

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

On rappelle que **toute réponse doit être justifiée.**

On rappelle que, pour tout réel x , on désigne par $|x|$ sa valeur absolue.

Exercice 1. : 2 pts.

Montrer que, pour tous nombres réels x et y , on a

$$|x - y|^2 + |x + y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2) .$$

Exercice 2. : 6 pts.

Résoudre l'équation, d'inconnue x réelle, donnée par

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = -x - 1 . \tag{1}$$

Exercice 3. : 2 pts.

Montrer que, pour tout réel $x > 0$, il existe un réel $y > 0$ tel que $y < x$.

Exercice 1, 2 pts :

Soit a un réel. Si $a \geq 0$ alors $|a| = a$ donc $|a|^2 = a^2$. Si $a \leq 0$ alors $|a| = -a$ donc $|a|^2 = (-a)^2 = (-1)^2 a^2 = a^2$.

Soit x et y des réels. D'après la propriété précédente, on a $|x|^2 = x^2$, $|y|^2 = y^2$, $|x+y|^2 = (x+y)^2$ et $|x-y|^2 = (x-y)^2$. On a donc, par une identité remarquable,

$$\begin{aligned} |x+y|^2 + |x-y|^2 &= (x+y)^2 + (x-y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 2xy + y^2 \\ &= 2(x^2 + y^2) = 2(|x|^2 + |y|^2). \end{aligned}$$

Exercice 2, 6 pts :

Version 1. Le membre de gauche de (1) n'a pas de sens pour $x = 2$. On résout l'équation (1) sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a, puisque $x - 2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = -x - 1 &\iff x^2 - 3x + 2 = -x^2 + x + 2 \\ &\iff 2x^2 - 4x = 0 \iff x(x - 2) = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

puisque $x - 2 \neq 0$. D'après les équivalences et le fait que $0 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, on a montré que 0 est la seule solution de l'équation.

Version 2. Comme le membre de gauche de (1) n'a pas de sens pour $x = 2$, on a, pour x réel,

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = -x - 1 &\iff \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = -x - 1 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 = -x^2 + x + 2 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff 2x^2 - 4x = 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff x(x - 2) = 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff (x = 0 \text{ ou } x = 2) \text{ et } x \neq 2 \iff x = 0. \end{aligned}$$

D'après les équivalences, on a montré que 0 est la seule solution de l'équation.

Version 3. Pour x réel, on a

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = -x - 1 &\iff \frac{x^2 - 3x + 2 + (x - 2)(x + 1)}{x - 2} = 0 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 + x^2 - x - 2 = 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff 2x^2 - 4x = 0 \iff x(x - 2) = 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff x(x - 2) = 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff x = 0 \text{ et } x \neq 2 \iff x = 0. \end{aligned}$$

D'après les équivalences, on a montré que 0 est la seule solution de l'équation.

Version 4. Pour x réel, on a

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = -x - 1 &\iff \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = -x - 1 \\ &\iff \frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 2} = -x - 1 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff x - 1 = -x - 1 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff 2x = 0 \text{ et } x \neq 2 \iff x = 0 \text{ et } x \neq 2 \\ &\iff x = 0.\end{aligned}$$

D'après les équivalences, on a montré que 0 est la seule solution de l'équation.

Exercice 3, 2 pts :

Soit $x > 0$. On pose $y = x/2$. Comme $(1/2) > 0$ et $x > 0$, $y > 0$. De plus, $x - y = 2y - y = y > 0$, donc $x > y$.