

Suites de Cauchy, sous-suites.

Un résultat bien connu dit qu'une suite (réelle ou complexe) est convergente (i.e. : une limite dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si et seulement si elle est de Cauchy.

Voyons un exemple où l'implication " $\Leftarrow$ " est utile.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. On va montrer que $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en montrant qu'elle est de Cauchy. On montre donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on remarque d'abord que

$$u_{n+p} - u_n = \sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2},$$

puis que, pour $k \in [n+1; n+p] \cap \mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}. \text{ Donc}$$

$$|u_{n+p} - u_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \sum_{l=n}^{n+p-1} \frac{1}{l} - \sum_{l=n+1}^{n+p} \frac{1}{l} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$. On a $N > \frac{1}{\varepsilon}$ donc $\varepsilon > \frac{1}{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, on a donc

$$|u_{n+p} - u_n| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

u est donc bien une suite de Cauchy. Elle converge donc.

On note que cette preuve ne donne aucune idée de la limite de u .

Ex. 25 : un exemple de suite qui n'est pas de Cauchy (donc divergente).

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{(2l-1)^2} + \sum_{l=1}^n \frac{1}{(2l)^2} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{(2l-1)^2} + \sum_{l=1}^n \frac{1}{4l^2} = \sum_{l=1}^n \frac{1}{(2l-1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^n \frac{1}{l^2}.$$

169

Donc $S_{2n} - S_n = \sum_{l=1}^{2n} \frac{1}{2l-1} - \sum_{l=1}^n \frac{1}{2l-1} = \sum_{l=1}^{2n} \left(\frac{1}{2l-1} - \frac{1}{2l} \right) \geq \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

2 - Si (S_n) était de Cauchy, on aurait

$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}: \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq n, (n \geq N \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon)$.

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on aurait un $N \in \mathbb{N}$ tel $\forall n, p \geq n \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \frac{1}{2}$.

$$(n \geq N \Rightarrow |S_{n+p} - S_n| < \frac{1}{2}).$$

Contradiction avec 1- car $p = n \geq N$. Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de

Cauchy.

Rq: on aurait pu aussi argumenter de la façon suivante.

Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ était de Cauchy, elle convergerait vers un certain

$l \in \mathbb{R}$. Comme $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une s.suite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, elle convergerait

aussi vers l . On pourrait donc passer à la limite $n \rightarrow \infty$

dans les inégalités du 1 et on obtiendrait $0 = l - l \geq \frac{1}{2}$. Contr.

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas de Cauchy.

3 - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1} \geq S_n$.

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $\uparrow$. Elle tend donc vers $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} S_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Par 2, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas donc $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} S_n = +\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Ex. 24 modifié!

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente (ou de Cauchy)

telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que u est stationnaire (i.e. constante à partir d'un certain rang).

Deux preuves:

* en utilisant la convergence.

Soit $\ell = \lim u_n$. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}; (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. pour $n \geq N$ on ait $|u_n - \ell| < \frac{1}{2}$.

Dans l'intervalle $]\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}[$, il y a exactement un entier p .

Comme, pour $n \geq N$, $u_n \in]\ell - \frac{1}{2}; \ell + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z}$, $u_n = p$.

Il est donc constant égale à p à partir du rang N .

* en utilisant la propriété de Cauchy.

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n \geq N \Rightarrow |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon).$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ t.q. pour $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$ on ait

$$|u_{n+p} - u_n| < \frac{1}{2}. \text{ Donc, pour tout } p \in \mathbb{N}, |u_{N+p} - u_N| < \frac{1}{2}$$

On en conclut $u_{N+p} \in]u_N - \frac{1}{2}; u_N + \frac{1}{2}[$. Dans l'intervalle

$$]u_N - \frac{1}{2}; u_N + \frac{1}{2}[$$
, il y a exactement un entier et c'est u_N .

Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_{N+p} \in]u_N - \frac{1}{2}; u_N + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z}$, $u_{N+p} = u_N$.

Donc il est constant égale à u_N à partir du rang N .

Ex. 26. Soit $a = (u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$.

(i). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (2n+1)^2 = a_{2n+1}$.

Comme l'appl. $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est str. $\uparrow$, u est une sous-suite

de a .

(ii). On sait que $\lim a_n = +\infty$. Si v était une sous-suite

de a , on aurait par le cours, $\lim v = +\infty$. En particulier,

v ne peut pas majorer. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 9$.

Contr. Donc v n'est pas une sous-suite de a .

(iii). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = (2n-3)^2$. Si w était une sous-suite

de a , il existerait $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ str. $\uparrow$ t.q. pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{\varphi(n)} = w_n.$$

En particulier, on aurait $\varphi(0) < \varphi(1)$ et comme a est str. $\uparrow$, $a_{\varphi(0)} < a_{\varphi(1)}$ donc $w_0 < w_1$.

Or $w_0 = 9 > 1 = w_1$, contr.

En revanche la suite $\tilde{w} = (w_n)_{n \geq 2}$ est une sous-suite de a . Or $\tilde{w} = (w_{p+2})_{p \in \mathbb{N}}$ soit $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $p \mapsto 2(p+2) - 3 = 2p+1$.

Elle est str. $\uparrow$. De plus, pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\tilde{w}_p = w_{p+2} = (2(p+2) - 3)^2 = (\varphi(p))^2 = a_{\varphi(p)}.$$

(iv). Si x était une sous-suite de a , il existerait $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ str. $\uparrow$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{\varphi(n)} = x_n$.

Donc, pour n pair, on aurait $a_{\varphi(n)} = x_n = n^2$ et

$$a_{\varphi(n+1)} = x_{n+1} = (n+1-1)^2 = n^2 \text{ donc } a_{\varphi(n)} = a_{\varphi(n+1)}. \text{ Or}$$

a est str. $\uparrow$ donc on aurait $\varphi(n) = \varphi(n+1)$. Cela contredirait la stricte $\uparrow$ de φ . Donc x n'est pas une sous-suite de a .

Ex. 27. : on a utilisé dans l'exercice 17 de la feuille supplémentaire de calculs la propriété suivante, pour une suite réelle u et $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$:

Si $\lim u_n = l$ et $\lim u_{n+1} = l$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ existe et vaut l .

On va la démontrer ici.

Par hyp., on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon) \quad (*)$$

$$\text{or } \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow |u_{n+1} - l| < \varepsilon). \quad (**)$$

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $N = \max(N_0, 2N_1 + 1)$. Pour tout n

avec $n \geq N$, on a, si n est pair, $n = 2p$ avec $p \geq N_0$ donc

$$\text{par } (*), |u_n - l| = |u_{2p} - l| < \varepsilon \text{ et si } n \text{ est impair, } n = 2p+1 \text{ avec}$$

$$p \geq N_1 \text{ donc } |u_n - l| = |u_{2p+1} - l| < \varepsilon \text{ par } (**). \text{ On a montré:}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

On a donc bien démontré que $\lim u_n$ existe et vaut l .

La réciproque

$$\lim u_n = l \implies \left(\lim u_n = l \text{ et } \lim u_{2p+1} = l \right)$$

de conclure d'un résultat du cours.

Redémontrons cette réciproque dans le cas $l \in \mathbb{Q}$.

On sup. que $\lim u_n = l$ et $l \in \mathbb{Q}$. On a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \implies |u_n - l| < \varepsilon), \quad (***)$$

On montre

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_0 \implies |u_{2p} - l| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par (***), il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. pour $n \geq N$

$$\text{on a } |u_n - l| < \varepsilon. \text{ On choisit } N_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } N_0 \geq N.$$

$$\text{Par } p \in \mathbb{N} \text{ avec } p \geq N_0, \text{ on a } p \geq N_0 > \frac{N}{2} \text{ donc } 2p \geq N$$

$$\text{d'où } |u_{2p} - l| < \varepsilon.$$

On montre

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq N_1 \implies |u_{2p+1} - l| < \varepsilon).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par (***), il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. pour $n \geq N$

$$\text{on a } |u_n - l| < \varepsilon. \text{ On choisit } N_1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } N_1 \geq N.$$

$$\text{avec } p \geq N_1, \text{ on a } p \geq N_1 > \frac{N}{2} \text{ donc } 2p+1 \geq N \text{ d'où}$$

$$|u_{2p+1} - l| < \varepsilon.$$

On traite maintenant l'exercice 27.

On traite maintenant l'exercice 27.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe

$$l_0, l_1 \text{ et } l_2 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ t.q. } l_0 = \lim u_{2n}, l_1 = \lim u_{2n+1} \text{ et}$$

$$l_2 = \lim u_{3n}.$$

$$1 - \text{Soit } v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ou } v = (v_{6n+3n})_{n \in \mathbb{N}}.$$

$$\text{Soit } v_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ et } v_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \text{ telles que } v_n = u_{2n} \text{ et } v_{n+1} = u_{2n+1}.$$

$$\text{On a } v_0 = u_{2n} \text{ et } v_1 = u_{2n+1} \text{ et } v_2 = u_{3n}.$$

$$\text{On a } v_0 = u_{2n} \text{ et } v_1 = u_{2n+1} \text{ et } v_2 = u_{3n} \text{ et } v_3 = u_{3n+1}.$$

$$\text{On a } v_0 = u_{2n} \text{ et } v_1 = u_{2n+1} \text{ et } v_2 = u_{3n} \text{ et } v_3 = u_{3n+1} \text{ et } v_4 = u_{3n+2}.$$

$$\text{On a } v_0 = u_{2n} \text{ et } v_1 = u_{2n+1} \text{ et } v_2 = u_{3n} \text{ et } v_3 = u_{3n+1} \text{ et } v_4 = u_{3n+2} \text{ et } v_5 = u_{3n+3}.$$

Comme $l_2 = \lim u_{3n}$ existe, on a, par le cours,

$$\lim v = l_2 = \lim w =: l.$$

2- Pour $\varphi_3: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui est str. $\uparrow$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \mapsto 3n$

$$v_n = u_{6n} = u_{2\varphi_3(n)} \quad \text{dne } v \text{ est une sous-suite de } (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Comme $l_2 = \lim u_{2n}$ existe, on a, par le cours,

$$\lim v = l_2. \quad \text{Par unicité de la limite, } l_2 = l \text{ et}$$

$$\lim u_{2n} = l. \quad \text{On a aussi } \lim u_{2n+1} = l.$$

$$\text{Soit } \varphi_4: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto 3n+1$$

$n \in \mathbb{N}$, on a

$$2\varphi(n)+1 = 2(3n+1)+1 = 6n+3$$

dne

$$w_n = u_{2\varphi(n)+1}$$

et w est une sous-suite de $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Comme

$$l_2 = \lim u_{2n+1} \text{ existe, on a, par le cours, } \lim w = l_2.$$

$$\text{D'où } l_1 = l \text{ et } \lim u_{2n+1} = l.$$

3- D'après la preuve en préambule de l'exercice,

$$\text{on fait que } \lim u_{2n} = l = \lim u_{2n+1} \text{ implique}$$

que $\lim u$ existe et vaut l .