Vu.

3. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et f croissante.
   a). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = -\infty$. On montre que $\lim_{a^+} f = -\infty$ en utilisant (4.18) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = -\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) < -L$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x-a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < -L$. On a montré que $\lim_{a^+} f = -\infty$.
   b). Cas où $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim_{a^+} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\inf f(\mathcal{D}_a^+) = \ell$, $\ell + \epsilon$ n'est pas un minorant de $f(\mathcal{D}_a^+)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) < \ell + \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x-a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est croissante, on a $f(x) \leq f(x_0) < \ell + \epsilon$. Comme ℓ minore $f(\mathcal{D}_a^+)$, on a aussi $f(x) \geq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim_{a^+} f = \ell$.
4. On suppose que a est adhérent à $\mathcal{D}_a^+$ et f décroissante.
   a). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = +\infty$. On montre que $\lim_{a^+} f = +\infty$ en utilisant (4.15) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $L > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = +\infty$, il existe $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) > L$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x-a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > L$. On a montré que $\lim_{a^+} f = +\infty$.
   b). Cas où $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = \ell \in \mathbb{R}$. On montre que $\lim_{a^+} f = \ell$ en utilisant (4.12) avec f remplacée par $f_{|\mathcal{D}_a^+}$.
   Soit $\epsilon > 0$. Comme $\sup f(\mathcal{D}_a^+) = \ell$, $\ell - \epsilon$ n'est pas un majorant de $f(\mathcal{D}_a^+)$. Il existe donc $x_0 \in \mathcal{D}_a^+$ tel que $f(x_0) > \ell - \epsilon$. On choisit $\delta \in]0; x_0 - a]$. Pour $x \in \mathcal{D}_a^+$ avec $|x-a| < \delta$, on a $x < a + \delta \leq x_0$ et, comme f est décroissante, on a $f(x) \geq f(x_0) > \ell - \epsilon$. Comme ℓ majore $f(\mathcal{D}_a^+)$, on a aussi $f(x) \leq \ell$. D'où $|f(x) - \ell| < \epsilon$. On a montré que $\lim_{a^+} f = \ell$. □

5 Continuité sur un intervalle de fonctions réelles.

Dans cette partie, on va s'intéresser aux fonctions réelles continues sur un intervalle. On rappelle que la notion de continuité sur un intervalle a été définie dans la définition 4.14.

Théorème 5.1. Théorème des valeurs intermédiaires. *Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, I un intervalle non vide inclu dans $\mathcal{D}$ et $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle qui est continue sur I. Alors, pour tout $(a; b) \in I^2$, pour tout réel ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in I$ compris entre a et b tel que $\ell = f(x)$.*

Preuve : Soit $(a; b) \in I^2$ et ℓ compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Si $\ell = f(a)$ (resp. $\ell = f(b)$), $x = a$ (resp. $x = b$) convient.
Si $f(a) = f(b)$, $\ell = f(a)$ donc $x = a$ convient.
Si $a = b$, on a encore $f(a) = f(b)$ donc $\ell = f(a)$ et $x = a$ convient encore.
On suppose désormais que $a \neq b$, $f(a) \neq f(b)$, $\ell \neq f(a)$ et $\ell \neq f(b)$. On traite séparément les trois cas suivants : ($a < b$ et $f(a) > f(b)$) ; ($a < b$ et $f(a) < f(b)$) ; $a > b$.

a). Cas où $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Soit $\ell \in]f(b); f(a)[$. Soit

$$A := \{x \in [a; b] ; \quad f(x) > \ell\} .$$

A est non vide car $a \in A$, par hypothèse. On a $A \subset [a; b] \subset I$. Soit $s = \sup A$. Comme A est majorée par b, $s \leq b$. Comme $a \in A$, $a \leq s$. Donc $s \in [a; b] \subset I$. Par la proposition 3.45, il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $s = \lim_n s_n$. Comme f est continue sur I, elle est continue

en s donc, par la proposition 4.15, $\lim_n f(s_n)$ existe et vaut $f(s)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \in A$ donc $f(s_n) > \ell$. Par passage à la limite $n \to +\infty$ dans ces inégalités (cf. proposition 3.43), on obtient $f(s) \geq \ell$.
Supposons $f(s) > \ell$. On a forcément $s \neq b$ car $f(b) < \ell$ et, comme $s \leq b$, on a en fait $s < b$. Comme $\lim_{x \to s} f(x) = f(s)$, on a, pour $\epsilon = (f(s) - \ell) > 0$, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}$ avec $|x - s| < \delta$, on ait $|f(x) - f(s)| < \epsilon$ (cf. (4.12)). Soit $x_0 = s + (1/2)\min(b - s; \delta) > s$. On a $|x_0 - s| < \delta$ et $x_0 \in]s; b] \subset [a; b] \subset I \subset \mathcal{D}$. Donc $x_0 \in \mathcal{D}$. On a donc $|f(x_0) - f(s)| < \epsilon$ soit, en particulier, $f(x_0) > f(s) - \epsilon = \ell$. Comme $x_0 \in [a; b]$, on a donc $x_0 \in A$. Par définition de s, $s \geq x_0$. Contradiction avec $x_0 = s + (1/2)\min(b - s; \delta) > s$.
L'hypothèse $f(s) > \ell$ est donc fausse. On a donc $f(s) \leq \ell$. Comme $f(s) \geq \ell$, on obtient $f(s) = \ell$ avec $s \in [a; b]$.

Lire.

b). Cas où $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Soit $\ell \in]f(a); f(b)[$. On considère la fonction $g = -f$, qui est définie sur $\mathcal{D}$. Comme f est continue sur I, g est continue sur I par la proposition 4.31. De plus, $g(a) = -f(a) > -f(b) = g(b)$. D'après le a) appliqué à g, tout réel ℓ' compris entre $g(a)$ et $g(b)$ est l'image par g d'un certain $x' \in [a; b]$. Comme $-\ell \in] - f(b); -f(a)[=]g(b); g(a)[$, il existe donc un $x \in [a; b]$ tel que $g(x) = -\ell$. D'où $f(x) = -g(x) = \ell$.

c). Cas où $a > b$. Soit ℓ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. On considère $h : [-b; -a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(-x)$. On sait que l'application Id est continue sur $\mathbb{R}$ donc, par la proposition 4.31, il en est de même de $-$Id. Comme $-$Id envoie $[-b; -a]$ sur $[a; b]$, où f est continue, on a, par composition, la continuité de h (cf. corollaire 4.29). De plus, ℓ compris entre $f(a) = h(-a)$ et $f(b) = h(-b)$. On applique à h avec $(a; b)$ remplacé par $(-b; -a)$ le a) si $h(-b) > h(-a)$ ou le b) si $h(-b) < h(-a)$. Il existe donc y compris entre $-b$ et $-a$ tel que $h(y) = \ell$. D'où $\ell = h(y) = f(-y)$ avec $-y$ compris entre a et b. □

Une application classique de ce résultat est la suivante. Si un fonction continue sur un intervalle prend une valeur positive et une valeur négative sur cet intervalle, alors elle s'annule sur cet intervalle. Il suffit d'appliquer le théorème 5.1 avec $f(a)$ une valeur positive et $f(b)$ une valeur négative.

Voyons maintenant une conséquence importante du théorème 5.1.

Corollaire 5.2. *Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle et continue sur I. Alors l'image $f(I)$ de I par f est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve : Comme I est non vide, $f(I)$ est aussi non vide. Soit $v_- := \inf f(I) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ et $v_+ := \sup f(I) \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On montre d'abord l'inclusion $]v_-; v_+[\subset f(I)$ puis que $f(I)$ est un intervalle.

1. Si $v_- = v_+$, l'intervalle $]v_-; v_+[$ est vide donc inclu dans $f(I)$. On suppose désormais que $v_- \neq v_+$. On a forcément $v_- < v_+$, par la proposition 1.5. Soit $y \in]v_-; v_+[$. Comme $y > v_-$, y ne minore pas $f(I)$. Il existe donc $x_- \in I$ tel que $f(x_-) < y$. Comme $y < v_+$, y ne majore pas $f(I)$. Il existe donc $x_+ \in I$ tel que $y < f(x_+)$. Par le théorème 5.1 avec $\mathcal{D}$ remplacé par I, $(a; b)$ remplacé par $(x_-; x_+)$ et ℓ remplacé par y, il existe $x \in [x_-; x_+]$ tel que $y = f(x)$. Donc $y \in f(I)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in]v_-; v_+[$, on a montré que $]v_-; v_+[\subset f(I)$.
2. On montre que $f(I)$ est l'un des intervalles suivants : $]v_-; v_+[$, $]v_-; v_+]$, $[v_-; v_+[$ et $[v_-; v_+]$.
   a). Cas où $(x_-; x_+) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de v_- et v_+, on a, pour tout $x \in I$, $v_- \leq f(x) \leq v_+$. Donc $f(I) \subset [v_-; v_+]$. D'après le 1, $]v_-; v_+[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]v_-; v_+[$, $]v_-; v_+]$, $[v_-; v_+[$ et $[v_-; v_+]$, qui sont tous des intervalles.

Lire.

   b). Cas où $v_- \in \mathbb{R}$ et $v_+ = +\infty$. Par définition de v_-, on a, pour tout $x \in I$, $v_- \leq f(x)$. Donc $f(I) \subset [v_-; +\infty[$. D'après le 1, $]v_-; +\infty[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $]v_-; +\infty[$ et $[v_-; +\infty[$, qui sont tous des intervalles.
   c). Cas où $v_- = -\infty$ et $v_+ \in \mathbb{R}$. Par définition de v_+, on a, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq v_+$. Donc $f(I) \subset] - \infty; v_+]$. D'après le 1, $] - \infty; v_+[\subset f(I)$ donc $f(I)$ est l'un des ensembles : $] - \infty; v_+[$ et $] - \infty; v_+]$, qui sont tous des intervalles.
   d). Cas où $v_- = -\infty$ et $v_+ = +\infty$. Par 1, $] - \infty; +\infty[\subset f(I)$ donc $f(I) =] - \infty; +\infty[= \mathbb{R}$, qui est bien un intervalle. □

LIre.

Attention : Le résultat ne dit pas que I et $f(I)$ sont forcément des intervalles de même nature. Il est possible que I soit un intervalle ouvert tandis que $f(I)$ est un intervalle fermé. Voyons un exemple. Soit $I =]-2; 2[$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x+2$ si $x \in]-2; -1]$, $f(x) = -x$ si $x \in]-1; 1[$, et $f(x) = x-2$ si $x \in [1; 2[$. On vérifie que f est bien continue.
On montre maintenant que $f(I) = [-1; 1]$.
Sur $]-2; -1]$, f est croissante donc, pour $x \in]-2; -1]$, on a $0 = \lim\limits_{-2} f \leq f(x) \leq f(-1) = 1$ donc $f(x) \in [0; 1]$. Sur $]-1; 1[$, f est décroissante donc, pour $x \in]-1; 1[$, on a $1 = f(-1) = \lim\limits_{(-1)^+} f \geq f(x) \geq \lim\limits_{1^-} f = f(1) = -1$ donc $f(x) \in [-1; 1]$. Sur $[1; 2[$, f est croissante donc, pour $x \in [1; 2[$, on a $-1 = f(1) \leq f(x) \leq \lim\limits_{2} f = 0$ donc $f(x) \in [-1; 0]$. On a montré que $f(I) \subset [-1; 1]$.
Soit $y \in [-1; 1]$. Si $y = 1$ alors $y = f(-1)$. Si $y = -1$ alors $y = f(1)$. Si $y \in]-1; 1[$, $y = f(-y)$. Donc $y \in f(I)$. On a montré que $[-1; 1] \subset f(I)$.
Donc $f(I) = [-1; 1]$, qui est bien un intervalle fermé.

On peut aussi avoir I non borné et $f(I)$ borné. C'est le cas pour $f : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$. On vérifie que, dans ce cas, $f(I) =]0; 1]$.

Il y a cependant un cas particulier important : le cas où I est un intervalle fermé et borné.

Théorème 5.3. *Théorème de Heine. Soit $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \leq b$ et $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e. l'image $f([a; b])$ de $[a; b]$ par f est bornée et il existe $(c; d) \in [a; b]^2$ tel que*

$$f(c) \;=\; \inf f \;:=\; \inf f\big([a;\, b]\big) \quad \text{et} \quad f(d) \;=\; \sup f \;:=\; \sup f\big([a;\, b]\big)\,.$$

En particulier, $f(c)$ est le minimum de $f([a; b])$ et $f(d)$ est le maximum de $f([a; b])$. De plus, $f([a; b]) = [\inf f; \sup f]$.

Preuve :

1. On montre d'abord par l'absurde que f est bornée.

Lire.

   a). Supposons que f ne soit pas majorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n ne majore pas $f([a; b])$ donc il existe $x_n \in [a; b]$ tel que $f(x_n) > n$. Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a; b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.53), il existe une extractrice $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{N}$ (où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in D$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.43), $a \leq \ell \leq b$. Comme f est continue sur $[a; b]$, elle est continue au point ℓ. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ converge vers $f(\ell)$.
   Par ailleurs, on a, pour tout $n \in D$, $f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n)$. On sait que φ est une suite tendant vers $+\infty$ (cf. proposition 3.50). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), on déduit des inégalités précédentes que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ tend vers $+\infty$. Contradiction puisqu'on a montré que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
   La fonction f est donc majorée.

   b). Supposons que f ne soit pas minorée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n$ ne minore pas $f([a; b])$ donc il existe $x_n \in [a; b]$ tel que $f(x_n) < -n$. Comme la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a; b]$, elle est bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass (cf. théorème 3.53), il existe une extractrice $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{N}$ (où D est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. Comme, pour tout $n \in D$, $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, on a, par passage à la limite $n \to +\infty$ dans les inégalités (cf. proposition 3.43), $a \leq \ell \leq b$. Comme f est continue sur $[a; b]$, elle est continue au point ℓ. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$ converge vers $f(\ell)$.
   Par ailleurs, on a, pour tout $n \in D$, $f(x_{\varphi(n)}) < -\varphi(n)$. On sait que φ est une suite tendant vers $+\infty$ (cf. proposition 3.50) donc $-\varphi$ tend vers $-\infty$ (cf. proposition 3.44). Par le théorème des gendarmes (cf. proposition 3.43), on déduit des inégalités précédentes que $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D}$

tend vers $-\infty$. Contradiction puisqu'on a vu que cette suite tend vers $f(\ell) \in \mathbb{R}$.
La fonction f est donc minorée.

2. On montre maintenant que les bornes supérieure et inférieure de f sont des valeurs de f.

Lire.

a). Notons $m_+ = \sup f$. On sait, par 1, que $m_+ \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure (cf. proposition 3.45), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_+, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_+. En procédant comme au 1.a), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x\circ\varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_+ \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_+. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_+ de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_+)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_+ (cf. proposition 3.51). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.33), on a donc $m_+ = f(\ell_+)$.

b). Notons $m_- = \inf f$. On sait, par 1, que $m_- \in \mathbb{R}$. D'après la caractérisation séquentielle de la borne inférieure (cf. proposition 3.45), il existe une suite d'éléments de $f([a;b])$ qui converge vers m_-, c'est-à-dire il existe une partie infinie D de $\mathbb{N}$ et $(x_n)_{n\in D} \in [a;b]^D$ tels que la suite $(f(x_n))_{n\in D}$ converge vers m_-. En procédant comme au 1.b), on montre l'existence d'une extractrice $\varphi : D' \longrightarrow D$ (où D' est une partie infinie de $\mathbb{N}$) telle que $x \circ \varphi$ soit convergente vers un certain $\ell_- \in [a;b]$. Comme f est continue sur $[a;b]$, elle est continue en ℓ_-. D'après la caractérisation séquentielle de la limite finie en ℓ_- de f (cf. proposition 4.15), la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ converge vers $f(\ell_-)$. Comme cette suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{n\in D'}$ est une sous-suite de la suite convergente $(f(x_n))_{n\in D}$, elle converge donc vers m_- (cf. proposition 3.51). Par unicité de sa limite (cf. proposition 3.33), on a donc $m_- = f(\ell_-)$.

3. On montre que $f([a;b]) = [\inf f; \sup f]$.
Par définition des bornes supérieure et inférieure, on a $f([a;b]) \subset [\inf f; \sup f]$. Par 1 et 2, on sait que $\inf f \in f([a;b])$ et $\sup f \in f([a;b])$. Par le corollaire 5.2, on sait que $f([a;b])$ est un intervalle. Donc $f([a;b])$ contient $[\inf f; \sup f]$. On a montré l'égalité souhaitée par double inclusion. $\square$

6 Dérivabilité.

Dans cette partie, on s'intéresse à la notion de dérivabilité pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

6.1 Nombres dérivés, dérivée.

Soit $\mathcal{D}$ une partie infinie de $\mathbb{R}$, $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{K}$ et $a \in \mathcal{D}$. Près de a, on cherche à approcher "le mieux possible" le graphe de f par une droite non verticale passant par le point $(a; f(a))$.
Les droites de ce type se distinguent les unes des autres par leur pente. S'il existe une telle droite qui approche "mieux" le graphe de f que les autres, on dira que f est dérivable en a et la pente p de cette droite sera le nombre dérivé de f en a. Dans ce cas, le nombre dérivé en a donne une idée du comportement de f près de a puisque le graphe de f y ressemble à la droite d'équation $y = f(a) + p(x - a)$. Cette dernière sera appelée la tangente à f en a.
Si $\mathcal{D} = \{0\} \cup [1; +\infty[$ et $a = 0$, par exemple, on sent qu'aucune droite passant par $(a; f(a))$ n'approchera le graphe de f mieux que les autres. On remarque que, dans ce cas, 0 n'est pas adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{0\}$. On ne peut pas s'approcher de 0 en restant dans $\mathcal{D} \setminus \{0\}$.
Pour éviter ce phénomène, on imposera que a soit adhérent à $\mathcal{D} \setminus \{a\}$.
Comment exprimer que le graphe de f est proche d'une droite, près de a ? Cela revient essentiellement à dire que, près de a, f est proche de g, où g est la fonction dont le graphe est la droite en question. Comment exprimer que f est proche de g, près de a ? Une façon naturelle est de dire que, près de a, la