Séries entières, exponentielle et logarithmes.

Exercice 46. : Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0. Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série alternée $\sum(-1)^n a_n$.

1. Montrer que la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante.
2. Montrer que la suite $(S_{2n+1})_n$ est croissante.
3. Montrer que la suite $(S_{2n} - S_{2n+1})_n$ est positive et tend vers 0.
4. Les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont donc adjacentes. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ leur limite commune. Montrer que la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ converge vers ℓ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+1} \ \le\ \ell\ \le\ S_{2n}\,.$$

Exercice 47. : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$s_1 \ := \sum_{n\ge1} \frac{z^n}{n^n}\,,\quad s_2 \ := \sum_{n\ge2} \frac{z^n}{2n^2\,-\,n}\,,\quad s_3 \ := \sum_{n\ge2} \frac{z^n}{\ln(n)}\,,\quad s_4 \ := \sum_{n\ge1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}\,,$$

pour $(p;q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$s_5 \ := \sum_{n\ge0} \frac{(np)!}{(n!)^q}\,z^n\,,\quad s_6 \ := \sum_{n\ge0} z^{n!}\,,\quad s_7 \ := \sum_{n\ge0} 2^n\,z^{(n^2)}\,,\quad s_8 \ := \sum_{n\ge0} (n!)\,z^n\,.$$

Exercice 48. : Pour chacune des séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence et la somme.

$$s_1 \ := \sum_{n\ge0} 3^n\,z^n\,,\quad s_2 \ := \sum_{n\ge1} \frac{z^n}{n}\,,\quad s_3 \ := \sum_{n\ge0} (2n+1)\,z^{2n}\,,\quad s_4 \ := \sum_{n\ge0} \frac{z^n}{n+1}\,,$$

avec $a_n = 3^n$ si n est pair et $a_n = 2^{-n}$ si n est impair et avec $\theta \in \mathbb{R}$,

$$s_5 \ := \sum_{n\ge0} a_n\,z^n,\quad s_6 \ := \sum_{n\ge0} n\,(n{+}1)\,z^n,\quad s_7 \ := \sum_{n\ge0} \sin(n\theta)\,z^n,\quad s_8 \ := \sum_{n\ge0} \frac{\sin(n\theta)}{n!}\,z^n.$$

Exercice 49. : Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. On considère la série entière centrée en z_0 donnée par

$$s \ := \sum_{n\ge0} \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}}\,(z\,-\,z_0)^n\,.$$

1. Déterminer le rayon de convergence et la somme f de la série entière centrée en z_0.
2. Déterminer f' et montrer qu'elle est la somme d'une série entière que l'on précisera.
3. Trouver une primitive de f.

Exercice 50. : Trigonométrie complexe. On note par sin (resp. cos) la fonction sinus (resp. cosinus) définie sur $\mathbb{C}$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$ et $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$.
3. Montrer que sinus et cosinus sont non bornées sur $\mathbb{C}$.
4. Montrer que

$$\begin{aligned}\sin^{-1}\big(\{0\}\big) &= \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\, k \in \mathbb{Z}\,;\ z = k\pi\big\} =:\ \pi\,\mathbb{Z}\,,\\ \cos^{-1}\big(\{0\}\big) &= \big\{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists\, k \in \mathbb{Z}\,;\ z = \frac{\pi}{2} + k\pi\big\} =:\ \frac{\pi}{2} + \pi\,\mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

5. Soit $(w; z) \in \mathbb{C}^2$. Montrer les égalités

$$\begin{aligned}\sin(w+z) &= \sin(w)\,\cos(z) + \sin(z)\,\cos(w)\,,\\ \cos(w+z) &= \cos(w)\,\cos(z) - \sin(w)\,\sin(z)\,.\end{aligned}$$

Exercice 51. : Soit $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \cos^{-1}(\{0\})$ ($\cos^{-1}(\{0\})$ a été déterminé dans l'exercice 50). Soit $\tan : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\,(e^{iz} + e^{-iz})}\,.$$

1. Soit $w \in \mathbb{C}$. Pour $z \in \Omega_0$, montrer l'équivalence

$$\tan(z) = w \iff \left(Z = e^{2iz} \neq -1 \quad \text{et} \quad iw = \frac{Z-1}{Z+1}\right).$$

2. Soit $w \in \mathbb{C}$. Montrer que l'équation d'inconnue $z \in \Omega_0$ donnée par $\tan(z) = w$ n'a pas de solution si $w \in \{-i; i\}$.
3. Soit $w \in (\mathbb{C} \setminus \{-i; i\})$. Montrer que l'ensemble S_w des solutions de l'équation précédente s'écrit

$$S_w = \big\{z_w + ik\pi\,;\quad k \in \mathbb{Z}\big\} =:\ z_w + i\pi\,\mathbb{Z}\,,$$

pour un z_w que l'on précisera.

4. Soit $U = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ (c'est un ouvert) et $h : U \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
$$h(w) \; := \; \frac{1 \, + \, iw}{1 \, - \, iw} \; = \; - \, \frac{w \, - \, i}{w \, + \, i} \, .$$
Montrer que l'ouvert
$$\Omega \; := \; h^{-1}\big(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\big) \; = \; \big\{ w \in U \, ; \quad h(w) \; \in \; \big(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-\big) \big\} \, .$$
est $\mathbb{C} \setminus (i[1; +\infty[\cup i] - \infty; -1])$.

5. Par définition de Ω, la fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(w) = \mathrm{Log}\,(h(w))/(2i)$ est bien définie. Montrer que f est holomorphe et déterminer sa dérivée.

6. Soit $\Omega_1 := \{u \in \mathbb{C}; -\pi/2 < \mathrm{Re}\,(u) < \pi/2\}$. Montrer que f est bijective de Ω sur Ω_1 de bijection réciproque la restriction de tan à Ω_1.

7. Montrer que la restriction à $\mathbb{R}$ de f est la fonction arctangente.

Exercice 52. : Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\sum a_n(z - z_0)^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Soit f la somme de cette série entière. Montrer que f admet une primitive F sur $D(z_0; R[$ qui est la somme d'une série entière de rayon de convergence R.

Exercice 53. : Soit $(\theta_-; \theta_+) \in] - \pi; \pi]$ avec $\theta_- < \theta_+$. Soit
$$A_1 \; := \; \big\{ z \in \mathbb{C}^* \, ; \; \mathrm{Arg}\,(z) \; \in]\theta_+; \pi] \big\} \, , \quad A_2 \; := \; \big\{ z \in \mathbb{C}^* \, ; \; \mathrm{Arg}\,(z) \; \in]\theta_-; \theta_+[\big\}$$
$$\text{et} \quad A_3 \; := \; \big\{ z \in \mathbb{C}^* \, ; \; \mathrm{Arg}\,(z) \; \in] - \pi; \theta_-] \big\} \, .$$
Montrer que,

1. pour $z \in A_1$, $\mathrm{Arg}_{\theta_-}(z) = \mathrm{Arg}_{\theta_+}(z) = \mathrm{Arg}\,(z)$,
2. pour $z \in A_2$, $\mathrm{Arg}_{\theta_+}(z) = \mathrm{Arg}_{\theta_-}(z) + 2\pi = \mathrm{Arg}\,(z) + 2\pi$,
3. pour $z \in A_3$, $\mathrm{Arg}_{\theta_+}(z) = \mathrm{Arg}_{\theta_-}(z) = \mathrm{Arg}\,(z) + 2\pi$.

Exercice 54. : On rappelle que l'on note par ln le logarithme népérien sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Déterminer $\mathrm{Log}\,(i)$, $\mathrm{Log}\,(-1 + i)$ et $\mathrm{Log}\,(-1 - i)$, après avoir justifié leur existence.
2. Déterminer $\mathrm{Log}_0(i)$, $\mathrm{Log}_0(-1+i)$ et $\mathrm{Log}_0(-1-i)$, après avoir justifié leur existence.
3. Soit $z_0 = \exp(-i\pi/3)$ et $z_1 = \exp(i5\pi/3)$. Vérifier que $\mathrm{Log}\,(z_0)$, $\mathrm{Log}\,(z_1)$ et $\mathrm{Log}\,(z_0/z_1)$ sont bien définis, les calculer et déterminer $\mathrm{Log}\,(z_0) - \mathrm{Log}\,(z_1)$.
4. Donner le plus grand sous-ensemble U de $\mathbb{C}$ sur lequel $\mathrm{Log} \circ \exp = \mathrm{Id}$.

5. Donner le plus grand sous-ensemble V de $\mathbb{C}$ sur lequel $\exp \circ \mathrm{Log} = \mathrm{Id}$.

6. Donner le plus grand sous-ensemble W de $\mathbb{C}$ sur lequel $\mathrm{Log}\,(\cdot/i)$ et Log sont définies. Établir sur W une relation entre ces deux fonctions.

7. Donner le plus grand sous-ensemble X de $\mathbb{C}$ sur lequel $\mathrm{Log}\,((\cdot)^2)$ et Log sont définies. Établir sur X une relation entre ces deux fonctions.

8. Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et $r : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $r(z) = \exp(\mathrm{Log}\,(z)/2)$.

   a). Vérifier que, pour $z \in \Omega$, $r(z)^2 = z$ et que la restriction de r à $\mathbb{R}^{+*}$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction racine carré sur $\mathbb{R}^+$.

   b). Déterminer $r(i)$ et $r(-1+i)$.

   c). Trouver z_1 et z_2 dans Ω tels que $z_1 z_2 \in \Omega$ mais $r(z_1)r(z_2) \neq r(z_1 z_2)$.

Exercice 55. : Soit $z \in \mathbb{C}$. On rappelle qu'un complexe w est <u>une</u> racine carrée de z si $w^2 = z$. On a vu en L1 (en utilisant la forme exponentielle des nombres complexes) que tout nombre complexe non nul a exactement deux racines carrées non nulles (et elles sont opposées) et que 0 est la seule racine carrée de 0.
Lorsque $z = x \in \mathbb{R}^+$, x a une racine carrée positive, notée $\sqrt{x}$, l'autre racine étant $-\sqrt{x}$, donc négative. On note par $\sqrt{\cdot}$ la fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$ qui, à $x \in \mathbb{R}^+$, associe $\sqrt{x}$.
L'objectif de cet exercice est de voir si l'on peut construire une application continue (ou holomorphe) g sur un ensemble approprié telle que $g(z)^2 = z$, pour tout z appartenant à l'ensemble en question.

1. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que, pour $z \in \Omega$, $g(z)^2 = z$. Montrer que, si g est holomorphe, alors $0 \notin \Omega$.

2. Soit Ω un ouvert inclus dans $\mathbb{C}^*$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que, pour $z \in \Omega$, $g(z)^2 = z$.

   a). Montrer que g ne s'annule pas. Donner, pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, une expression de $g(re^{i\theta})$.

   b). Vérifier que g est injective.

   c). Montrer que g est holomorphe et déterminer sa $\mathbb{C}$-dérivée g'.

3. On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ continue telle que, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $g(z)^2 = z$.

   a). Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}^*$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $g(z^2) = cz$.

   b). Soit $r > 0$ et $\gamma : [0; 2\pi] \ni t \mapsto re^{it}$. Montrer que
   $$\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z \;=\; -\frac{4}{3}\,c\,r\,\sqrt{r}\,.$$
   (Indication : on pourra faire le changement de variable $t = 2s$ dans l'intégrale précédente et utiliser a).)

c). Montrer que g admet une primitive.
(Indication : on pourra deviner une primitive en s'inspirant de celles de la fonction $\sqrt{\cdot}$.)

d). Établir une contradiction.

4. Donner un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et une fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue tels que, pour tout $z \in \Omega$, $g(z)^2 = z$, la restriction de g à $\mathbb{R}^{+*}$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de $\sqrt{\cdot}$, $-1 \in \Omega$ et $g(-1) = i$.

5. Donner un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et une fonction $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continue tels que, pour tout $z \in \Omega$, $g(z)^2 = z$, la restriction de g à $\mathbb{R}^{+*}$ coïncide avec la restriction à $\mathbb{R}^{+*}$ de $\sqrt{\cdot}$, $-1 \in \Omega$ et $g(-1) = -i$.

Exercice 56. : On considère dans $\mathbb{C}$ le triangle T de sommets $\exp(-3i\pi/4) = -(1+i)/\sqrt{2}$, $\exp(-i\pi/4) = (1-i)/\sqrt{2}$ et $\exp(i\pi/2) = i$. Soit $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$, avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, le chemin défini dans le cours et parcourant le bord ∂T de T, en partant de $\exp(-3i\pi/4)$ et en passant par $\exp(-i\pi/4)$ et i, dans cet ordre.
On pourra utiliser les résultats de l'exercice 21.

1. Vérifier que 0 est à l'intérieur du triangle T.

2. Montrer que les segments $[\exp(-3i\pi/4); \exp(-i\pi/4)]$ et $[\exp(-i\pi/4); i]$ ne rencontrent pas l'ensemble
$$\mathbb{R}^- := \left\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,(z) \leq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z) = 0\right\}.$$

3. Montrer que le segment $[i; \exp(-3i\pi/4)]$ ne rencontre pas l'ensemble
$$\mathbb{R}^+ := \left\{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,(z) \geq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(z) = 0\right\}.$$

4. Calculer l'intégrale
$$\int_\gamma \frac{dz}{z}.$$

5. Soit T_1 le translaté de T de 1, c'est-à-dire le triangle de sommets $1 + \exp(-3i\pi/4)$, $1+\exp(-i\pi/4)$ et $1+i$. Soit γ_1 le chemin défini dans le cours et parcourant le bord ∂T_1 de T_1, en partant de $1+\exp(-3i\pi/4)$ et en passant par $1+\exp(-i\pi/4)$ et $1+i$, dans cet ordre.
Calculer l'intégrale
$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}.$$
(Indication : on pourra vérifier que tout élément de T_1 a une partie réelle strictement positive.)

Exercice 57. : Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$\mathbb{R}^+ e^{i\theta} \;:=\; \left\{ w \in \mathbb{C}\,;\; \exists\, r \in \mathbb{R}^+\,;\; w \;=\; r e^{i\theta} \right\}.$$

Soit

$$\Omega_{z;\,\theta} \;:=\; \left\{ w \in \mathbb{C};\; w - z \in \left(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ e^{i\theta} \right) \right\}.$$

On remarque que $\Omega_{0;\,\theta} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ e^{i\theta}$.
On pourra utiliser les résultats de l'exercice 10.

1. Montrer que l'application $T_z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $T_z(w) = w - z$ est bijective de $\Omega_{z;\,\theta}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ e^{i\theta}$.

2. Montrer que la fonction $\operatorname{Arg}_\theta(\cdot\, -\, z) := \operatorname{Arg}_\theta \circ T_z$ est bien définie et continue sur $\Omega_{z;\,\theta}$.

3. Montrer que la fonction $\operatorname{Log}_\theta(\cdot\, -\, z) := \operatorname{Log}_\theta \circ T_z$ est bien définie, holomorphe sur $\Omega_{z;\,\theta}$ et que sa $\mathbb{C}$-dérivée est l'application $\Omega_{z;\,\theta} \ni w \mapsto 1/(w - z)$.

4. Soit $t > 0$ et $z_t = z + t e^{i\theta}$. Soit $D_t := D(z_t; t/2[$. On pose

$$\begin{aligned} D_t^+ \;&:=\; D_t \;\cap\; \{ w \in \mathbb{C}\,;\; \operatorname{Arg}_\theta(w) \in]\theta + \pi\,;\, \theta + 2\pi[\} \\ \text{et} \quad D_t^- \;&:=\; D_t \;\cap\; \{ w \in \mathbb{C}\,;\; \operatorname{Arg}_\theta(w) \in]\theta;\, \theta + \pi\,[\}\,. \end{aligned}$$

   Montrer que la restriction de $\operatorname{Log}_\theta(\cdot\, -\, z)$ à D_t^+ a pour limite en z_t le complexe $\ln|z_t - z| + i(\theta + 2\pi)$ et que la restriction de $\operatorname{Log}_\theta(\cdot\, -\, z)$ à D_t^- a pour limite en z_t le complexe $\ln|z_t - z| + i\theta$.
   En particulier, la fonction $\operatorname{Log}_\theta(\cdot\, -\, z)$ n'a pas de limite en z_t.