Université de Cergy-Pontoise.

L3M, Contrôle continu de calcul intégral, 6 novembre 2019 (55 min.).

Les documents, téléphones, tablettes et calculettes sont interdits.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, toute réponse devra être justifiée. Des réponses correctes mal justifiées peuvent certes rapporter des points mais pas le maximum. Dans un exercice, on pourra utiliser les résultats des questions précédentes même si celles-ci n'ont pas été traitées. Note sur 20. Le barème est indicatif.

Début de l'épreuve.

Exercice 1. : (3 pts). Pour $(m;n) \in (\mathbb{N} \cap [2;+\infty[)^2$, soit $a_{(m;n)} = m^{-n}$. La famille $(a_{(m;n)})_{(m;n)\in(\mathbb{N}\cap[2;+\infty[)^2}$ est-elle sommable ?

Exercice 2. : (5 pts). Soit Ω un ensemble non vide et soit A et B deux parties non vides, non pleines et disjointes de Ω. On a donc $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $A \neq \Omega$, $B \neq \emptyset$ et $B \neq \Omega$. Soit $\mathcal{T}$ la famille de parties de Ω donnée par

$$\mathcal{T} \;=\; \big\{\emptyset\,;\, A\,;\, B\,;\, A\cup B\,;\, \Omega\setminus A\,;\, \Omega\setminus B\,;\, \Omega\setminus(A\cup B)\,;\, \Omega\big\}\,.$$

On admet que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω.
Soit $\mathcal{C}$ la famille de parties de Ω donnée par $\mathcal{C} = \{A; B\}$.

1. Pour $\Omega = [0;1]$ (l'intervalle $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$), donner un exemple de parties A et B vérifiant les hypothèses de l'exercice.
2. On revient au cas général. Montrer que $\mathcal{T}$ est la tribu engendrée par $\mathcal{C}$, c'est-à-dire la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$.

Exercice 3. : (6,5 pts). Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω. Soit E une partie de Ω. On pose $\mathcal{T}|E = \{A \cap E; A \in \mathcal{T}\}$ et $\mathcal{E}(E;\mathcal{T}) = \{B \in \mathcal{T}; B \subset E\}$.

1. Vérifier que $\mathcal{T}|E$ est une tribu sur E qui contient $\mathcal{E}(E;\mathcal{T})$.
2. On suppose $E \in \mathcal{T}$. Montrer que $\mathcal{T}|E = \mathcal{E}(E;\mathcal{T})$ et $\mathcal{T}|E \subset \mathcal{T}$.
3. On suppose $E \notin \mathcal{T}$. Montrer que $\mathcal{E}(E;\mathcal{T})$ n'est pas une tribu sur E. Montrer que $\mathcal{E}(E;\mathcal{T}) \neq \mathcal{T}|E$ et que $\mathcal{T}|E \not\subset \mathcal{T}$.
4. Soit A une partie de Ω telle que $A \not\subset E$, $E \not\subset A$, $\Omega\setminus A \not\subset E$ et $E \not\subset \Omega\setminus A$. Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\{A\}) = \{\emptyset\,;\, A\,;\, \Omega\setminus A\,;\, \Omega\}$, la tribu sur Ω engendrée par l'ensemble $\{A\}$ de parties de Ω. Déterminer $\mathcal{T}|E$ et $\mathcal{E}(E;\mathcal{T})$.

TOURNEZ SVP.

Exercice 4. : (3 points). On note par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Soit $r \in]0;1[$ et

$$A \;=\; \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[n; n + r^{|n|}\right[\,.$$

Montrer que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et déterminer $\lambda(A)$.

Exercice 5. : (3 points). Vrai ou faux. Répondre **sans justification**. $-0{,}25$ point par réponse fausse, 0,5 point par réponse juste, 0 point pour l'absence de réponse. Mais la note minimale à l'exercice sera 0.
Notations : On note par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. On considère un ensemble non vide Ω et une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, on ait $\{\omega\} \in \mathcal{T}$.

1. Pour tout mesure positive $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ et tout $\omega \in \Omega$, on a $\mu(\{\omega\}) = 0$.
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ et $\mu : \mathcal{T} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$ une mesure positive. Alors
$$\mu\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigr) \;=\; \lim_{n\to\infty} \mu\bigl(A_n\bigr)\,.$$
3. On a
$$\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left]1 - n^{-2}; 1 + n^{-2}\right[\right) \;=\; 2\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\,.$$
4. Pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda([a;b]) = b - a$.
5. Pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$, $\lambda([a;b]) = b - a$.
6. Pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda([a;b]) = \lambda([a;b[) = \lambda(]a;b]) = \lambda(]a;b[)$.

Fin de l'épreuve.