

TD6 : Intégrales et primitives.

Exercice 1. : On considère les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} & \gamma_2 : [-2\pi; 0] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(it), & t &\mapsto \exp(it), \\ \gamma_3 : [0; 1] &\longrightarrow \mathbb{C} & \gamma_4 : [0; \pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(2i\pi t), & t &\mapsto \exp(2it), \\ \gamma_5 : [0; 1] &\longrightarrow \mathbb{C} & \gamma_6 : [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(6i\pi t), & t &\mapsto \exp(2it), \\ \gamma_7 : [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} & \gamma_8 : [-\sqrt{2\pi}; \sqrt{2\pi}] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(-it), & t &\mapsto \exp(it^2). \end{aligned}$$

On note par $\mathcal{U}$ le cercle unité centré en 0 de $\mathbb{C}$: $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

1. Montrer que, pour $j \in \llbracket 1; 8 \rrbracket$, l'image de γ_j est égale à $\mathcal{U}$.
2. Vérifier que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_5$ et γ_6 parcourent $\mathcal{U}$ dans le sens trigonométrique positif.
3. La courbe paramétrée γ_7 parcourt-elle $\mathcal{U}$ dans le sens trigonométrique positif ? dans le sens trigonométrique négatif ?
4. Même questions pour la courbe paramétrée γ_8 .
5. Vérifier que la composée de l'argument Arg_0 avec la restriction $(\gamma_3)_{|]0; 1[}$ de γ_3 à $]0; 1[$ est bien définie et croissante.

Exercice 2. : On considère les courbes paramétrées :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0; 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{C}^* & \gamma_2 : [0; \pi] &\longrightarrow \mathbb{C}^* \\ t &\mapsto \exp(it), & t &\mapsto \begin{cases} \exp(it), & \text{si } t \leq (\pi/2), \\ \frac{2}{\pi}(1-i)t + 2i - 1, & \text{si } t > (\pi/2). \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $\gamma_3 : [-\pi; \pi] \longrightarrow \mathbb{C}^*$ définie par $\gamma_3(t) = \exp(-it)$.

1. Montrer que γ_1 et γ_2 sont continus, C^1 par morceaux, simples et fermés. Vérifier qu'ils ont les même extrémités, c'est-à-dire que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \gamma_1(2\pi) = \gamma_2(\pi)$.
2. Calculer explicitement les intégrales

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}.$$

3. Vérifier que les intégrales

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_3} \frac{dz}{z}$$

sont opposées.

4. Soit $\gamma_4 : [2\pi; 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ défini par $\gamma_4(t) = \exp(-it)$. Soit $\Gamma : [0; 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ la concaténation de γ_1 et γ_4 . Montrer que

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z} = 0.$$

L'indice de 0 par rapport à Γ est nul et 0 n'est pas à l'extérieur de l'image de Γ , qui est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

5. Comparer les quantités réelles

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} \right| \quad \text{et} \quad L(\gamma_1) \cdot \sup_{z \in \gamma_1([0; 2\pi])} \left| \frac{1}{z} \right|,$$

où $L(\gamma_1)$ désigne la longueur de γ_1 .

Exercice 3. : On considère les courbes paramétrées

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_2 : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto ti + 1 - t, & t &\mapsto -t + (1 - t)i, \\ \gamma_3 : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_4 : [0; 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto -ti - (1 - t), & t &\mapsto t - i(1 - t), \end{aligned}$$

Soit γ la concaténation des chemins γ_1 , γ_2 , γ_3 et γ_4 , dans cet ordre.

1. Pour $j \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$, déterminer explicitement

$$\int_{\gamma_j} \exp(z) dz.$$

2. En déduire que

$$\int_{\gamma} \exp(z) dz = 0.$$

3. Retrouver ce dernier résultat d'une autre façon.

Exercice 4. : On considère les courbes paramétrées suivantes :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0; 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_2 : [-\pi/2; \pi/2] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(it), & t &\mapsto \exp(it), \\ \gamma_3 : [0; 3\pi] &\rightarrow \mathbb{C} & \gamma_4 : [-\pi/2; \pi/2] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \exp(it), & t &\mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2} + \gamma_2(t)\right). \end{aligned}$$

1. Calculer les intégrales

$$\int_{\gamma_1} \cos(z) dz, \quad \int_{\gamma_2} \cos(z) dz \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_3} \cos(z) dz.$$

2. Vérifier que γ_4 est de classe C^1 . Déterminer $\gamma_4(-\pi/2)$ et $\gamma_4(\pi/2)$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma_4} \cos(z) dz.$$

Exercice 5. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z \exp(z^2)$.

1. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\gamma : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma_z(t) = tz$. Montrer que

$$\int_{\gamma_z} f(w) dw = \frac{\exp(z^2) - 1}{2}.$$

Vérifier que

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \int_{\gamma_z} f(w) dw$$

est bien une primitive de f .

Exercice 6. : On considère dans $\mathbb{C}$ le triangle T de sommets $\exp(-3i\pi/4)$, $\exp(-i\pi/4)$ et i . Soit $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$, avec $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, un paramétrage continu et C^1 par morceaux du bord ∂T de T , en partant de $\exp(-3i\pi/4)$ et en passant par $\exp(-i\pi/4)$ et i , dans cet ordre.

1. Vérifier que 0 est à l'intérieur du triangle T .
2. Montrer que les segments $[\exp(-3i\pi/4); \exp(-i\pi/4)]$ et $[\exp(-i\pi/4); i]$ ne rencontrent pas l'ensemble

$$\mathbb{R}^- := \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) \leq 0 \quad \text{et} \quad \Im(z) = 0\}.$$

3. Montrer que le segment $[i; \exp(-3i\pi/4)]$ ne rencontre pas l'ensemble

$$\mathbb{R}^+ := \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) \geq 0 \quad \text{et} \quad \Im(z) = 0\}.$$

4. Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}.$$

5. Soit T_1 le translaté de T de 1, c'est-à-dire le triangle de sommets $1 + \exp(-3i\pi/4)$, $1 + \exp(-i\pi/4)$ et $1 + i$. Vérifier que $\gamma_1 = \gamma + 1$ est un paramétrage continu et C^1 par morceaux du bord ∂T_1 de T_1 , en partant de $1 + \exp(-3i\pi/4)$ et en passant par $1 + \exp(-i\pi/4)$ et $1 + i$, dans cet ordre. Calculer l'intégrale

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}.$$

Exercice 7. : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par, pour $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = (e^z - 1)/z$ et par $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est analytique sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que la limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-R} \int_{-R}^R \frac{e^t - 1}{t} dt$$

existe. La déterminer.

3. En déduire que la limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} e^{-R} \int_0^R \frac{e^t - 1}{t} dt$$

existe. La déterminer.

Exercice 8. : Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $\gamma : [a; b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un lacet, c'est-à-dire une application continue et C^1 par morceaux telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$ et telle que la restriction $\gamma|_{[a; b]}$ de γ à $[a; b]$ soit injective. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, soit

$$\begin{aligned} \gamma_k & : [a + k(b-a); a + (k+1)(b-a)] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t & \mapsto \gamma(t - k(b-a)). \end{aligned}$$

Soit Γ la concaténation de $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a; b])$.

1. Soit $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Vérifier que $z_0 \notin \gamma_k([a + k(b-a); a + (k+1)(b-a)])$. Montrer l'égalité

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

2. En déduire que

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = n \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Exercice 9. : Soit $(z_1; z_2) \in \mathbb{C}^2$ avec $z_1 \neq z_2$. Soit $(r_1; r_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ tel que

$$\max(r_1; r_2) - \min(r_1; r_2) < |z_1 - z_2| < r_1 + r_2.$$

Pour $j \in \llbracket 1; 2 \rrbracket$, soit $\gamma_j^+ : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $\gamma_j^- : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définies respectivement par $\gamma_j^+(t) = z_j + r_j \exp(it)$ et $\gamma_j^-(t) = z_j + r_j \exp(-it)$.

1. Vérifier que $D(z_1; r_1) \cap D(z_2; r_2) \neq \emptyset$, que $D(z_1; r_1) \not\subset \overline{D}(z_2; r_2)$ et $D(z_2; r_2) \not\subset \overline{D}(z_1; r_1)$.
2. Soit $z_0 \in D(z_1; r_1)$. Vérifier que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1^+} \frac{dz}{z - z_0} = 1.$$

3. Soit $\theta \in [0; 2\pi]$. On considère la concaténation de chemins $\gamma : [0; 1 + \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma(t) = z_1 + r_1(-(1-t)\exp(i\theta) + t\exp(i\theta))$ si $t \leq 1$ et $\gamma(t) = \gamma_1^+(t-1+\theta)$ si $t > 1$. Pour $\sigma \in \mathbb{R}$, soit $z_0 = z_1 + (r_1/2)\exp(i\sigma)$.
 - a). Montrer que, si $\sigma \in]\theta - \pi; \theta[$, l'indice de z_0 par rapport à γ est bien défini et vaut 0.
 - b). Montrer que, si $\sigma \in]\theta; \theta + \pi[$, l'indice de z_0 par rapport à γ est bien défini et vaut 1.
4. Soit c_1 et c_2 les deux points formant l'intersection des cercles $\mathcal{C}(z_1; r_1)$ et $\mathcal{C}(z_2; r_2)$. Soit $(\theta_1; \theta_2) \in [0; 2\pi]^2$ tel que $\theta_1 > \theta_2$, $c_1 = z_1 + r_1 \exp(i\theta_1)$ et $c_2 = z_1 + r_1 \exp(i\theta_2)$. Soit Γ_1 la concaténation des parcours γ_1^+ de c_1 à c_2 puis γ_2^- de c_2 à c_1 . Soit Γ_2 la concaténation des parcours γ_1^+ de c_2 à c_1 puis γ_2^+ de c_1 à c_2 .
 - a). Soit $z_0 \in (D(z_1; r_1) \setminus \overline{D}(z_2; r_2))$. Montrer que l'indice de z_0 par rapport à Γ_1 est bien défini et vaut 1. Montrer que l'indice de z_0 par rapport à Γ_2 est bien défini et vaut 0.
 - b). Soit $z_0 \in D(z_1; r_1) \cap D(z_2; r_2)$. Montrer que l'indice de z_0 par rapport à Γ_1 est bien défini et vaut 0. Montrer que l'indice de z_0 par rapport à Γ_2 est bien défini et vaut 1.

Exercice 10. : Soit $(P; Q) \in (\mathbb{C}[X])^2$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$. Soit $f : \mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = P(z)/Q(z)$.

1. Vérifier que $\Omega := \mathbb{C} \setminus Q^{-1}(\{0\})$ est un ouvert.
2. Montrer que f est holomorphe sur Ω .
3. Montrer qu'il existe $r > 0$ et un ouvert étoilé $\tilde{\Omega}$ tel que $\overline{D}(z_0; r) \subset \tilde{\Omega}$ et

$$\tilde{\Omega} \cap Q^{-1}(\{0\}) = \{z_0\}.$$

4. Soit $\gamma : [0; 2\pi] \rightarrow \Omega$ définie par $\gamma(t) = z_0 + r \exp(it)$. Montrer que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

(Indication : on pourra appliquer la formule de Cauchy dans $\tilde{\Omega}$ à une fonction holomorphe appropriée).

5. Application : Soit $j = \exp(i\pi/3)$, $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{1; j; \bar{j}\}$ et $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(z) = \frac{3z^2 - 2z + 7}{z^3 - 1}.$$

Soit $\gamma_1 : [0; 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\gamma_1(t) = 1 + \exp(it)$.

a). Vérifier qu'il existe un ouvert étoilé $\tilde{\Omega}_1$ tel que $\overline{D}(1; 1) \subset \tilde{\Omega}_1$.

b). Calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} g(z) dz.$$