Conséquences du théorème de Goursat.

Exercice 72. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z\exp(z^2)$.

1. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma_z(t) = tz$. Montrer que
$$\int_{\gamma_z} f(w)\,dw \;=\; \frac{\exp\bigl(z^2\bigr) - 1}{2}\,.$$
Vérifier que
$$\mathbb{C} \ni z \;\mapsto\; \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$$
est bien une primitive de f.

Exercice 73. : Soit $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction donnée par $f(z) = 1/z$. Pour $z \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)$, soit γ_z la concaténation de $\psi_{1;|z|}$ et de la partie du chemin C^1 $\gamma_{0;|z|}$ allant de $|z|$ à z. Soit $F_0, F_1 : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ définies par
$$F_0(z) \;=\; \int_{\gamma_z} \frac{\mathrm{d}w}{w} \quad \text{et} \quad F_1(z) \;=\; \int_{\psi_{-1;z}} \frac{\mathrm{d}w}{w}\,.$$

1. Vérifier que F_1 est une primitive de f sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.
2. La fonction F_1 est-elle une détermination du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$?
3. Montrer que $F_0 = \mathrm{Log}_0$.

Exercice 74. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = (e^z - 1)/z$ et par $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est analytique sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que, pour tout $R > 0$,
$$\int_{-R}^{R} \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; -i\int_0^{\pi} e^{(R\exp(i\theta))}\,\mathrm{d}\theta \;+\; i\pi\,.$$
3. Montrer que
$$\lim_{R\to+\infty} e^{-R}\int_{-R}^{0} \frac{e^t - 1}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; 0\,.$$

4. En déduire que la limite
$$\lim_{R\to+\infty} e^{-R}\int_0^R \frac{e^t-1}{t}\,\mathrm{d}t$$
existe. La déterminer.

Exercice 75. : Calcul d'indice.
Soit $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ $(a<b)$ un chemin fermé et $z \in (\mathbb{C}\setminus\gamma([a;b]))$. D'après l'exercice 47 ou l'exercice 15, on a
$$\rho \ := \ \inf\big\{|z - \gamma(t)|\ ;\ t\in[a;b]\big\} \ > \ 0\,.$$
On suppose qu'il existe une demi-droite $\mathcal{D}$ issue de z, i.e. $\mathcal{D} = z + e^{i\theta}\mathbb{R}^+$, pour un $\theta \in]-\pi;\pi]$, telle que l'image réciproque $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ par γ est un ensemble vide ou discret ne contenant pas $\gamma(a)=\gamma(b)$. Comme $[a;b]$ est compact, $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$, qui est inclus dans $[a;b]$, est forcément un ensemble fini.
Pour $t\in[a;b]$, soit $y(t)$ la seconde composante de $\gamma(t)$ dans le repère $(z;e^{i\theta};ie^{i\theta})$.
On donne ici une formule pour calculer l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma;z)$ de z par rapport à γ, qui est défini par
$$\mathrm{Ind}(\gamma;z) \ := \ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w \ - \ z}\,.$$

1. On suppose $\gamma^{-1}(\mathcal{D})$ vide. Montrer que $\mathrm{Ind}(\gamma;z)=0$.
   (Indication : on pourra utiliser l'exercice 59.)
2. Soit $t_0 \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$.
   a). Montrer qu'il existe $\delta_0>0$ tel que $]t_0-\delta_0;t_0+\delta_0[\,\cap\,\gamma^{-1}(\mathcal{D}) = \{t_0\}$.
   b). Montrer que l'un des quatre cas suivants se produit :
      C1. Pour tout $t\in]t_0-\delta_0;t_0+\delta_0[\setminus\{t_0\}$, $y(t)>0$.
      C2. Pour tout $t\in]t_0-\delta_0;t_0+\delta_0[\setminus\{t_0\}$, $y(t)<0$.
      C3. Pour tout $t\in]t_0-\delta_0;t_0[$, $y(t)>0$ et, pour tout $t\in]t_0;t_0+\delta_0[$, $y(t)<0$.
      C4. Pour tout $t\in]t_0-\delta_0;t_0[$, $y(t)<0$ et, pour tout $t\in]t_0;t_0+\delta_0[$, $y(t)>0$.
   c). Montrer que, dans les cas C1 et C2, on a
   $$\lim_{\delta\to0^+}\Big(\mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0+\delta)\ -\ z\big)\ -\ \mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0-\delta)\ -\ z\big)\Big) \ = \ 0\,.$$
   d). Montrer que, dans le cas C3, on a
   $$\lim_{\delta\to0^+}\mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0+\delta)\ -\ z\big) \ = \ \theta\ +\ 2\pi \quad\text{et}\quad \lim_{\delta\to0^+}\mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0-\delta)\ -\ z\big) \ = \ \theta\,.$$
   e). Montrer que, dans le cas C4, on a
   $$\lim_{\delta\to0^+}\mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0+\delta)\ -\ z\big) \ = \ \theta \quad\text{et}\quad \lim_{\delta\to0^+}\mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_0-\delta)\ -\ z\big) \ = \ \theta\ +\ 2\pi\,.$$

3. Soit $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$ pour lesquels le cas C1 ou le cas C2 se produit. Soit $\mathcal{E}_-$ l'ensemble des $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$ pour lesquels le cas C3 se produit. Soit $\mathcal{E}_+$ l'ensemble des $t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})$ pour lesquels le cas C4 se produit.
Soit $a < t_1 < \cdots < t_p < b$ tel que $\gamma^{-1}(\mathcal{D}) = \{t_1; \cdots; t_p\}$. Pour $t \in (\mathcal{E}_- \cup \mathcal{E}_+)$, on note par $\delta(t)$ un $\delta_0 > 0$ validant 2. a), avec t_0 remplacé par t. Dans la suite, on considère des réels δ vérifiant

$$\delta \ \in \ \big]0; \min\{\delta(t)\,;\ t \in \gamma^{-1}(\mathcal{D})\}\big[\,. \tag{20}$$

D'après le cours, on peut écrire, pour tout $\delta > 0$ vérifiant la condition précédente,

$$\begin{aligned} 2i\pi\,\mathrm{Ind}(\gamma;\, z) \ &= \int_{\gamma_{|[a;\,t_1-\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} + \sum_{k=2}^{p} \int_{\gamma_{|[t_{k-1}+\delta;\,t_k-\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} + \int_{\gamma_{|[t_p+\delta;\,b]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{p} \int_{\gamma_{|[t_k-\delta;\,t_k+\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z}\,. \end{aligned} \tag{21}$$

a). Montrer que

$$\int_{\gamma_{|[a;\,t_1-\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \ = \ \Big[\mathrm{Log}_\theta(\cdot - z)\Big]_{\gamma(a)}^{\gamma(t_1-\delta)}, \ \int_{\gamma_{|[t_p+\delta;\,b]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \ = \ \Big[\mathrm{Log}_\theta(\cdot - z)\Big]_{\gamma(t_p+\delta)}^{\gamma(b)}$$

et, pour $2 \le k \le p$,

$$\int_{\gamma_{|[t_{k-1}+\delta;\,t_k-\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \ = \ \Big[\mathrm{Log}_\theta(\cdot\ -\ z)\Big]_{\gamma(t_{k-1}+\delta)}^{\gamma(t_k-\delta)}\,.$$

b). Pour $1 \le k \le p$, montrer que

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\gamma_{|[t_k-\delta;\,t_k+\delta]}} \frac{\mathrm{d}w}{w-z} \ = \ 0\,.$$

c). Justifier les égalités suivantes, quand $\delta \to 0^+$.

$$\begin{aligned} 2i\pi\,\mathrm{Ind}(\gamma;\, z) \ &= o(1) \ + \sum_{k=1}^{p} \Big(\mathrm{Log}_\theta\big(\gamma(t_k-\delta)\ -\ z\big)\ -\ \mathrm{Log}_\theta\big(\gamma(t_k+\delta)\ -\ z\big)\Big) \\ &= o(1) \ + \ i \sum_{t\,\in\,(\mathcal{E}_-\,\cup\,\mathcal{E}_+)} \Big(\mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_k-\delta)\ -\ z\big)\ -\ \mathrm{Arg}_\theta\big(\gamma(t_k+\delta)\ -\ z\big)\Big) \\ &= o(1) \ + \ 2i\pi \left(\sum_{t\,\in\,\mathcal{E}_+} 1 \ - \ \sum_{t\,\in\,\mathcal{E}_-} 1\right). \end{aligned}$$

d). En déduire que $\mathrm{Ind}(\gamma;\, z) = \mathrm{Card}\,\mathcal{E}_+ \ - \ \mathrm{Card}\,\mathcal{E}_-$.

Appliquer la présente méthode pour retrouver les calculs d'indice faits jusqu'à présent.

Exercice 76. : On considère le chemin fermé $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = e^{it}$, chemin qui est de classe C^1, et le chemin fermé Γ qui est la concaténation, dans cet ordre, des chemins $\Gamma_1 : [0; \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $(\psi_{2;-2} =) \, \Gamma_2 : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donnés par $\Gamma_1(t) = 2e^{i(\pi-t)}$ et $\Gamma_2(t) = -2t + (1-t)2$, qui sont tous deux de classe C^1.

1. Montrer que
$$\int_\gamma \frac{w \exp(w)}{2w-1} \, \mathrm{d}w \;=\; \frac{i\pi\sqrt{e}}{2} \quad \text{et} \quad \int_\gamma \frac{\exp\left(\frac{1}{w-2}\right)}{w} \, \mathrm{d}w \;=\; \frac{2i\pi}{\sqrt{e}} \, .$$
(Indication : on pourra utiliser la formule de Cauchy.)

2. Montrer que
$$\int_\gamma \exp\left(\frac{1}{w}\right) \mathrm{d}w \;=\; 2i\pi \, .$$

3. Montrer que
$$\int_\Gamma \frac{\cos(\pi w)}{1+w^2} \, \mathrm{d}w \;=\; -\frac{\pi}{2}\left(e^{-\pi} + e^{\pi}\right) .$$

Exercice 77. : Soit $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \, ; \, \mathrm{Re}\,(z) > 1\}$ et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par
$$f(z) \;:=\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \, ,$$
où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^z = \exp(z \ln(n))$.

1. Montrer que f est holomorphe sur Ω.

2. Donne une expression de sa $\mathbb{C}$-dérivée sur Ω.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n^a} \;=\; 0 \, .$$

4. Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. Montrer que la fonction $\mathbb{R}^{+*} \ni x \mapsto \ln(x)/x^a$ est décroissante sur $[e^{1/a}; +\infty[$. En déduire que, si $a > 1$,
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \;=\; 0 \, .$$

5. Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. Montrer que
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \;=\; 0 \, .$$

Exercice 78. : On se place dans le cadre de l'exercice 18.

1. Montrer de deux façons différentes que f est holomorphe sur Ω.
2. Montrer que f admet un prolongement analytique $\tilde{f}$ à $\mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.
3. Soit $g : D(0;2[\longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction donnée par $g(0) = 1$ et, pour $z \in (D(0;2[\setminus\{0\})$, par $g(z) = z\tilde{f}(z)$. Vérifier que g est bien définie et holomorphe.
4. On considère le chemin C^1 $\gamma : [0;2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = e^{it}$. Montrer que
$$\int_\gamma \tilde{f}(w)\,\mathrm{d}w \;=\; 2i\pi\,.$$
(Indication : on pourra appliquer la formule de Cauchy à g.)
5. En déduire que $\tilde{f}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus 2i\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 79. : Soit $\Omega := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$ et $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par
$$F(z) \;:=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tz}\,\mathrm{d}t\,.$$

1. Montrer que F est bien définie et holomorphe.
2. Montrer que, pour tout $z \in \Omega$, $F'(z) = -(1+z^2)^{-1}$.
3. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.
(Indication : on pourra écrire, pour $x > 1$, $e^{-tx} = e^{-t}e^{-t(x-1)}$.)
4. On considère la fonction f de l'exercice 53. Montrer que $F = (\pi/2) - f$.
5. On montre ici que la limite en 0 de la restriction de F à $\mathbb{R}^{+*}$ est égale à l'intégrale semi-convergente
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$
   a). Montrer que
$$\lim_{x\to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}\,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$
   b). Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a
$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}\,\mathrm{d}t \;=\; -\int_{\pi/2}^{+\infty} \cos(t)\, e^{-tx}\left(\frac{1}{t^2} + \frac{x}{t}\right)\mathrm{d}t\,.$$
   c). En déduire qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+\,,\quad (1 + x^2)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, e^{-tx}\,\mathrm{d}t \;=\; g(x)\,.$$

d). Montrer que

$$\lim_{x\to 0} F_{|\mathbb{R}^{+*}}(x) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\,.$$

6. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercice 80. : "Logarithme le long d'une courbe continue".
Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$ avec $a<b$. Soit $\gamma : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Soit $\mathcal{I}=\gamma([a;b])$. On pose $\mathcal{U} := \{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$.

1. Soit $z_0\in(\mathbb{C}\setminus\mathcal{I})$. On suppose que γ est un chemin C^1 et qu'il existe une fonction continue $\theta : [a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que

$$\forall\, t\in[a;b]\,,\quad \gamma(t)\,-\,z_0 \;=\; \big|\gamma(t)\,-\,z_0\big|\,e^{i\theta(t)}\,. \tag{22}$$

Soit $r : [a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par, pour $t\in[a;b]$, $r(t)=|\gamma(t)-z_0|$.

a). Montrer que r est de classe C^1.

b). Soit $t_0\in[a;b]$. Montrer qu'il existe $\delta>0$ tel que

$$\forall\, t\in\big([a;b]\,\cap\,[t_0-\delta;t_0+\delta]\big)\,,\quad \theta(t) \;=\; \mathrm{Arg}_{\theta(t_0)+\pi}\big(r(t)^{-1}\big(\gamma(t)\,-\,z_0\big)\big)\,.$$

c). En déduire que θ est de classe C^1. (Indication : on pourra utiliser les exercices 9 et 10.)

d). Montrer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z\,-\,z_0} \;=\; \big(\ln\!\big(r(b)\big)\,-\,\ln\!\big(r(a)\big)\big)\,+\,i\,\big(\theta(b)\,-\,\theta(a)\big)\,.$$

En particulier, si γ est fermé, $\gamma(b)=\gamma(a)$ donc $r(b)=r(a)$, l'intégrale précédente vaut $i(\theta(b)-\theta(a))$ et l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma;z_0)$ de z_0 par rapport à γ est donné par $(\theta(b)-\theta(a))/2\pi$.

2. Soit $z_0\in(\mathbb{C}\setminus\mathcal{I})$. On suppose que γ est un chemin, qu'il existe une fonction θ : $[a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et une subdivision $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ (avec $n\in\mathbb{N}^*$) de $[a;b]$ telles que, pour tout $k\in([0;n[\cap\mathbb{N})$, il existe $A_k\in\mathbb{R}$ tel que, pour tout $t\in[t_k;t_{k+1}]$, $\theta(t)=\mathrm{Arg}_{A_k}(\gamma(t)-z_0)\in]A_k;A_k+2\pi[$.
Montrer que

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w\,-\,z_0} \;=\; \ln\left(\frac{|\gamma(b)\,-\,z_0)|}{|\gamma(a)\,-\,z_0)|}\right)\,+\,i\,\big(\theta(b)\,-\,\theta(a)\big)\,. \tag{23}$$

En particulier, si γ est fermé, $\gamma(b)=\gamma(a)$ donc l'intégrale précédente vaut $i(\theta(b)-\theta(a))$ et l'indice $\mathrm{Ind}(\gamma;z_0)$ de z_0 par rapport à γ est donné par $(\theta(b)-\theta(a))/2\pi$. On remarque que les contraintes imposées à θ l'oblige à être continue.
Dans le reste de l'exercice, on va montrer que, pour tout point $z_0\in(\mathbb{C}\setminus\mathcal{I})$, on peut construire une application continue $\theta : [a;b]\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que (22) est valide.

3. Soit $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que $z_0 \notin [z_1; z_2]$. On suppose que $\gamma : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par $\gamma(t) = tz_2 + (1-t)z_1$. Trouver une application continue $\theta : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que (22) soit valide.

4. Soit $r > 0$. On suppose que $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$. Trouver une application continue $\theta : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que (22) soit valide.

5. Soit $r > 0$. On suppose que $z_0 = (x_0; 0)$ avec $x_0 \in]-r; 0[$ et que $\gamma : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par $\gamma(t) = re^{it}$. Trouver une application continue $\theta : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que (22) soit valide.

6. Soit $\psi : [a; b] \longrightarrow \mathcal{U}$ une application continue.

   a). Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une suite croissante $(t_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ d'éléments de $[a; b]$ telle que $t_0 = a$, $t_n = b$ et

   $$\forall\, k \in [\![0; n-1]\!]\,, \quad \forall (t; t') \in [t_k; t_{k+1}]^2\,, \quad |\psi(t) \;-\; \psi(t')| \;<\; 1\,.$$

   (Indication : on pourra utiliser le fait que ψ est uniformément continue, cf. exercice 47).

   b). Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que, pour $(A; A') \in \mathbb{R}^2$,

   $$\forall\, t \in [t_k; t_{k+1}]\,, \quad \cos\Big(\mathrm{Arg}_A\big(\psi(t)\big) \;-\; \mathrm{Arg}_{A'}\big(\psi(t_k)\big)\Big) \;>\; 0\,.$$

   (Indication : écrire $\psi(t)$ (resp. $\psi(t_k)$) en fonction de $\mathrm{Arg}_A(\psi(t))$ (resp. $\mathrm{Arg}_{A'}(\psi(t_k))$ et utiliser a).)

   c). Soit $(A_k)_{0\le k\le n}$ la suite récurrente finie définie par $A_0 := -\pi + \mathrm{Arg}(\psi(a))$ et, pour $k \in [\![0; n-1]\!]$,

   $$A_{k+1} \;:=\; -\pi \;+\; \mathrm{Arg}_{A_k}\big(\psi(t_{k+1})\big)\,.$$

   Montrer que, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathrm{Arg}_{A_k}(\psi(t_k)) = A_k + \pi$.

   d). Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Montrer que

   $$\forall\, t \in [t_k; t_{k+1}]\,, \quad \mathrm{Arg}_{A_k}\big(\psi(t)\big) \;\in\; \Big]A_k \;+\; \frac{\pi}{2}\,;\, A_k \;+\; \frac{3\pi}{2}\Big[\,.$$

   (Indication : on pourra utiliser 6. b) avec $A = A' = A_k$.)
   En particulier, pour $t = t_{k+1}$, on a $A_k - \pi/2 < A_{k+1} < A_k + \pi/2$.

   e). Montrer que, pour $t \in [t_k; t_{k+1}]$, on a $\mathrm{Arg}_{A_{k+1}}(\psi(t)) = \mathrm{Arg}_{A_k}(\psi(t))$ et

   $$\mathrm{Arg}_{A_k}\big(\psi(t)\big) \;\in\; \Big(\big]A_k\,;\, A_k + 2\pi\big[\,\cap\, \big]A_{k+1}\,;\, A_{k+1} + 2\pi\big[\Big)\,.$$

7. Soit $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus \mathcal{I})$. On applique le 2 à la fonction continue $\psi : [a;b] \longrightarrow \mathcal{U}$ définie par, pour $t \in [a;b]$,
$$\psi(t) \ := \ \frac{\gamma(t) \ - \ z_0}{|\gamma(t) \ - \ z_0|} \ .$$
On considère la fonction $\theta : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $0 \leq k \leq n-1$ et tout $t \in [t_k; t_{k+1}]$, par $\theta(t) := \mathrm{Arg}_{A_k}(\psi(t))$.
Montrer que θ est bien définie et que, pour tout $0 \leq k \leq n-1$ et tout $t \in [t_k; t_{k+1}]$, $\theta(t) = \mathrm{Arg}_{A_k}(\gamma(t) - z_0) \in]A_k; A_k + 2\pi[$.
On remarque que (22) est valide.

8. Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $\gamma_p : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ le chemin fermé, de classe C^1, donné par $\gamma_p(t) = e^{ipt}$.
Montrer que $\mathrm{Ind}_{\gamma_p}(0) = p$.
(Indication : dans le cas $p > 0$, on pourra utiliser le 2 avec $t_k = k\pi/p$ et $A_k = -\pi/2 + k\pi$, pour $0 \leq k \leq 2p$, et $\theta(t) = pt$.)

9. Soit $\gamma_1 : [0; 2\pi] \longrightarrow C(0; 1)$ le chemin fermé, de classe C^1, donné par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $z_0 = r_0 e^{i\sigma_0}$ avec $r_0 \in]0; 1[$ et $\sigma_0 \in] - \pi; \pi]$.

   a). Cas où $\sigma_0 = 0$. Soit $\theta_0 \in]0; \pi/2[$ tel que $\cos(\theta_0) = r_0$. Soit $t_0 = 0$, $t_1 = \theta_0 + \pi/2$, $t_2 = \theta_0 + 3\pi/2$ et $t_3 = 2\pi$. Construire une fonction $\theta : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (22) avec γ remplacé par γ_1. En déduire, en utilisant 1, que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(r_0) = 1$.

   b). Cas où $\sigma_0 = \pi$. Soit $\theta_0 \in]\pi/2; \pi[$ tel que $\cos(\theta_0) = -r_0$. Soit $t_0 = 0$, $t_1 = \theta_0$, $t_2 = \theta_0 + \pi$ et $t_3 = 2\pi$. Construire une fonction $\theta : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (22) avec γ remplacé par γ_1. En déduire, en utilisant 1, que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(-r_0) = 1$.

   c). Cas où $\sigma_0 \in]0; \pi[$. Soit $t_0 = 0$, $t_1 = \pi$ et $t_2 = 2\pi$. Construire une fonction $\theta : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (22) avec γ remplacé par γ_1. En déduire, en utilisant 1, que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = 1$.

   d). Cas où $\sigma_0 \in] - \pi; 0[$. Soit $t_0 = 0$, $t_1 = \pi$ et $t_2 = 2\pi$. Construire une fonction $\theta : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant (22) avec γ remplacé par γ_1. En déduire, en utilisant 1, que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = 1$.

   e). Retrouver l'égalité $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z_0) = 1$ en utilisant l'exercice 75.

La fonction θ peut être vue comme une fonction argument par rapport à z_0 le long de la courbe γ tandis que l'application $[a;b] \ni t \mapsto \ln|\gamma(t) - z_0| + i\theta(t)$ peut être considérée comme un logarithme par rapport à z_0 le long de la courbe γ, cf. (22).