

L'utilisation de documents, téléphones, tablettes, calculettes ou d'objets connectés est interdite. En cas de présence, ces objets doivent être éteints et rangés dans un sac.

Interrogation notée sur 10, le barème est indicatif.

On rappelle que, sauf mention contraire explicite, **toute réponse doit être justifiée.**

On rappelle que $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} ; x \geq 0\} = [0; +\infty[$.

Exercice 1. : 2,5 pts.

Sans justification, simplifier l'écriture des ensembles suivants :

$$E_1 := ([1; 3] \cup [5; 7]) \cap [4; 6], \quad E_2 := ([4; 7] \cup [5; 6]) \cap ([2; 3] \cup [8; 9])$$

$$\text{et } E_3 := ([2; 3] \cup [4; 7]) \cap [3; 4].$$

Exercice 2. : 4,5 pts.

On **admet** le résultat suivant : pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, l'équivalence $((y \geq 1) \iff (y^4 \geq 1))$ est vraie.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, soit $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ des propositions dépendant de x . On considère les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R}^+ ; \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}^+ ; \mathcal{Q}(x) \text{ est vraie}\}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'implication $(\mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x))$ est vraie. Montrer que A est inclus dans B .
2. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$, donnée par

$$-x^6 + 3x^4 - 5x^2 = 3.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, soit $\mathcal{P}(x) = (-x^6 + 3x^4 - 5x^2 = 3)$ et $\mathcal{Q}(x) = (x \geq 1)$.

- a). Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'implication $(\mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x))$ est vraie.
- b). Montrer que $\mathcal{S}$ est inclus dans l'intervalle $[1; +\infty[$.

Exercice 3. : 3 pts.

Soit $A := \{y \in \mathbb{R} ; \exists x \in \mathbb{R} ; y = x^2\}$. Montrer que $A \subset \mathbb{R}^+$. Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, l'intersection $A \cap]0; \epsilon[$ est non vide.

Exercice 1, 2,5 pts :

On a $E_1 = [5; 6]$, $E_2 = \emptyset$ et $E_3 = \{3\}$. **0,5 pt, 1 pt et 1 pt**, respectivement.

Exercice 2, 4,5 pts :

1. Soit $a \in A$. Par définition de l'ensemble A , $\mathcal{P}(a)$ est vraie. Par hypothèse, l'implication $(\mathcal{P}(a) \implies \mathcal{Q}(a))$ est vraie. Donc $\mathcal{Q}(a)$ est vraie. Par définition de B , $a \in B$. Ceci étant vrai, pour tout $a \in A$, on a montré que $A \subset B$. **1 pt.**
2. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On montre que $(\mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x))$ est vraie.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie. On a donc $-x^6 + 3x^4 - 5x^2 = 3$ donc $3x^4 = 3 + x^6 + 5x^2$. Comme $x^2 \geq 0$ et $x^6 = (x^3)^2 \geq 0$, $3x^4 \geq 3$ et $x^4 \geq 1$. D'après le résultat admis, $x \geq 1$. Donc $\mathcal{Q}(x)$ est vraie. **2,5 pts.**
Comme $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^+ ; \mathcal{P}(x) \text{ est vraie}\}$, comme, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, l'implication $(\mathcal{P}(x) \implies \mathcal{Q}(x))$ est vraie, on a, d'après le 1, $\mathcal{S} \subset \{x \in \mathbb{R}^+ ; \mathcal{Q}(x) \text{ est vraie}\} = [1; +\infty[$. **1 pt.**

Exercice 3, 3 pts :

Soit $y \in A$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^2$. Or, les carrés de réel sont positifs, donc $y = x^2 \geq 0$. D'où $y \in \mathbb{R}^+$. Ceci étant vrai pour tout $y \in A$, $A \subset \mathbb{R}^+$. **1 pt.**

Soit $\epsilon > 0$.

Cas où $\epsilon < 1$: Comme $\epsilon > 0$, on a donc $0 < \epsilon^2 = \epsilon \cdot \epsilon < \epsilon \cdot 1 = \epsilon$. Donc $\epsilon^2 \in]0; \epsilon[$. De plus, $\epsilon^2 \in A$, par définition de A . Donc $\epsilon^2 \in (]0; \epsilon[\cap A)$ et cet ensemble est non vide.

Cas où $\epsilon \geq 1$: On a $0 < 1/4 < 1$ donc $1/4 \in]0; \epsilon[$ et, comme $1/4 = (1/2)^2$, $1/4 \in A$. D'où $(1/4) \in (]0; \epsilon[\cap A)$ et cet ensemble est non vide.

Dans tous les cas, on a montré que $]0; \epsilon[\cap A$ est non vide. **2 pts.**