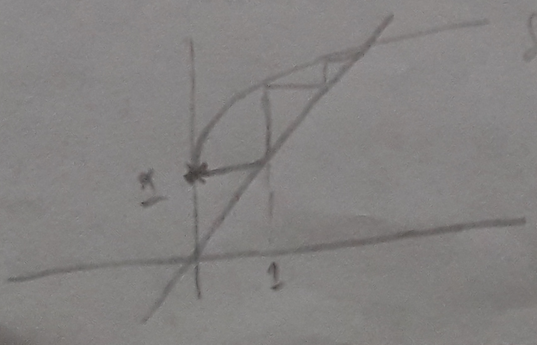


On devine que $\lim u = +\infty$.

On voit aussi
$u_1 = u_0^2+2 \geq 2$.
$u_2 = u_1^2+2 \geq 4+2 = 6$
$u_3 = u_2^2+2 \geq 6^2+2$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n) = (u_n \geq 2^n)$.
On a $u_1 = u_0^2+2 \geq 2 = 2^1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, on a
$u_{n+1} = u_n^2+2 \geq u_n^2 \underset{HR}{\geq} (2^n)^2 = 2^{2n} \geq 2^{n+1}$
car $2n \geq n+1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le Th. de réc.,
$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.
Comme la suite géom. $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$,
on a $\lim u_n = +\infty$ par comparaison.

(ii)



Soit $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1+x}$.
f est cvx.
(Comme $f([0;+\infty[) \subset [1;+\infty[$ la suite est bien définie)

Points fixes de f : on a, pour $x \geq 0$,

$$f(x) = x \iff x = \sqrt{1+x} \iff x^2 = 1+x \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

(car $x \geq 0$!)

$\Delta = 1 + 4 = 5$. D'où

$$f(x) = x \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Comme $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et x est cherché positif, on a

$$f(x) = x \iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Donc f a un seul pt. fixe. On montre que $\lim u_n$ existe et vaut $\ell := \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - \ell = \sqrt{1+u_n} - \ell = \frac{(\sqrt{1+u_n} - \ell)(\sqrt{1+u_n} + \ell)}{\sqrt{1+u_n} + \ell} = \frac{1 + u_n - \ell^2}{\sqrt{1+u_n} + \ell}.$$

or $\ell^2 = 1 + \ell$ donc

$$u_{n+1} - \ell = \frac{1 + u_n - (1+\ell)}{\sqrt{1+u_n} + \ell} = \frac{u_n - \ell}{\sqrt{1+u_n} + \ell}$$

d'où

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{|u_n - \ell|}{\ell}. \quad (*)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = \left(|u_n - \ell| \leq \frac{|u_0 - \ell|}{\ell^n} \right)$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

Par $(*)$, on a

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{|u_n - \ell|}{\ell} \overset{\text{H.R.}}{\leq} \frac{1}{\ell} \frac{|u_0 - \ell|}{\ell^n} = \frac{|u_0 - \ell|}{\ell^{n+1}}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n. Comme $\ell > 1$, $\lim \ell^{-n} = 0$

et on déduit de $S(n)$ (par théorème, que $\lim u$ existe et vaut l, par le th. des gendarmes.

Ex. 21.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x e^{\frac{2-x}{4}}$. $f \in C^1$.

1-a- On a, pour $x \geq 0$,

$f(x) = x \iff x\left(e^{\frac{2-x}{4}} - 1\right) = 0 \iff \left(x = 0 \text{ ou } e^{\frac{2-x}{4}} = 1\right)$

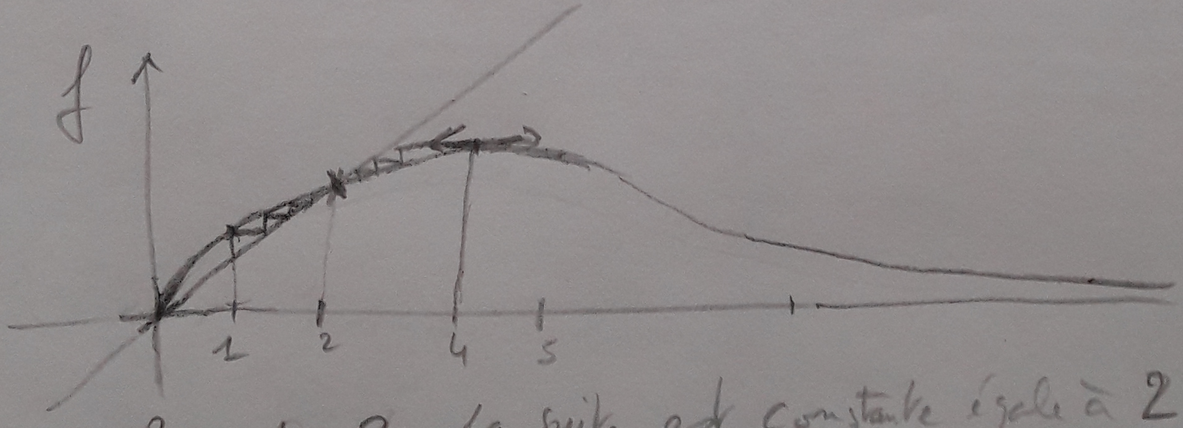
$\iff \left(x = 0 \text{ ou } \frac{2-x}{4} = 0\right) \iff (x = 0 \text{ ou } x = 2)$.

b- Pour $x \geq 0$, $f'(x) = e^{\frac{2-x}{4}}\left(1 + x \times \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \frac{4-x}{4} e^{\frac{2-x}{4}}$.

Donc

x	0		4		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$4e^{-1/2}$	↘	0

Pour $x > 1$, on a $x e^{\frac{2-x}{4}} = 4e^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{4}} \to 0$ ($x \to +\infty$) par croissance comparée.



2- Pour $u_0 = 2$, la suite est constante égale à 2.

Pour $u_0 = 5$, la suite d'araignée est similaire à celle pour $u_0 = 4$ et "tend vers 2 en décroissant"

Pour $u_0 = 5$, pour $u_0 = 1$ et "tend" vers 2 en "croissant".

3-a- D'après le tableau de variations de f, on a

$$f([0;4]) \subset [0; f(4)] = [0; 4e^{-1/2}] \subset [0;4]. \quad (*)$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (0 \leq u_n \leq 4)$.

$\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a donc $u_n \in [0;4]$. Par $(*)$,

$$u_{n+1} = f(u_n) \in [0;4].$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de récur., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

b. etc. On a $f(1) = e^{\frac{1}{4}} > 1$ car $\frac{1}{4} \geq 0$.

La fonction $g : [0;4] \ni x \longmapsto f(x) - x$ est cont.

Par 1.a. on sait que $g(0) = g(2) = 0$. On montre que g est str. positive sur $]0;2[$.

S'il existait $y \in]0;2[$ t.q. $g(y) \leq 0$ alors, comme $g(1) > 0$ et g cont., il existerait c entre y et 1 t.q. $g(c) = 0$. g aurait un zéro donc $]0;2[$, Contr. avec 1-a. Donc $g(y) > 0$ pour tout $y \in]0;2[$.

On montre que g est str. négative sur $]2;4]$.

S'il existait un $y \in]2;4]$ t.q. $g(y) \geq 0$ alors $y \neq 4$ car $g(4) = 4(e^{-1/2} - 1) < 0$ et, comme g est cont., il existerait un d entre y et 4 t.q. $g(d) = 0$. g aurait donc un zéro dans $]2;4[$. Contr. avec 1-a. Donc $g(y) < 0$, pour tout $y \in]2;4]$.

Rq : on peut retrouver ces propriétés en étudiant la fonct. g.

Cas : $0 < u_0 < 2$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $Q(n) = (0 < u_n < u_{n+1} < 2)$.

Comme f est str. ↑ sur $[0;2]$, $f(]0;2[) \subset I f(0); f(1) [=]0;2[$

Comme $u_0 \in]0;2[$, $u_1 \in]0;2[$. Donc $Q(0)$ est vraie.

Supp. $Q(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$. On a alors

$0 < u_n < u_{n+1} < 2$.

Comme f est str. ↑ sur $]0,2[$ à valeurs dans $]0,2[$, on a

$0 < f(u_n) < f(u_{n+1}) < 2$ soit $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 2$.

Donc $Q(n+1)$ est vraie. Par le Th. de récu., Q est vraie pour tout n.

Comme u est ↑ et majorée par 2, elle converge vers $\ell = \sup u > u_0$. Comme f est cont., ℓ doit être un pt. fixe de f. Par 1.a., on a nécessairement $\ell = 2$.

Cas : $2 < u_0 < 4$.

En utilisant le fait que f est str. ↑ sur $I2;4]$, on a $f(]2;4[) \subset]f(2); f(4) [=]2; 4e^{-\frac{1}{2}} [\subset]2;4[$.

Par une récurrence similaire à celle sur Q, on a

$\forall n \in \mathbb{N}$, $2 < u_{n+1} < u_n < 4$.

Comme u ↓ et est minorée par 2, elle cv. vers un certain ℓ. Par passage à la limite $n \to \infty$ dans les inégalités : $u_n \geq 2$ pour tout n, on obtient $\ell \geq 2$. Comme f est cont., ℓ doit être un pt. fixe de f. Par 1.a. on a nécessairement $\ell = 2$.

4- a- On a, par 1.b,
$f(]4;+\infty[) \subset]0;f(4)[=]0;4e^{-\frac{1}{2}}[\subset]0;4[$.
Donc, comme $u_0 \in]4;+\infty[$ par hyp., $u_2 \in]0;4[$.
b- Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récur. déf. par

$$\begin{cases} v_0 = u_2 \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = f(v_n). \end{cases}$$

Or, par récur., $u_n = v_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1er cas : $u_2 = 2$. Alors v est la suite constante égale à 2 donc cv. vers 2.

2ème cas : $u_2 \neq 2$. Par 3.c., $\lim v = 2$.

Donc par composition, $\lim u = 2$.

Ex. 22 : Soit $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.

(Comme $f(]0;+\infty[) \subset]1;+\infty[\subset]0;+\infty[$, la suite est bien définie.)

1- Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n) = (1 \leq u_n \leq 2)$.
Comme $u_0 = 1$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.
Donc $1 \leq u_n \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{u_n} \leq 1$ donc $1 + \frac{1}{2} \leq u_{n+1} = f(u_n) \leq 1 + 1$
donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le Th. de récur.,
$\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

2.a- On a, pour $x > 0$,
$f(x) = x \iff x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$.
$\Delta = 1 + 4 = 5$ Donc

$f(x)=x \iff x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

or $1-\frac{\sqrt{5}}{2}<0$ donc on a :

$f(x)=x \iff x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

f a donc un unique point fixe $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b- Soit $x>0$ et $y>0$. On a

$$f(y)-f(x)=1+\frac{1}{y}-\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{x-y}{xy}.$$

c- Soit $n\in\mathbb{N}$. On a, comme $f(\ell)=\ell$, et par b.,

$$|u_{n+1}-\ell|=|f(u_n)-f(\ell)| \leq \frac{|u_n-\ell|}{|u_n\ell|} \leq \frac{|u_n-\ell|}{|\ell|}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}|u_n-\ell|.$$

car $|u_n|=u_n\geq 1$ par 1.

d- Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $Q(n)=\left(|u_n-\ell|=\frac{|u_0-\ell|}{\ell^n}\right)$.

$Q(0)$ est vraie. Supp. $Q(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}$. On a alors, par c. et l'hyp. de récu.,

$$|u_{n+1}-\ell| \leq \frac{|u_n-\ell|}{\ell} \leq \frac{1}{\ell}\times\frac{|u_0-\ell|}{\ell^n}=\frac{|u_0-\ell|}{\ell^{n+1}}.$$

Donc $Q(n+1)$ est vraie. Par le th. de récu., $Q(n)$ est vraie pour tout n, i.e.,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n-\ell|\leq\frac{|u_0-\ell|}{\ell^n}.$$

Comme $\ell=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$ (car $5>1$), $\lim \ell^{-n}=0$ et, par le th. des gendarmes, $\lim u=\ell$.

Ex. 23 :

1- f est C^1 et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{1}{2(1+x^2)}.$$

Comme $1+x^2\geq 1$, $0\leq f'(x)\leq\frac{1}{2}$. Donc $|f'(x)|=f'(x)\leq\frac{1}{2}$.

2- (u est bien déf. car f est déf. sur $\mathbb{R}$).

a - On remarque $f(0)=0$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a, comme f est C^1, l'existence d'un $c_n\in]0;u_n[$ tq.

$$f(u_n)-f(0)=(u_n-0)f'(c_n)$$

par le th. des ↑ finis. Donc, par 1.,

$$|u_{n+1}|=|f(u_{n+1})|=|f(u_{n+1})-f(0)|=|u_n-0|\times|f'(c_n)|\leq\frac{|u_n|}{2}.$$

b - Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)=\left(|u_n|\leq\frac{|u_0|}{2^n}\right)$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $2^0=1$. Supp. $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n\in\mathbb{N}$. Par 2.a. on a

$$|u_{n+1}|\leq\frac{|u_n|}{2}\underset{\text{H.R.}}{\leq}\frac{1}{2}\times\frac{|u_0|}{2^n}=\frac{|u_0|}{2^{n+1}}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par le th. de réc., $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

c. Comme $2>1$, $\lim 2^n=+\infty$ et $\lim 2^{-1}=0$. Par 2.b, on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_n|\leq\frac{|u_0|}{2^n}$$

donc, par le th. des gendarmes, $\lim|u_n|=0$.

Par le cours, $\lim u_n=0$.