Continuité sur un intervalle, dérivabilité.

Exercice 88. :

1. Construire une fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([0;1]) = [0;1] \cup]2;3]$.
2. Construire une fonction continue $f : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([0;1[) = [0;1]$.
3. Construire une fonction continue $f : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([0;1[) = [0;+\infty[$.
4. Construire une fonction continue $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f([0;+\infty[) =]0;1]$.

On justifiera soigneusement le calcul de l'image par f de l'intervalle pertinent.

Exercice 89. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$. Vérifier que $f(0) < 0$ et $f(3) > 0$. En déduire qu'il existe $x \in]0;3[$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 90. : Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Montrer que f admet au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$.

Exercice 91. : Montrer que toute fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est constante.

Remarque : on retrouve ici le fait que la fonction partie entière, qui n'est pas constante, n'est pas continue sur $\mathbb{R}$, ce que l'on avait déjà obtenu dans l'exercice 75.

Exercice 92. : Soit $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et $f :]a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. On suppose que $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{b} f = \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f n'est pas injective.
2. Qu'en est-il si $\lim\limits_{a} f = \lim\limits_{b} f = +\infty$?

Exercice 93. : Soit $(a;b;c) \in \mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Montrer que, pour tout $(m;M) \in \mathbb{R}^2$ avec $m \leq M$, la restriction $f_{|[m;M]}$ de f à $[m;M]$ est bornée.

Exercice 94. : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $x \in I$, $f(x) > 0$. Soit $\mathcal{P}$ la proposition : (il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout $x \in I$, on ait $f(x) \geq \lambda$).

1. On suppose $I = [a; b]$, avec $a < b$ dans $\mathbb{R}$, et f continue. Montrer que $\mathcal{P}$ est vraie.
2. On suppose que $I = [0; 1[$ et que f est continue. Donner un exemple d'une telle fonction f pour lequel $\mathcal{P}$ est fausse.
3. On suppose que $I = [1; +\infty[$ et que f est continue. Donner un exemple d'une telle fonction f pour lequel $\mathcal{P}$ est fausse.
4. On suppose $I = [0; 1]$. Donner un exemple d'une telle fonction f pour lequel $\mathcal{P}$ est fausse.

Exercice 95. : Soit $f :]0; +\infty[\longrightarrow]0; +\infty[$ telle que les limites $\lim\limits_{0} f$ et $\lim\limits_{+\infty} f$ existent.

1. On suppose que f est continue et que $+\infty = \lim\limits_{0} f = \lim\limits_{+\infty} f$. Montrer qu'il existe $a \in]0; +\infty[$ tel que $f(a) = \inf f$.
2. On suppose que f est continue et qu'il existe $b > 0$ tel que $f(b) < \lim\limits_{0} f < +\infty$ et $f(b) < \lim\limits_{+\infty} f < +\infty$. Montrer qu'il existe $a \in]0; +\infty[$ tel que $f(a) = \inf f$.
3. On suppose que f est continue et qu'il existe $b > 0$ tel que $f(b) \leq \lim\limits_{0} f < +\infty$ et $f(b) \leq \lim\limits_{+\infty} f < +\infty$. Montrer qu'il existe $a \in]0; +\infty[$ tel que $f(a) = \inf f$.
   (Indication : on pourra séparer le cas où $f(b) = \inf f$ du cas où $f(b) > \inf f$.)
4. Donner un exemple d'une telle fonction continue f vérifiant $\lim\limits_{0} f > \lim\limits_{+\infty} f > -\infty$ et telle que $\inf f \notin f(]0; +\infty[)$.
5. Donner un exemple d'une telle fonction continue f vérifiant $\lim\limits_{+\infty} f > \lim\limits_{0} f > -\infty$ et telle que $\inf f \notin f(]0; +\infty[)$.
6. Donner un exemple d'une telle fonction f vérifiant $\lim\limits_{0} f > -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f > -\infty$ et telle que $\inf f = -\infty$.

Exercice 96. : VRAI ou FAUX ? Toute réponse doit être justifiée.
Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$.

1. Si $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.

2. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors f prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
3. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone alors f prend une fois et une seule toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.
4. Si $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure.
5. Si $f : [a;b[\longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée alors f atteint sa borne supérieure ou sa borne inférieure.
6. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas alors $1/f$ est bornée.
7. L'image du segment $[a;b]$ par une fonction continue sur $[a;b]$ est un certain segment $[c;d]$ (avec $(c;d) \in \mathbb{R}^2$ et $c \leq d$).
8. L'image de l'intervalle $]a;b[$ (avec $a < b$) par une fonction continue sur $]a;b[$ est un certain intervalle $]c;d[$ (avec $(c;d) \in \mathbb{R}^2$ et $c < d$).
9. Si l'image par $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $[a;b]$ est un segment, alors f est continue.
10. Si l'image par $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $[a;b]$ n'est pas un segment, alors f n'est pas continue.
11. Si $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est positive et si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $[M;+\infty[$.
12. Si $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et croissante alors f est injective.

Exercice 97. : Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes. On admettra que les fonctions sinus et cosinus sont continues en 0.

1. Soit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x < 0$, $f_1(x) = 0$ et, pour $x \geq 0$, $f_1(x) = 2x - 1$.
2. Soit $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x < 0$, $f_2(x) = 0$ et, pour $x \geq 0$, $f_2(x) = x^3 + x$.
3. Soit $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x < 0$, $f_3(x) = -x^3$ et, pour $x \geq 0$, $f_3(x) = -x^5 + 3x^2$.
4. Soit $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_4(x) = |x| \sin(x)$.
5. Soit $f_5 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_5(x) = |x| \cos(x)$.

Exercice 98. : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

1. Montrer que, si f est paire, alors f' est impaire. Vérifier que la réciproque est vraie.

2. Montrer que, si f est impaire, alors f' est paire.

3. Montrer que, si f' est paire, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $(f - \alpha)$ est impaire. Donner un exemple de fonction f telle que f' est paire mais f n'est pas impaire.

4. Montrer que, si f est périodique de période $T > 0$ (cf. exercice 84), alors f' est aussi périodique de période T.

5. On suppose f' est périodique de période $T > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \alpha x$, est périodique de période T. Donner un exemple de fonction f telle que f' est périodique de période $T > 0$ mais f n'est pas périodique de période $T > 0$.

Exercice 99. : On **admet** que $\ln : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et que, pour $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2. En déduire que la suite $u : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $u_n = n \ln(1+(1/n))$ est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 100. : On **admet** que $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\exp' = \exp$. On **admet** que $\ln : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et que, pour $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$. On **admet** que $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\sin' = \cos$.

1. Montrer la proposition :

$$\forall\, x > 0\,, \quad x \;>\; \ln(1+x) \;>\; \frac{x}{x+1}\,.$$

2. Montrer la proposition :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad |\sin(x)| \;\leq\; |x|\,.$$

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x > 0$, on pose $x^\alpha := \exp(\alpha \ln(x))$. Montrer, pour $\alpha > 0$, la proposition :

$$\frac{1}{2^{1+\alpha}} \;\leq\; \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right)\,.$$

Exercice 101. : Soit $\mathcal{S}$ l'ensembles des fonctions polynômiales $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0; \cdots ; a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $a_0 > 0$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,, \quad P(x) \;=\; x^n \;-\; \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot x^k\,. \tag{19}$$

Soit $\mathcal{S}^*$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ des fonctions polynômiales $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0; \cdots ; a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $a_0 > 0$, (19) soit vraie et qu'il existe $j \in [\![1; n-1]\!]$ avec $a_j > 0$.
Soit $\mathcal{S}^{**}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}$ des fonctions polynômiales $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0; \cdots ; a_{n-1}) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tels que on ait (19).
On remarque que, si $P \in \mathcal{S}^*$, alors le degré de P est strictement supérieur à 1.
Pour une fonction polynômiale P, on notera aussi par P le polynôme associé.

1. Soit $P \in \mathcal{S}$. Montrer que $\lim\limits_{+\infty} P$ existe et vaut $+\infty$.

2. Soit $P \in \mathcal{S}$. Montrer qu'il existe $x \geq 0$ tel que $P(x) = 0$.

3. Soit $P \in \mathcal{S}^{**}$ de degré $n > 1$. Vérifier que $(1/n)P' \in \mathcal{S}^{**}$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : (Pour tout $P \in \mathcal{S}^{**}$ de degré n, P a une unique racine réelle positive.). Vérifier que $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

5. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathcal{S}^{**}$ de degré $n + 1$. Montrer que P a une unique racine réelle positive.
(Indication : on pourra procéder par l'absurde.)

6. En déduire que tout $P \in \mathcal{S}^{**}$ admet une unique racine réelle positive.

7. Soit $P \in \mathcal{S}^*$ de degré $n > 1$. Vérifier qu'il existe $c \in \mathbb{R}^{+*}$, $j \in [\![1; n-1]\!]$ et $Q \in \mathcal{S}^{**}$ tel que $P' = cX^{j-1}Q$.

8. En déduire que P admet une unique racine réelle positive.
(Indication : on pourra procéder par l'absurde.)

9. Soit $P \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}^*$. Montrer que P a une unique racine réelle positive.

10. Soit $P \in \mathcal{S}$. D'après les résultats précédents, P a une unique racine réelle positive, que l'on note par α_P. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de P.

    a). Montrer que $P(|z|) \leq 0$.

    b). En déduire que $|z| \leq \alpha_P$.

    c). On suppose que $P = X^3 - a_0 - a_1X - a_2X^2$, avec $(a_0; a_1; a_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^3$ et que $|z| = \alpha_P$. Montrer que $a_1z + a_2z^2 \in \mathbb{R}^+$.

    d). En déduire que $z = \alpha_P$.

Fonctions réciproques.

Exercice 102. : On **admet** que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée cosinus. On **admet** que cosinus est positive sur $[-\pi/2;\pi/2]$ et strictement positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$. On **admet** que $\sin^2+\cos^2=1$ et que $\cos(-\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$.

1. Justifier que sinus est bijective de $[-\pi/2;\pi/2]$ sur $\sin([-\pi/2;\pi/2])$, l'image de $[-\pi/2;\pi/2]$ par sinus, et que sa bijection réciproque $g:\sin([-\pi/2;\pi/2])\longrightarrow[-\pi/2;\pi/2]$ est continue.
2. Déterminer $\sin([-\pi/2;\pi/2])$. Justifier toute réponse.
3. Déterminer un intervalle $J\subset\sin([-\pi/2;\pi/2])$ sur lequel g est dérivable. Donner explicitement g' sur cet intervalle.

Exercice 103. : Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

1. Vérifier que f n'est pas injective.
2. Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $g(\mathbb{R}^+)$, l'image par g de $\mathbb{R}^+$, et que sa bijection réciproque $g^{\langle -1\rangle}:g(\mathbb{R}^+)\longrightarrow\mathbb{R}^+$ est continue.
3. Déterminer $g(\mathbb{R}^+)$. Justifier toute réponse.
4. Déterminer un intervalle $J\subset g(\mathbb{R}^+)$ sur lequel $g^{\langle -1\rangle}$ est dérivable. Donner explicitement la dérivée $(g^{\langle -1\rangle})'$ de $g^{\langle -1\rangle}$ sur cet intervalle.

Exercice 104. : On **admet** que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, que $\sin'=\cos$, que $\cos'=-\sin$, que cosinus est positive sur $[-\pi/2;\pi/2]$, que cosinus est strictement positive sur $]-\pi/2;\pi/2[$, que $\cos(-\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$ et que $\sin^2+\cos^2=1$. Soit $f:]-\pi/2;\pi/2[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par, pour $x\in]-\pi/2;\pi/2[$, $f(x)=\sin(x)/\cos(x)$.

1. Montrer que f est bijective de $]-\pi/2;\pi/2[$ sur $f(]-\pi/2;\pi/2[)$, l'image par f de $]-\pi/2;\pi/2[$, et que sa bijection réciproque $f^{\langle -1\rangle}:f(]-\pi/2;\pi/2[)\longrightarrow]-\pi/2;\pi/2[$ est continue.
2. Déterminer $f(]-\pi/2;\pi/2[)$. Justifier toute réponse.
3. Déterminer un intervalle $J\subset f(]-\pi/2;\pi/2[)$ sur lequel $f^{\langle -1\rangle}$ est dérivable. Donner explicitement la dérivée $(f^{\langle -1\rangle})'$ de $f^{\langle -1\rangle}$ sur cet intervalle.

Exercice 105. : Montrer que l'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par, pour $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x^3/3+x^2/2+x+1$, est bijective.