Intégrales le long d'un chemin et holomorphie.

On **admet provisoirement** que la fonction exponentielle exp est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et que sa $\mathbb{C}$-dérivée est elle-même.

Exercice 24. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\psi : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$.

1. Soit $t_0 \in [a;b]$. Montrer que ψ est dérivable en t_0 si et seulement si $\operatorname{Re}\psi$ et $\operatorname{Im}\psi$ le sont. Montrer que, dans ce cas, $\psi'(t_0) = (\operatorname{Re}\psi)'(t_0) + i(\operatorname{Im}\psi)'(t_0)$.
2. Montrer que ψ est C^1 si et seulement si $\operatorname{Re}\psi$ et $\operatorname{Im}\psi$ le sont.

Exercice 25. : Soit $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$. Soit $\psi_{z_1;z_2} : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$\psi_{z_1;z_2}(t) \;=\; tz_2 \,+\, (1-t)z_1 \,.$$

Montrer que $\psi_{z_1;z_2}$ est C^1, que sa dérivée est constante égale à $z_2 - z_1$ et que son image est le segment $[z_1;z_2]$.

Exercice 26. : On considère les fonctions suivantes :

$$\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(it) \end{array}, \qquad \gamma_2 : \begin{array}{ccc} [-2\pi;0] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(it) \end{array},$$

$$\gamma_3 : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(2i\pi t) \end{array}, \qquad \gamma_4 : \begin{array}{ccc} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(2it) \end{array},$$

$$\gamma_5 : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(6i\pi t) \end{array}, \qquad \gamma_6 : \begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(2it) \end{array},$$

$$\gamma_7 : \begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(-it) \end{array}, \qquad \gamma_8 : \begin{array}{ccc} [-\sqrt{2\pi};\sqrt{2\pi}] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(it^2) \end{array}.$$

On note par $\mathcal{U}$ le cercle unité centré en 0 de $\mathbb{C}$: $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$.

1. Montrer que, pour $j \in [\![1;8]\!]$, l'image de γ_j est égale à $\mathcal{U}$.
2. Vérifier que γ_1, γ_2, γ_3, γ_5 et γ_6 parcourent $\mathcal{U}$ dans le sens trigonométrique positif.
3. La courbe paramétrée γ_7 parcourt-t-elle $\mathcal{U}$ dans le sens trigonométrique positif ? dans le sens trigonométrique négatif ?

4. Même questions pour la courbe paramétrée γ_8.

Exercice 27. : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ un chemin. Montrer que

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \right| \;\leq\; L(\gamma) \cdot \sup_{t\in[a;b]} \left| f\big(\gamma(t)\big) \right| \;=\; L(\gamma) \cdot \sup_{z\in\gamma([a;b])} |f(z)| \,.$$

(Indication : on pourra utiliser l'exercice 20.)

Exercice 28. : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Soit $(a_1;b_1;a_2;b_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$. Soit $\gamma_1 : [a_1;b_1] \longrightarrow \Omega$ et $\gamma_2 : [a_2;b_2] \longrightarrow \Omega$ deux chemins, c'est-à-dire des applications continues et C^1 par morceaux.

1. On suppose γ_2 est C^1. Soit $\varphi : [a_1;b_1] \longrightarrow [a_2;b_2]$ bijective et C^1. On pose $\psi = \gamma_2 \circ \varphi$ (qui est aussi un chemin C^1). Montrer que

$$\int_\psi f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\varphi(a_1)}^{\varphi(b_1)} f\big(\gamma_2(s)\big)\,\gamma_2'(s)\,\mathrm{d}s \,.$$

2. Vérifier que le résultat du 1 est encore valable si γ_2 est seulement C^1 par morceaux. (Indication : on pourra utiliser l'exercice 20.)

3. On suppose que γ_1 est équivalent à γ_2. Montrer que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \,.$$

4. On suppose que γ_1 est opposé à γ_2. Montrer que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; -\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z \,.$$

5. On suppose γ_1 équivalent ou opposé à γ_2. Montrer que $L(\gamma_1) \;=\; L(\gamma_2)$.

6. On suppose que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccll} \gamma & : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \longmapsto & \gamma_1\big((1-2t)a_1 + 2tb_1\big) \quad \text{si } t \leq (1/2)\,, \\ & & & & \gamma_2\big(2(1-t)a_2 + (2t-1)b_2\big) \quad \text{si } t > (1/2)\,. \end{array}$$

   Par définition, γ est la concaténation de γ_1 et γ_2 (dans cet ordre), notée $\gamma_1 \mathring{+} \gamma_2$. Montrer que γ est un chemin.
   (Indication : on pourra utiliser l'exercice 20.)

7. Montrer que
$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z \;+\; \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

8. On suppose que $\gamma_1(b_1) = \gamma_1(a_1)$. On construit par récurrence une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de chemins fermés vérifiant : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_{n+1} = \gamma_n \overset{\circ}{+} \gamma_1$. Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\,, \quad \int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; n \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Exercice 29. : On considère les courbes paramétrées :

$$\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ t & \mapsto & \exp(it)\,, \end{array} \qquad \gamma_2 : \begin{array}{ccl} [0;\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ t & \mapsto & \exp(it)\,,\ \text{si } t \le (\pi/2)\,, \\ & & \frac{2}{\pi}(1-i)t + 2i - 1\,,\ \text{si } t > (\pi/2)\,. \end{array}$$

Soit $\gamma_3 : [-\pi;\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $\gamma_3(t) = \exp(-it)$.

1. Montrer que γ_1 et γ_2 sont continus, C^1 par morceaux, simples et fermés (ce sont donc des lacets). Vérifier qu'ils ont les même extrémités, c'est-à-dire que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_1(2\pi) = \gamma_2(\pi)$.

2. Calculer explicitement les intégrales
$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z}\,.$$

3. Vérifier que les intégrales
$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_3} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$
sont opposées.

4. Vérifier que γ_3 est opposé à γ_1.
D'après le cours, ceci redonne le résultat du 3.

5. Soit $\gamma_4 : [2\pi;4\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma_4(t) = \exp(-it)$. Soit $\Gamma : [0;4\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ la concaténation de γ_1 et γ_4. Montrer que
$$\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} \;=\; 0\,.$$

6. Comparer les quantités réelles
$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z}\right| \quad \text{et} \quad L(\gamma_1) \;\cdot\; \sup_{z\in\gamma_1([0;2\pi])} \left|\frac{1}{z}\right|\,,$$
où $L(\gamma_1)$ désigne la longueur de γ_1.

Exercice 30. : On considère les courbes paramétrées

$$\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & ti+1-t \end{array}, \qquad \gamma_2 : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -t+(1-t)i \end{array},$$

$$\gamma_3 : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & -ti-(1-t) \end{array}, \qquad \gamma_4 : \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t-i(1-t) \end{array},$$

Soit γ la concaténation des chemins γ_1, γ_2, γ_3 et γ_4, dans cet ordre.

1. Pour $j \in [\![1;4]\!]$, déterminer explicitement

$$\int_{\gamma_j} \exp(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

2. En déduire que

$$\int_{\gamma} \exp(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,.$$

Exercice 31. : On considère les courbes paramétrées suivantes :

$$\gamma_1 : \begin{array}{ccc} [0;2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(it) \end{array}, \qquad \gamma_2 : \begin{array}{ccc} [-\pi/2;\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(it) \end{array},$$

$$\gamma_3 : \begin{array}{ccc} [0;3\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \exp(it) \end{array}, \qquad \gamma_4 : \begin{array}{ccc} [-\pi/2;\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & i\,+\,\gamma_2(t)^2 \end{array}.$$

Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\cos(z) \;=\; \frac{\exp(iz)\;+\;\exp(-iz)}{2} \quad \text{et} \quad \sin(z) \;=\; \frac{\exp(iz)\;-\;\exp(-iz)}{2i}\,.$$

1. Vérifier que cos et sin sont holomorphes sur $\mathbb{C}$. Déterminer leur dérivée.

2. Calculer les intégrales

$$\int_{\gamma_1} \cos(z)\,\mathrm{d}z\,, \quad \int_{\gamma_2} \cos(z)\,\mathrm{d}z \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_3} \cos(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

3. Vérifier que γ_4 est de classe C^1. Déterminer $\gamma_4(-\pi/2)$ et $\gamma_4(\pi/2)$.

4. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma_4} \cos(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Exercice 32. : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1_h. Soit $\gamma : [0;1] \longrightarrow \Omega$ un chemin. Montrer que

$$\int_\gamma f'(z)\, g(z)\, \mathrm{d}z \;= f\big(\gamma(1)\big)\, g\big(\gamma(1)\big) \;-\; f\big(\gamma(0)\big)\, g\big(\gamma(0)\big) \;-\; \int_\gamma f(z)\, g'(z)\, \mathrm{d}z\,.$$

(Indication : on pourra utiliser l'exercice 20.)

Exercice 33. : Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ et $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphes en z_0 telles que $f(z_0) = g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$. Montrer que f/g tend, quand $z \to z_0$, vers $f'(z_0)/g'(z_0)$.
Application : montrer l'existence et déterminer

$$\lim_{z \to i} \frac{z^{12} \,+\, 2z^2 \,+\, 1}{z^8 \,-\, 1}\,.$$

Exercice 34. : Montrer que la conjugaison $\bar{\cdot}$ et les fonctions partie réelle Re et partie imaginaire Im sont $\mathbb{R}$-linéaires mais pas $\mathbb{C}$-linéaires. Donner la matrice dans la base canonique $(1; i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de chacune d'elles. En déduire qu'elles sont nulle part holomorphes.

Exercice 35. : Soit $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x; y) = x^2 - y^2 + 1 + 2ixy$ et $g(x; y) = x^2 + y^2 + 1 + 2ixy$.

1. Montrer que $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Re}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g$ sont C^1.
2. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
3. La fonction g est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$?

Exercice 36. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \mathrm{Re}\,(z) + i(\mathrm{Im}\,(z))^2$.

1. Montrer que f est C^1. Déterminer sa différentielle.
2. Existe-t-il un ouvert non vide Ω de $\mathbb{C}$ sur lequel f est holomorphe ?

Exercice 37. : Soit $\mathbb{R}^- := \{z \in \mathbb{C}\,; \mathrm{Re}\,(z) \leq 0\,, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$ et $\Omega := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. On considère les fonctions $r : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par

$$r(x; y) \;:=\; \sqrt{x^2 \,+\, y^2}\,, \quad g(x; y) \;:=\; x \,+\, r(x; y)\,, \quad h(x; y) \;:=\; \frac{y}{g(x; y)}$$

$$\text{et} \quad L(x; y) \;:=\; \ln\big(r(x; y)\big) \,+\, 2i\,\mathrm{Arctan}\,\big(h(x; y)\big)$$

1. Montrer que r et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$.
   En particulier, h et L sont bien définies.

2. Montrer que r, g et h sont de classe C^1 et déterminer leurs dérivées partielles premières.

3. En déduire que L est C^1. Montrer que L vérifie les identités de Cauchy-Riemann.
   Par le cours, L est holomorphe.

4. Soit $B := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Im}\,(z) \in]-\pi;\pi[\}$. Montrer que $\exp \circ L = \mathrm{Id}_\Omega$ et $L \circ \exp = \mathrm{Id}_B$.
   (Indication : on pourra utiliser l'exercice 9).

On verra dans le cours que L est en fait le logarithme principal Log.

Exercice 38. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiable. Soit $P = \mathrm{Re}\, f$ et $Q = \mathrm{Im}\, f$. On rappelle que l'on a posé

$$\frac{\partial f}{\partial x} := \frac{\partial P}{\partial x} + i\,\frac{\partial Q}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} := \frac{\partial P}{\partial y} + i\,\frac{\partial Q}{\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\,.$$

1. Déterminer $\partial f/\partial z$ et $\partial f/\partial \overline{z}$ pour $f \in \{f_1; f_2; f_3; f_4\}$, où $f_1(z) = z$, $f_2(z) = \overline{z}$, $f_3(z) = z^2$ et $f_4(z) = \overline{z}^2$.

2. Soit $g, h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ différentiables. Exprimer $\partial(gh)/\partial z$ et $\partial(gh)/\partial \overline{z}$ en fonction de $\partial g/\partial z$, $\partial g/\partial \overline{z}$, $\partial h/\partial z$ et $\partial h/\partial \overline{z}$.

3. Pour $(m;n) \in \mathbb{N}^2$, soit $f_{m;n} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f_{m;n}(z) = z^m\, \overline{z}^n$. Donner une expression de $\partial f_{m;n}/\partial z$ et de $\partial f_{m;n}/\partial \overline{z}$.

4. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Montrer que P et Q sont des polynômes en $(x;y)$ si et seulement si f est un polynôme de z.

Exercice 39. : Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ et $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $P(x;y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

1. On suppose qu'il existe une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $P = \mathrm{Re}\, f$.
   Montrer que $c = -a$.

2. On suppose que $c = -a$. Trouver toutes les fonctions holomorphes $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $P = \mathrm{Re}\, f$.

Exercice 40. : Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $P = \mathrm{Re}\, f$ et $Q = \mathrm{Im}\, f$. On suppose qu'il existe $(a;b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0;0)\})$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que $aP + bQ + c = 0$ sur Ω. Montrer que f est constante.

Exercice 41. : Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit $P = \mathrm{Re}\, f$ et $Q = \mathrm{Im}\, f$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a). f est constante.

b). P est constante.

c). Q est constante.

d). $\overline{f}$ est holomorphe.

e). $|f|$ est holomorphe.

(Indication : on pourra montrer que chaque propriété est équivalente à la propriété a).)
Remarque : si f est à valeurs réelles alors Q est nulle donc constante et, par les équivalences, f est constante.

Exercice 42. : On pourra utiliser les résultats de l'exercice 41.
Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{C}$ et soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes.

1. On suppose que f ne s'annule pas et que, pour tout $z \in \Omega$, $|f(z)| = |g(z)|$. Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in \Omega$, $g(z) = \exp(i\theta) f(z)$.
2. On suppose que f ne s'annule pas et que, pour tout $z \in \Omega$, $f(z)\overline{g(z)} \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $z \in \Omega$, $g(z) = c f(z)$.

Exercice 43. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorphe. Soit $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ et $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par $g(z) = \overline{z}$ et $h(z) = \overline{f(\overline{z})}$. On a vu dans l'exercice 34 que g est nulle part holomorphe.

1. Montrer que g et h sont continues sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que g et h sont différentiables sur $\mathbb{C}$.
3. Montrer que h est holomorphe.

Exercice 44. : Longueur d'une courbe paramétrée continue.
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On note par $\mathcal{I}$ l'image $\gamma([a; b])$ de γ. On définit ici une notion de longueur pour γ et on envisage une notion similaire pour $\mathcal{I}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle subdivision de $[a; b]$ de taille n toute suite strictement croissante $\sigma := (\sigma_j)_{0 \leq j \leq n}$ de réels telle que $a = \sigma_0$ et $b = \sigma_n$. On note par $\mathcal{S}_n$ l'ensemble de telles subdivisions. On pose

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{S}_n ,$$

c'est l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a;b]$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle ligne brisée portée par $\mathcal{I}$ à n morceaux de subdivision σ la famille $\mathcal{P} = (\gamma(\sigma_j))_{j\in[\![0;n]\!]}$ de points de $\mathcal{I}$. Pour une telle famille $\mathcal{P}$, le morceau d'incide j, avec $j \in [\![1;n]\!]$, de $\mathcal{P}$ est le segment complexe reliant $\gamma(\sigma_{j-1})$ à $\gamma(\sigma_j)$. La longueur de ce segment est

$$\left|\gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1})\right| \geq 0 .$$

La longueur d'une ligne brisée portée par $\mathcal{I}$ à n morceaux de subdivision $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est, par définition, la somme des longueurs de ces morceaux, c'est-à-dire

$$L(\sigma) := \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma(\sigma_j) - \gamma(\sigma_{j-1})\right| \geq 0 .$$

On définit la longueur $L(\gamma)$ de γ par $L(\gamma) := \sup\{L(\sigma);\, \sigma \in \mathcal{S}\} \in (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$.

1. Soit σ et τ deux subdivisions de $]a;b[$ de taille m et n, respectivement. On dit que "σ est incluse dans τ", on note $\sigma \subset \tau$, si

   $$\forall\, j \in [\![0;m]\!] , \quad \exists\, k \in [\![0;n]\!] ; \quad \sigma_j = \tau_k .$$

   Vérifier que, si $\sigma \subset \tau$, alors $m \leq n$ et $L(\sigma) \leq L(\tau)$.

2. Montrer que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$, $L(\sigma) \geq b - a$.

3. Soit $(a_1;b_1) \in [a;b]^2$ et $(a_2;b_2) \in [a;b]^2$ tels que $a_1 < b_1$ et $a_2 < b_2$. Soit $\sigma^{(1)}$ une subdivision de $[a_1;b_1]$ de taille $n_1 \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma^{(2)}$ une subdivision de $[a_2;b_2]$ de taille $n_2 \in \mathbb{N}^*$.
   Vérifier que la réunion des images de $\sigma^{(1)}$ et de $\sigma^{(2)}$ est un ensemble fini U de points de $[\min(a_1;a_2); \max(b_1;b_2)]$ de cardinal p vérifiant $1 + \max(n_1;n_2) \leq p \leq n_1 + n_2$. Dans quel cas a-t-on $p = n_1 + n_2$?
   On numérote les éléments de U dans l'ordre croissant des entiers naturels. On obtient ainsi une subdivision de $[\min(a_1;a_2); \max(b_1;b_2)]$, notée $\sigma^{(1)} \cup \sigma^{(2)}$, appelée réunion de $\sigma^{(1)}$ et $\sigma^{(2)}$. Cette subdivision est donc l'application qui, à $j \in [\![0;p]\!]$ associe le j-ième élément de U.
   Montrer que $\max(L(\sigma^{(1)}); L(\sigma^{(2)})) \leq L(\sigma^{(1)} \cup \sigma^{(2)})$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_p$. Pour $k \in [\![1;p]\!]$, on considère une subdivision $\sigma^{(k)}$ de $[\sigma_{k-1};\sigma_k]$ de taille $n_k \in \mathbb{N}^*$ et on note par $\mathcal{I}_k$ l'image de la restriction $\gamma_{|[\sigma_{k-1};\sigma_k]}$ de γ à $[\sigma_{k-1};\sigma_k]$. Par une récurrence finie basée sur le point 2, on définit $\tau = \cup_{k\in[\![1;p]\!]}\, \sigma^{(k)}$, la réunion des subdivisions $\sigma^{(k)}$. C'est une subdivision de

   $$\left[\min_{k\in[\![1;p]\!]} \sigma_k \,;\, \max_{k\in[\![1;p]\!]} \sigma_k\right] = [\sigma_0;\sigma_p] = [a;b] \quad \text{de taille} \quad \sum_{k=1}^{p} n_k .$$

   a). Montrer que

   $$L(\tau) = \sum_{k=0}^{p} L\big(\sigma^{(k)}\big) .$$

b). En déduire que

$$L(\gamma) \;\geq\; \sum_{k=1}^{p} L\big(\gamma_{|[\sigma_{k-1};\sigma_k]}\big)\,.$$

c). Montrer que

$$L(\gamma) \;=\; \sum_{k=1}^{p} L\big(\gamma_{|[\sigma_{k-1};\sigma_k]}\big)\,.$$

(Indication : pour une subdivision $\underline{\sigma}$ de $[a;b]$, considérer $\tau = \underline{\sigma} \cup \sigma$ et utiliser le a).)

5. On suppose que γ est de classe C^1 sur $[a;b]$.

a). Montrer que $L(\gamma)$ est finie et que

$$L(\gamma) \;\leq\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

b). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la subdivision $\sigma^{(n)}$ de $[a;b[$ par $\sigma^{(n)} : [\![0;n]\!] \longrightarrow [a;b]$ avec, pour $j \in [\![0;n]\!]$,

$$\sigma_j^{(n)} \;:=\; a \,+\, j\,\frac{b-a}{n}\,.$$

Vérifier que la suite $(L(\sigma^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une somme de Riemann associée à l'intégrale apparaissant dans le a).

c). En déduire que

$$L(\gamma) \;=\; \int_a^b |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{11}$$

6. On suppose que γ est continue et de classe C^1 par morceaux sur $[a;b]$. D'après l'exercice 20, γ est, pour un $n \in \mathbb{N}^*$, une concaténation

$$\big(\mathring{+}\big)_{j=1}^{n}\,\gamma_j$$

où, pour tout $1 \leq j \leq n$, $\gamma_j : [a_j;b_j] \longrightarrow \mathbb{C}$ est C^1. Montrer que

$$L(\gamma) \;=\; \sum_{j=1}^{n} L\big(\gamma_j\big) \;=\; \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} |\gamma_j'(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{12}$$

Remarque : On a défini la longueur $L(\gamma)$ d'une courbe $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ lorsque $a < b$. Lorsque qu'une telle courbe est constante, on remarque que sa longueur est nulle. Il est donc naturel de poser $L(\gamma) = 0$ lorsque $a = b$.
On s'est attaché dans cet exercice à définir la longueur de γ. On souhaite définir aussi la longueur de $\mathcal{I} = \gamma([a;b])$, l'image de γ. Pour ce faire, des précautions s'imposent comme le montre l'exemple suivant.
Soit $(z_1;z_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $z_1 \neq z_2$. Soit $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que la

restriction $\gamma_{|[a;c]}$ de γ à $[a;c]$ (avec $a < c < b$) soit un paramétrage dans un certain sens du segment $[z_1;z_2]$ et telle que la restriction $\gamma_{|[c;b]}$ de γ à $[c;b]$ soit un paramétrage du même segment $[z_1;z_2]$ mais parcouru dans l'autre sens. Alors $\mathcal{I} = [z_1;z_2]$ mais $L(\gamma)$ est deux fois la longueur $|z_1 - z_2|$ du segment $[z_1;z_2]$.
On suppose que la restriction de γ à $[a;b[$ est injective. Dans ce cas, il est naturel de définir la longueur de $\mathcal{I}$ par $L(\gamma)$. Mais est-on sûr que, pour toute courbe $\tau : [c;d] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\tau([c;d]) = \mathcal{I}$ et telle que la restriction de τ à $[c;d[$ soit injective, on a bien $L(\tau) = L(\gamma)$? Lorsque de telles courbes γ et τ sont des chemins équivalents ou bien opposés, on verra dans l'exercice 28 que $L(\gamma) = L(\tau)$. Mais est-on sûr que de tels chemins γ et τ sont forcément équivalents ou opposés ? Ce n'est pas clair du tout.

Exercice 45. : Soit Ω un ouvert non vide connexe par arcs de $\mathbb{C}$. On montre ici que Ω est connexe par lignes polygônales. Si $\Omega = \mathbb{C}$, le résultat est clairement vrai, puisque $\mathbb{C}$ est convexe. On se restreint au cas où $\mathbb{C} \setminus \Omega \neq \emptyset$.
Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ une courbe continue. D'après l'exercice 15, on sait que γ est uniformément continue sur $[a;b]$ c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0\,, \quad \exists \delta > 0\,; \quad \forall (t;t') \in [a;b]^2\,, \quad \big(|t - t'| < \delta \implies |\gamma(t) - \gamma(t')| < \epsilon\big)\,. \qquad (13)$$

Comme $[a;b]$ est compact et γ est continue, on sait, par le cours, que $\gamma([a;b])$ est compact. D'après l'exercice 14, on sait que

$$\rho \;:=\; \inf \big\{ |\gamma(t) - z|\,;\; t \in [a;b]\,,\, z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \big\} \;>\; 0\,.$$

1. Soit $\rho' \in]0;\rho/2]$. Construire une suite finie strictement croissante $(t_k)_{0\le k\le m}$ d'éléments de $[a;b]$ telle que $t_0 = a$, $t_m = b$ et, pour tout $0 \le k \le m-1$,

$$\sup_{(t;t') \in [t_k;t_{k+1}]^2} \big|\gamma(t) - \gamma(t')\big| \;<\; \rho'\,.$$

   (Indication : on pourra utiliser (13).)

2. Soit $\Gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie de la façon suivante : pour $t \in [a;b[$, il existe un unique $0 \le k \le m-1$ tel que $t \in [t_k;t_{k+1}[$ et on pose

$$\Gamma(t) \;:=\; \gamma(t_k) + \frac{t - t_k}{t_{k+1} - t_k} \cdot \big(\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\big)\,.$$

   Pour $t = b$, on pose $\Gamma(b) = \gamma(b)$. Vérifier que Γ est un chemin polygônal joignant $\gamma(a)$ à $\gamma(b)$, dont l'image est incluse dans Ω, et vérifiant

$$\forall\, t \in [a;b]\,, \quad \big|\Gamma(t) - \gamma(t)\big| \;<\; 2\rho'\,.$$

Soit $(z;z') \in \Omega^2$. Puisque Ω est connexe par arcs, il existe une courbe paramétrée continue $\gamma : [a;b] \longrightarrow \Omega$ telle que $\gamma(a) = z$ et $\gamma(b) = z'$. D'après les questions précédentes, il existe un chemin polygônal à valeurs dans Ω joignant $\gamma(a) = z$ à $\gamma(b) = z'$. Ceci montre que Ω est connexe par lignes polygônales.