Fonctions analytiques.

Exercice 59. : Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{1; 3\} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par

$$f(z) \ = \ \frac{z\, +\, 1}{(z\, -\, 1)\,(z\, -\, 3)}\ .$$

Montrer que f admet un DSE en 0, donner ce développement et préciser le disque de convergence. Même question en 2.

Exercice 60. : On considère la série entière $s = \sum_{n\geq 0} z^{n+1}/2^n$. Soit f sa somme.

1. Déterminer le rayon de convergence de s.
2. La fonction f est-elle définie en $2-3i$?
3. Montrer que f admet un prolongement analytique g sur $\mathbb{C}\setminus\{2\}$. Quelle est la valeur de g en $2-3i$?
4. Donner le DSE de g en $2-3i$ en précisant le disque de convergence.

Exercice 61. : Donner le DSE de la fonction exponentielle complexe exp en un $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 62. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(z) = \sin(z)/z$, si $z \neq 0$, et $f(0) = 1$. Montrer que f admet un DSE en 0. En déduire que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 63. : Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.

1. Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1_h. Montrer que, si $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.
2. Montrer que la propriété précédente peut être fausse pour $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continues.

Remarque : La propriété du 1 montre que l'anneau $\{f\,:\,\Omega \longrightarrow \mathbb{C}\,;\ f \text{ de classe}\, C^1_h\}$ est intègre. Pour un intervalle infini I de $\mathbb{R}$, on peut construire $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ non nulles et de classe C^∞ telles que $fg = 0$. Donc l'anneau $\{f\,:\,I \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ f \text{ de classe}\, C^\infty\}$ n'est pas intègre.

Exercice 64. : Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et $(a_n)_n$ une suite d'éléments de Ω qui converge vers un $a \in \mathbb{C}$. Nécessairement, $a \in \overline{\Omega}$. On suppose, de plus, que, pour tout n, $a_n \neq a$.

1. On suppose $a \in \Omega$. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique telle que, pour tout n, $f(a_n) = 0$. Montrer que f est nulle.

2. Donner un exemple d'un tel ouvert Ω, d'une telle suite $(a_n)_n$ et d'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analytique, qui est non nulle et vérifie, pour tout n, $f(a_n) = 0$.
(Indication : on pourra utiliser l'exercice 51.)

3. On suppose $a \in \Omega$. Soit $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$, analytiques, ne s'annulant pas et telles que, pour tout n,
$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} \;=\; \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}\,.$$
Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}^*$ tel que $f = cg$.

Exercice 65. : Soit $f, g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par $f(z) = z^2 + 3z - 4$ et $g(z) = z^2 + z + 2$. Déterminer le maximum de $|f|$ sur $D(0; 2]$. Même question pour g sur $D(0; 1]$.

Exercice 66. : Soit $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $h(z) = z\exp(-z)$. On considère l'ouvert
$$\Omega \;:=\; \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) \in]0;1[\text{ et } \mathrm{Im}\,(z) \in]0;1[\big\}$$
dont l'adhérence est
$$\overline{\Omega} \;:=\; \big\{ z \in \mathbb{C}\,;\; \mathrm{Re}\,(z) \in\; [0;1] \text{ et } \mathrm{Im}\,(z) \in\; [0;1] \big\}\,.$$
Montrer que la borne supérieure
$$\sup_{z \in \overline{\Omega}} |h(z)|$$
de $|h|$ sur $\overline{\Omega}$ est atteinte. Déterminer sa valeur et donner un point de $\overline{\Omega}$ où elle est atteinte. On **admet** que $1 < \sqrt{2} < e = \exp(1)$.

Exercice 67. : Soit Ω un domaine borné et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C}$ continue et C^1_h sur Ω. On suppose que f ne s'annule pas. Montrer qu'il existe $z_0 \in \partial\Omega$ tel que
$$|f(z_0)| \;=\; \min_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|\,.$$

Exercice 68. : On reprend les fonctions de l'exercice 65. Déterminer le minimum de $|f|$ sur $D(0; 2]$ et celui de $|g|$ sur $D(0; 1]$.

Exercice 69. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C_h^1 telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad |f(z)| \;\leq\; C\,(1 \,+\, |z|)^m\,.$$

On va montrer que f est forcément un polynôme de degré au plus m. Cela généralise le théorème de Liouville qui correspond au cas $m = 0$.
On rappelle que, par le cours, f est en fait C_h^∞.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \geq 1$,

$$\left|f^{(n)}(0)\right| \;\leq\; C\,(n!)\,r^{m-n}\,.$$

2. En déduire que f est un polynôme de degré au plus m.

Exercice 70. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C_h^1 telle que

$$\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| \;=\; +\infty\,, \quad \text{dans le sens où}$$

$$\forall\, M > 0\,, \quad \exists\, R > 0\,; \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad |z| \,>\, R \;\Longrightarrow\; |f(z)| \,>\, M\,. \tag{18}$$

1. On montre que f s'annule au moins une fois. On suppose, par l'absurde, que f ne s'annule pas.
   a). Montrer que $1/f$ est de classe C_h^1 et bornée.
   b). En déduire une contradiction.
2. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\mathbb{C} \setminus D(0; R]$.
3. En déduire que f a un nombre fini de zéros α_1, ..., α_m.
4. Pour $1 \leq j \leq m$ soit n_j l'ordre du zéro α_j de f.
   a). Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe C_h^1, ne s'annulant pas et telle que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}\,, \quad f(z) \;=\; g(z)\prod_{j=1}^{n}(z \,-\, \alpha_j)^{n_j}\,. \tag{19}$$

   b). Soit $N = n_1 + \cdots + n_m$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|1/g(z)| \leq C\,(1 + |z|)^N$.
   c). En déduire que g est constante.
   (Indication : on pourra utiliser l'exercice 69.)

D'après (19) et 4. c), on voit que f est un polynôme. On a aussi montré, par contraposée, que, si une fonction entière n'est pas un polynôme, alors la propriété (18) est fausse.